2 . Metodo di Rayleigh-Ritz. Risultati numerici.

Nel caso dell'operatore K_o si sono scelte come funzioni $v_{o,1},\ldots\ldots,v_{o,\nu}$ le seguenti:

$$v_{o,j}(x)\begin{cases} = 1 & \text{per } -\frac{j}{2} \le x \le \frac{1-j}{2} \\ = 1 & \text{per } \frac{j-1}{2} \le x \le \frac{j}{2} \\ = 0 & \text{altrove .}\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

Nel caso dell'operatore K_1 si sono scelte come funzioni $v_{1,1},\ldots,v_{1,\nu}$ le seguenti:

$$v_{1,j}(x)\begin{cases} = -1 & \text{per } -\frac{j}{2} \le x \le \frac{1-j}{2} \\ = 1 & \text{per } \frac{j-1}{2} \le x \le \frac{j}{2} \\ = 0 & \text{altrove .}\end{cases} \qquad (j=1,2,\ldots,\nu)$$

La (5) diviene allora:

$$(13) \qquad \begin{cases} \det(c_{ih\ell} - \mu\, b_{ih\ell}) = 0 \\ i=0,1; \quad h,\ell =1,2,\ldots\nu \end{cases}$$

ove:

$$c_{oh\ell} = 2 \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(2\nu)^{-(2j+2)}}{j!(2j+1)(2j+2)} \{(h+\ell)^{2j+2} -$$

$$- 2(h+\ell-1)^{2j+2} + (h+\ell-2)^{2j+2} - 2(h-\ell)^{2j+2} + (h-\ell+1)^{2j+2} +$$

$$+ (h-\ell-1)^{2j+2}\}$$

$$c_{1h\ell} = 2 \sum_{j=o}^{\infty} \frac{(2\nu)^{-(2j+2)}}{j!(2j+1)\ (2j+2} \{(h-\ell+1)^{2j+2} +$$

$$+ (h-\ell-1)^{2j+2} + 2(h+\ell-1)^{2j+2} - (h+\ell)^{2j+2} - 2(h-\ell)^{2j+2} -$$

$$- (h+\ell-2)^{2j+2}\}$$

$$b_{oh\ell} = b_{1h\ell} = \frac{1}{\nu} \qquad \delta_{h\ell} ,$$

essendo $\delta_{h\ell}$ il simbolo di Kronecker.

Riesce, allora, conveniente scrivere la (13) nella forma:

$$(14) \qquad \begin{cases} \det \ (a_{ih\ell} - \mu\delta_{h\ell} \quad) = 0 \\ i = 0,1;\ h,\ \ell = 1,2,\ldots,\nu \end{cases}$$

ove

$$a_{ih\ell} = \nu\ c_{ih\ell} \ .$$

Nel caso dell'operatore K_o le radici della (14) forniscono delle approssimazioni per difetto degli autovalori del problema (2_o), mentre nel caso dell'operatore K_1 esse forniscono approssimazioni per eccesso degli autovalori del problema (2_1).

Tutti i calcoli relativi al presente lavoro e, in particolare, quelli relativi alla risoluzione della (14), sono stati eseguiti operando in virgola mobile con 35 cifre significative della mantissa nella rappresentazione dei numeri in base dieci.

Nelle tabelle n.1_o ed 1_1 sono riportati i valori ottenuti per $\mu_{i,j}^{(\nu)}$ assumendo $\nu = 10$ e $\nu = 17, 30$ limitatamente ai valori $j=1,2,3,4$. I valori ottenuti per $j \geq 5$ sono scarsamente significativi poiché, essendo $|\mu_{ij}^{(\nu)}| \leq 10^{-8}$ tali risultati risentono maggiormente degli errori di arrotondamento.

L'esecuzione dei calcoli per diversi valori di ν è dovuta al proposito di controllare i miglioramenti che le approssimazioni ricevono passando da un dato ν ad un ν maggiore.

Si è ritenuto, inoltre, opportuno considerare gli operatori K_i^2 $(i=o,1)$. L'operatore K_i^2, come è evidente ha la seguente successione di autovalori positivi:

$$\mu_{i,1}^2 \geq \mu_{i,2}^2 \geq \dots \geq \mu_{i,\nu}^2 \geq \dots\dots \quad .$$

Il metodo di Rayleigh-Ritz, applicato all'operatore K_i^2, conduce alla seguente equazione secolare:

$$(15)\qquad \begin{cases} \det\{(K_i v_{i,h}, K_i v_{i,\ell}) - M(v_{i,h}, v_{i,\ell})\} = 0 \\ i = 0,1; \qquad h,\ell = 1,2,\dots\nu \end{cases}$$

della quale si indicano con

$$M_{i,1}^{(\nu)} \geq M_{i,2}^{(\nu)} \geq \dots \geq M_{i,\nu}^{(\nu)}$$

le ν radici.

Tenendo presente la scelta effettuata per le funzioni $v_{i,1},\dots,v_{i,\nu}$, posto

$$\alpha_{ih\ell} = \nu(K_i v_{i,h}, K_i v_{i,\ell}),$$

la (15) diviene

$$(16)\qquad \begin{cases} \det(\alpha_{ih\ell} - M\,\delta_{h\ell}) = 0 \\ i = 0,1; \qquad h,\ell = 1,2,\dots,\nu \end{cases}$$

ove

$$\alpha_{oh\ell} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^{2k}} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!\,(2j+1)\,(k-j)!}$$

$$\frac{1}{[2(k-j)+1]} \sum_{n=o}^{j} \binom{2j+1}{2n} \nu^{2n} \left[h^{2(j-n)+1} - (h-1)^{2(j-n)+1}\right]$$

$$\sum_{m=o}^{k-j} \binom{2(k-j)+1}{2m} \nu^{2m} \left[\ell^{2(k-j-m)+1} - (\ell-1)^{2(k-j-m)+1}\right] \frac{1}{[2(n+m)+1]} ;$$

$$\alpha_{1h\ell} = \nu \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{(2\nu)^{2k}} \sum_{j=o}^{k} \frac{1}{j!\,(2j+1)\,(k-j)!\,[2(k-j)+1]}$$

$$\sum_{n=o}^{j} \binom{2j+1}{2n+1} \nu^{2n} \left[(h-1)^{2(j-n)} - h^{2(j-n)}\right]$$

$$\sum_{m=o}^{k-j} \binom{2(k-j)+1}{2m+1} \nu^{2m} \left[(\ell-1)^{2(k-j-m)} - \ell^{2(k-j-m)}\right] \frac{1}{[2(n+m)+3]} .$$

Poiché riesce

$$\sqrt{M_{i,j}^{(\nu)}} \leq \sqrt{M_{i,j}^{(\nu+1)}} \qquad (j=1,\ldots.\nu)$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \sqrt{M_{i,j}^{(\nu)}} = |\mu_{i,j}| ,$$

la risoluzione della (16) fornisce dei numeri le cui radici quadrate sono anche approssimazioni per difetto degli autovalori di K_o e di $-K_1$; anzi fornisce approssimazioni per difetto migliori di quelle fornite dalla (14)[1]

([1]) Cfr. [6] teorema 2.I pag. 205.

Nelle tabelle n. 1_o ed 1_1, in appendice al presente lavoro, vengono riportati i valori ottenuti per $\sqrt{M_{o,j}^{(\nu)}}$ e $-\sqrt{M_{1,j}^{(\nu)}}$, assumendo

$\nu = 10$ e $\nu = 17$, limitatamente ai valori $j = 1,2,3,4$.