1. PSEUDODERIVATA E PSEUDODIFFERENZIALE COVARIANTE DI UN CAMPO TENSORIALE.

Sia Γ una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) (con $r,s) \neq (0,0))$ su M definita da $D \in \mathcal{D}^r_s$, per ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ e per ogni $K \in \mathcal{T}$, $D_T K$ si chiama *pseudoderivata covariante* di K rispetto a T. Per ogni $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$, considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-multilineare di $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (s' volte) in $\mathcal{T}^{r'}_0$, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K, e si indica DK, il campo tensoriale di specie $(s+r',r+s')$ (considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-multilineare di $\underbrace{\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}}_{s'\text{volte}} \times \mathcal{T}^r_s$ in $\mathcal{T}^{r'}_0$ definito da:

$$(DK)(X_1,\ldots,X_{s'},T) = (D_T K)(X_1,\ldots,X_{s'}).$$

Se $K \in \mathcal{T}$ è somma di campi tensoriali di specie diverse, si chiama *pseudodifferenziale covariante* di K, e si indica DK, la somma degli pseudodifferenziali covarianti dei campi tensoriali delle varie specie.

Si prova che

<u>Proposizione</u> 1.1.- *Se* $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$, *allora per ogni* $X_1,\ldots X_{s'} \in \mathfrak{X}$ *e per ogni* $T \in \mathcal{T}^r_s$, *risulta:*

$$(DK)(X_1,\ldots,X_{s'},T) = D_T(K(X_1,\ldots X_{s'})) - \sum_{i=1}^{s'} K(X_1,\ldots,D_T X_i,\ldots,X_{s'})$$

Se $K \in \mathcal{T}$, $D(DK) = D^2K$ si chiama *pseudodifferenziale covariante secondo* di K, e in generale $D^m K$, pseudodifferenziale covariante m-esimo di K, è definito induttivamente da:

$$D^m K = D(D^{m-1}K) .$$

Se $A^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ e $\Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r k}$ sono le componenti di Γ rispetto ad una carta locale (U,ϕ) di M con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ e se X^i sono le componenti di $X \in \mathcal{X}$ rispetto alla stessa carta locale, allora le componenti $X^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r}$ di DX sono:

$$X^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r} = X^i \Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r i} + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A^{j_1 \dots j_s k}_{i_1 \dots i_r} .$$

Infatti posto $e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r} = e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$ risulta:

$$(D_U)_{e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}} (X^i e_i) = X^i (D_U)_{e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}} e_i + A(e^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_r}, X^i)\, e_i =$$

$$= X^i \Gamma^{j_1 \dots j_s h}_{i_1 \dots i_r i} e_h + \frac{\partial X^h}{\partial x^k} A^{j_1 \dots j_s k}_{i_1 \dots i_r} e_h .$$

In generale se $K \in \mathcal{T}^{r'}_{s'}$ ha componenti $K^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}}$ rispetto alla carta locale (U,ϕ), le componenti $K^{h_1 \dots h_s i_1 \dots i_{r'}}_{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{s'}}$ di DK sono:

$$K^{h_1 \dots h_s i_1 \dots i_{r'}}_{k_1 \dots k_r j_1 \dots j_{s'}} = A^{h_1 \dots h_s h}_{k_1 \dots k_r} \frac{\partial K^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}}}{\partial x^h} + \sum_{\alpha=1}^{r'} K^{i_1 \dots h \dots i_{r'}}_{j_1 \dots j_{s'}} \Gamma^{h_1 \dots h_s h_\alpha}_{k_1 \dots k_r h} -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{s'} K^{i_1 \dots i_{r'}}_{j_1 \dots h \dots j_{s'}} \Gamma^{h_1 \dots h_s h}_{k_1 \dots k_r j_\beta} \quad .$$

Se Γ è una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) definita da $D \in \mathcal{D}^r_s$, il campo tensoriale $A \in \mathcal{T}^{s+1}_r$ definito da $A(T,f) = D_T f$ può essere considerato come applicazione $\mathfrak{F}$-lineare $\mathcal{A}$ di $\mathcal{T}^r_s$ in $\mathcal{X}$ tale che ad ogni $T \in \mathcal{T}^r_s$ associa $\mathcal{A}(T) \in \mathcal{X}$ definito per ogni $f \in \mathfrak{F}$ da $\mathcal{A}(T)f = D_T f$.

Nel seguito con abuso di notazione si indicherà $\mathcal{A}$ con A.

Fissato $\omega \in \mathcal{T}^o_s$, si ponga per ogni $(X_0, X_1, \dots, X_r) \in \mathcal{X}^{r+1}$ $L_\omega(X_0, \dots, X_r) =$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \{ [A(X_{\sigma(o)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega), X_{\sigma(r)}] - \frac{1}{2} \sum_{i=o}^{r-1} (-1)^i A(X_{\sigma(o)} \otimes \dots \otimes$$

$$\otimes [X_{\sigma(i)}, X_{\sigma(i+1)}] \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r)} \otimes \omega) \}$$

dove con $\mathfrak{S}_r$ si è indicato l'insieme delle permutazioni di $\{0, \dots r\}$

Ebbene l'applicazione $S_\omega : (X_0, \dots X_r) \to S_\omega(X_0, \dots X_r)$ di $\mathcal{X}^{r+1}$ in $\mathcal{X}$ così definita:

$$S_\omega(X_0, \dots X_r) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) \, D_{X_{\sigma(o)} \otimes \dots \otimes X_{\sigma(r-1)} \otimes \omega} X_{\sigma(r)} - L_\omega(X_0, \dots, X_r) \right)$$

è un campo tensoriale di specie $(1,r+1)$ che viene chiamato ω-*torsione* di Γ.

Si osservi che per $r = 1$, $s = 0$, $\omega = 1_{\mathfrak{F}}$ (funzione di costante valore 1) si ottiene l'ordinario campo tensoriale di torsione di una pseudoconnessione lineare.

2. ESISTENZA ED ESTENSIONE DI PSEUDOCONNESSIONI LINEARI DI SPECIE (r,s).

Si proverà la seguente:

Proposizione 2.1.- *Se* M *è una varietà paracompatta, per ogni* $A \in \mathfrak{T}_r^{s+1}$ *esiste una pseudoconnessione lineare* Γ *di specie* (r,s) *su* M *, tale che, indicata con* D *la pseudodifferenziazione covariante rispetto a* Γ*, il campo tensoriale* $(T,f) \in \mathfrak{T}_s^r \times \mathfrak{F} \to D_T f \in \mathfrak{F}$ *coincide con* A.

Dimostrazione. Essendo M paracompatta, esiste una famiglia di carte ammissibili $(U_i,\phi_i)_{i\in I}$ tale che

a) $(U_i)_{i\in I}$ è un ricoprimento di M localmente finito;

b) $\forall i \in I$ $\bar{U}_i$ è compatto;

c) esiste una partizione dell'unità $(f_i)_{i\in I}$ subordinata al ricoprimento $(U_i)_{i\in I}$

Per ogni $i \in I$ sia Γ_i una pseudoconnessione lineare di specie (r,s) su U_i tale che, indicata con D_i la pseudodifferenziazione covariante rispetto a Γ_i, il campo tensoriale $A_i \in \mathfrak{T}_r^{s+1}(U_i)$ definito da

$$A_i(T',g') = D_{iT'}g' \qquad \forall g' \in \mathfrak{F}(U_i), \forall T' \in \mathfrak{T}_s^r(U_i)$$

coincida con $A_{|U_i}$.

Per ogni $i \in I$ si indichi con D_i' l'elemento di $\mathcal{L}_s^r$ definito così