e $a \in_F b \Longleftrightarrow J_2 = \{i \in J : a(i) \in b(i)\} \in F$: $\forall i \in J_1 \cap J_2 \in F : a(i) \in R_0 \cup R_{n-1}$,

cioé $a \in_F {}^*R_0 \cup {}^*R_{n-1}$.

5.- L'immersione $a \to {}^*a$ di $\mathbb{R}$ in ${}^*\mathbb{R}$ è propria se F è ultrafiltro δ-incompleto.

In questo paragrafo si dimostra che, nell'ipotesi che F sia δ-incompleto, vi sono elementi interni di $\mathbb{R}^J$ che non sono standard, ciò vuol dire che $\mathbb{R}$ è propriamente immerso in ${}^*\mathbb{R}$.

1° Teorema fondamentale.- Se F è δ-incompleto (6) ed $a \in R$ è un'entità che ha infiniti elementi allora esiste $b \in {}^*a$ che non è standard. (b è interno perché elemento di entità standard).

Dim. - Poiché F è δ-incompleto, esiste una partizione numerabile $\{I_1, I_2, \ldots I_n$ di J tale che, $\forall n \in N : I_n \notin F$ (7).

---

(6) F si dice δ-incompleto se esiste una successione $F_n \in F$ t.c. $\bigcap_{u=1}^{\infty} F_n \notin F$.
Si dice δ-completo quando $\forall F_n \in F$ (F_n successione) : $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in F$, cioé quando la 2ª proprietà di filtro vale per un numero infinito di $F_n \in F$. Si ricorda che non si conosce se esistono ultrafiltri δ-completi liberi, mentre ogni δ-incompleto è libero, cioé $\bigcap(G : G \in F) = \emptyset$.

(7) Le seguenti proposizioni sono equivalenti: a) F è δ-incompleto.
b) $\exists \{I_1, I_2, \ldots, I_{n-1} \ldots\}$ di J tale che $I_n \notin F, \forall n$.
Dim.- Si ricorda che F è δ-completo $\Longleftrightarrow$ μ_F è una misura (cfr. [1])

a $\Longleftrightarrow$ b. Poiché F è δ-incompleto μ_F non è una misura, sicché non vale la completa additività, cioé $\exists F_n$, successione di parti di J, con $F_i \cap F_j = \emptyset\, i \neq j$, tale che $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$, cioé il 1° membro deve essere 1, il 2° membro 0, il che vuol dire $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in F$ ed $F_n \notin F, \forall n$. Posto $F_0 = (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n)'$ si ha che $F_0 \notin F$ ed $\{F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots\}$ è una partizione numerabile di J ed $F_n \notin F$ $\forall n = 0, 1, \ldots$;
b $\Longrightarrow$ a. Se $I_n \notin F$, $I'_n = J - I_n \in F$, inoltre $\bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n = J - \bigcup_{n=1} I_n = \emptyset \notin F$ essendo $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = J$, la successione degli I'_n è quella richiesta.

Inoltre, poiché a è infinito (la sua potenza è $\geq$ di quella di N, conseguentemente contiene un insieme numerabile) esiste una successione b_n di elementi di a tale che $b_n \neq b_m$ $\forall n,m \in N$, $n \neq m$. Sia b l'applicazione di J in a tale che

$b(i) = b_1$ $\forall i \in I_1$, $b(i) = b_2$ $\forall i \in I_2, \ldots$ $b(i) = b_n$ $\forall i \in I_n, \ldots$.

Risulta $b \in_F {}^*a$ poiché $\{i \in J : b(i) \in a\} \equiv J \in F$. Ma b <u>non</u> è standard in quanto non esiste $c \in R$ tale che $b =_F {}^*c$. Se esistesse c, $\{i \in J : b(i)=c\} \in F$ contro l'ipotesi che $b(i)$ assume valore costante solo nei sottoinsiemi I_n di J che <u>non</u> appartengono ad F .

6.- <u>Introduzione di un linguaggio formale L; R come L-struttura; R^J come ${}^*L$-struttura</u>.

Mediante una corrispondenza biunivoca I fra un sottoinsieme dell'insieme di tutte le costanti di un linguaggio formale L e gli elementi della struttura R si possono identificare le costanti di tale sottoinsieme con gli elementi di R, sicché R diviene parte di L: si dice che R è una L-struttura. Indicato con $K(L)$ (o semplicemente con K) l'insieme di tutte le formule ben formate (wff) di L, che siano "ammissibili"(8), l'insieme di tutti gli enunciati ammissibili veri in R sarà denotato con K_o ($K_o \subset K$). In modo analogo, si considera R^J come parte di un linguaggio formale ${}^*L$, cioè R^J è una ${}^*L$-struttura: una wff di ${}^*L$, ammissibile(9), si dice "interna" (in particolare "standard") se tutte le costanti della formula denotano entità interne (in particolare "standard"). Indicato con ${}^*K$ l'insieme di tutti gli enunciati interni di ${}^*L$, il sottoinsieme di enunciati interni, veri in ${}^*R$, sarà denotato con ${}^*K_o$.

${}^*V$ è una wff standard di ${}^*L$ che si ottiene da V, wff ammissibile di L, sostituendone tutte le costanti $a_1, \ldots a_p$ con ${}^*a_1, \ldots {}^*a_p$ e lasciando invariate

(8) Una wff è ammissibile se il dominio di ogni quantificatore che figura in essa è una specifica entità di R: $(\forall x)[[x \in a] \Longrightarrow \ldots]$, $(\exists x)[[x \in a] \wedge \ldots]$ con $a \in R$.

(9) Il dominio di ogni quantificatore, in tal caso, è una specifica entità di R^J.