variabili e parentesi.

${}^*V$ si dice la trasformata di $V$ mediante l'immersione $a \to {}^*a$ propria di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$.

7.- Un'altra importante proprietà dell'immersione: $V \in K_0 \iff {}^*V \in {}^*K_0$

LEMMA.- Sia $V(x_1,\dots,x_p)$ una L-wff ammissibile con le variabili libere $x_1\dots x_p$ e sia $X = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1\dots x_p) \in a \in \mathbb{R} \wedge V(x_1,\dots x_p)\}$. Allora $X \in \mathbb{R}$ e ${}^*X = \{(y_1\dots y_p) : (y_1\dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V(y_1,\dots y_p)\}$

Dim.- $X \in \mathbb{R}$ in quanto $X \subset a \in \mathbb{R}$, cfr. f) di p.1.

Supponiamo $V$ atomica, ossia $(x_1,\dots x_p, a_1,\dots a_{q-1}) \in a_q$.

${}^*V(y_1\dots y_p) \equiv (y_1\dots y_p, {}^*a_1\dots {}^*a_{q-1}) \in {}^*a_q$ e significa che

$\{i\in J : (y_1(i),\dots y_p(i), a_1\dots a_{q-1}) \in a_q)\} \in F$ cioé $\{i\in J : V(y_1(i)\dots y_p(i))\} \in F$.

Si tratta di far vedere che ogni elemento $z \in {}^*X$ è elemento di ${}^*a \wedge {}^*V(z)$ e viceversa. Infatti $z \in {}^*X \iff J_1 = \{i\in J : z(i) \in X\} \in F \iff$

$\iff J_1 = \{i\in J : z(i) \in a \wedge V(z(i))\} \in F \iff [J_1 \subset J_2 = \{i\in J : z(i) \in a\} \in F$ e $J_1 \subset J_3 = \{i\in J : V(z(i))\} \in F] \iff z \in {}^*a \wedge {}^*V(z)$. Il viceversa è ovvio, osservando che se $J_2$ e $J_3 \in F$, $J_2 \cap J_3 \in F$. Dimostriamo ora che il teorema è valido per tutte le $V$ senza quantificatori: basta far vedere che se è vero per $V$ è vero per $[\neg V]$ e se è vero per $V$ ed $W$, è vero per $[V \wedge W]$[10] :

sia $Y = \{(x_1,\dots x_p) : (x_1\dots x_p) \in a \in R \wedge \neg V(x_1,\dots x_p)\}$ si avrà

${}^*V = \{(y_1\dots y_p) : (y_1\dots y_p) \in {}^*a \wedge \neg\, {}^*V(y_1\dots y_p)\}$

---

(10) E' noto, infatti, che gli altri connettivi possono essere espressi in termini di $\neg$ e di $\wedge$.

con $Y = a - X = \{(x_1,\ldots x_p) : (x_1,\ldots x_p) \in a \wedge \neg V(x_1\ldots x_p)\}$. Basta tener presente $^*Y = {}^*(a-X) = {}^*a - {}^*X$.

Sia $Y = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge [V \wedge W]\}$, si avrà

$^*Y = \{(y_1\ldots y_p) : (y_1\ldots y_p) \in {}^*a \wedge [{}^*V \wedge {}^*W]\}$

$Y = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge V\} \cap \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in a \wedge W\}$ e quindi si ha:

$^*Y = {}^*(\{\ldots\ldots\} \cap \{\ldots\ldots\}) = {}^*\{\quad\} \cap {}^*\{\ldots\} = \{(x_1\ldots x_p) : (x_1\ldots x_p) \in {}^*a \wedge [{}^*V \wedge {}^*W]\}$

Per le wff ammissibili, con quantificatori, si usa il principio di induzione sul numero $n$ dei quantificatori, essendo il teorema dimostrato per $n = 0$. Sia $V$ una wff, ammissibile, con $n+1$ quantificatori.

Può essere scritta nella forma normale prenessa, cioè $V = (qx_{n+1})\ldots(qx_1)W(x_1,\ldots x_{n+1},y_1\ldots y_q)$ dove $W$ non ha quantificatori e $y_1\ldots y_q$ sono le variabili libere di $V$; supponiamo che $qx_{n+1}$ sia il quantificatore $\exists x_{n+1}$ (altrimenti si considera $\neg V$) e sia $b$ il dominio di $\exists x_{n+1}$ che appartiene ad $\mathbb{R}$ poiché $V$ è ammissibile. Sia:

$$Y = \{((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) : ((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) \in a \times b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W\} \text{ con } a \in \mathbb{R}.$$

Per l'ipotesi induttiva e poiché $^*(a\times b) = {}^*a \times {}^*b$ risulta:

$$^*Y = \{((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) : ((y_1\ldots y_p),x_{n+1}) \in {}^*a \times {}^*b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)\,{}^*W\}$$

Il dominio della relazione binaria $Y$ è:

$$X = \operatorname{dom} Y = \{(y_1\ldots y_p) : (y_1\ldots y_p) \in a \wedge (\exists x_{n+1})(x_{n+1} \in b \wedge (qx_n)\ldots(qx_1)W)\} =$$
$$= \{(y_1\ldots y_p) : (y_1\ldots y_p) \in a \wedge V(y_1\ldots v_p)\}$$

Il dominio della relazione binaria $^*Y$ è:

$$\mathrm{dom}\,{}^*V = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge (\exists x_{n+1})(x_{n+1} \in {}^*b \wedge (qx_n) \dots (ax_1)^*(W)\} =$$

$$= \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V\}$$

ed essendo ${}^*(\mathrm{dom}\ Y) = \mathrm{dom}\ {}^*Y$ si ha: ${}^*X = \{(y_1 \dots y_p) : (y_1 \dots y_p) \in {}^*a \wedge {}^*V\}$, la tesi.

Si può ora dimostrare il 2° teorema fondamentale.

Un enunciato $V$ di $L$, ammissibile , è vero in $\mathbb{R}$ se e solo se ${}^*V$ di ${}^*L$ è vero nell'ultrapotenza ${}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\mathbb{R}_n$ di $\mathbb{R}$.

Dim.- Nel caso che $V$ è priva di quantificatori: o è atomica cioè del tipo $a \epsilon b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ oppure proviene da altre formule nel modo seguente: $V \equiv [\sim W]$ oppure $V \equiv [V_1 \wedge V_2]$. Dopo di ciò la dimostrazione si ottiene per induzione sul numero di operazioni elementari occorrenti per ottenere la formula da formule atomiche. Per formule atomiche il teorema è dimostrato, poiché, per definizione, $a \epsilon b \iff {}^*a \epsilon_F {}^*b$. Supposto vero per $W$ se $V \equiv [\sim W]$, si ha:

$V \epsilon K_o \iff [\sim W] \in K_o \iff W \notin K_o \iff$ (per l'ipotesi induttiva)

${}^*W \notin {}^*K_o \iff \sim {}^*W \in {}^*K_o \iff$ (per definizione ${}^*W$ si ottiene da $W$ sostitudendo solo le costanti $a_i$ con ${}^*a_i$) ${}^*(\sim W) \epsilon {}^*K_o$ cioè ${}^*V \epsilon {}^*K_o$.

Inoltre $V \equiv [V_1 \wedge V_2] \epsilon K_o \iff V_1 \epsilon K_o \wedge V_2 \epsilon K_o \iff$ (per l'ipotesi induttiva) ${}^*V_1 \epsilon K_o \wedge {}^*V_2 \epsilon {}^*K_o \iff$ $[{}^*V_1 \wedge {}^*V_2] \epsilon {}^*K_o$ cioè ${}^*[V_1 \wedge V_2] \epsilon {}^*K_o$. Se invece $V \epsilon K_o$ ha la forma normale prenessa $V \equiv (qx_n) \dots (qx_1) W$ dove $W$ non ha quantificatori, si può supporre $(qx_n) = (\exists x_n)$, allora $V \epsilon K_o \iff \{x_n : x_n \epsilon a \wedge (qx_{n-1}) \dots q(x_1) W\} \equiv A \neq \emptyset$ dove $a$ è il dominio di $(\exists x_n)$; per il lemma, ${}^*A = \{x_n : x_n \epsilon {}^*a \wedge (qx_{n-1}) \dots (qx_1)^* W\}$, sicché $A \neq \emptyset \iff {}^*A \neq {}^*\emptyset \iff {}^*V \in {}^*K_o$.

Tale risultato e l'altro, stabilito col teorema 1° . significano che:

$${}^*\mathbb{R} = \bigcup_{n=o}^{\infty} {}^*\mathbb{R}_n \quad \text{è un modello non standard di } \mathbb{R}.$$

*Accettato per la pubblicazione su parere favorevole del Prof. R. Scozzafava*