Traducendo : $[\mathcal{A}] \subset \overline{X}'$ si ha

$\forall \beta \in [\mathcal{A}]$ e $\forall A \in \mathcal{A}$ $\ni'$ $\beta \in A^*$ $\exists x \in X$ $\ni'$ $\beta_x \in A^*$

ovvero

$\forall \beta \in [\mathcal{A}]$ e $\forall A \in \beta$ $\exists x \in X$ $\ni'$ $A \in \beta_x$.

La proposizione precedente è banalmente vera in quanto $\forall A \in \beta$ basta considerare un $x \in A$, per avere che $A \in \beta_x$.

Questo risultato va confrontato con il Teorema (17) e la (6).

§8 - U e ∩ infinite in un'algebra Booleana $\mathcal{A}$.

Al §1 abbiamo osservato che rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ si ha

$$A \cup B = \sup\{A,B\} \qquad A \cap B = \inf\{A,B\} .$$

Tale fatto ci suggerisce come definire l'U e l'∩ , che chiameremo BOOLEANA, per un numero infinito di elementi di A.

Se $\emptyset = \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, denotiamo l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ con

$$\bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A$$

e tale unione, se esiste, è per definizione

$$(1) \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \sup\{A; A \in \mathcal{B}\} = B \iff \begin{cases} 1)\ B \in \mathcal{A} \\ 2)\ A \subset B \quad \forall A \in \mathcal{B} \\ 3)\ A \subset C\ (C \in \mathcal{A})\quad \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow B \subset C \end{cases}$$

(dove il sup. s'intende in $\mathcal{A}$).

Analogamente per l'intersezione

$$(2) \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \inf\{A; A \in \mathcal{B}\}$$

Il simbolo $\mathcal{A}$ in alt o può essere trascurato quando non vi siano dubbi sull'insieme ambiente. Se $\mathcal{B} = \{A_i;\ i \in I\}$ si scriverà in luogo di (1) e (2)

$$\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i \quad e \quad \bigcap_{i \in I}^{\mathcal{A}} A_i$$

Si osservi per inciso che se $\mathcal{A}'$ è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}'$ allora, nell'ipotesi di esistenza per l'U e l'$\cap$ valgono:

$$(3) \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} A \subset \bigcap_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \subset \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} A$$

Osserviamo ancora che se $\exists \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \in \mathcal{A}'$ allora nella 3^a delle (3) vale l'uguaglianza (analogamente per l'$\cap$).

Se h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}'$ allora

$$(4) \quad h\left(\bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}'} h(A) \qquad \text{(anal. per l'}\cap\text{)}$$

nel senso che se $\exists$ l'unione in uno dei due membri esiste anche nell'altro.

Il motivo della (4) è che l'isomorfismo h ed h^{-1} preserva l'$\subset$.
La (4) però <u>non vale</u> se h non è <u>bigettiva</u>.

L'$\cup$ e l'$\cap$ Booleane (infinite), definite da (1) e (2), possono non coincidere con l'U e l'$\cap$ della teoria degli insiemi, nel caso in cui l'algebra Booleana è un campo. Però se l'U (o l'$\cap$) insiemistica appartiene al campo, allora è anche l'U (o l'$\cap$) Booleana.

ESEMPI

A) Sia $\mathbb{N}_0 = \{0,1,\dots,\}$ ed $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ e sia

$\mathcal{B} = \{ A \,;\, (A \text{ finito } \subset \mathbb{N}) \vee ((\mathbb{N}_0 - A) \text{ finito } \subset \mathbb{N})\}$. $\mathcal{B}$ è una sottoalgebra di $\mathcal{A}$.
Risulta $\mathbb{N} \notin \mathcal{B}$ e

$$\overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigcup}}{}^{\mathcal{A}} \{n\} = \mathbb{N} \quad , \quad \overset{\infty}{\underset{n=1}{\bigcup}}{}^{\mathcal{B}} \{n\} = \mathbb{N}_0$$

(se $A \in \mathcal{B}$ ed A è infinito, necessariamente $o \in A$ per come è definito $\mathcal{B}$).

B) Se $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ è un campo di sottoinsiemi $\ni'$ $\{\{x\};\, x \in X\} \subset \mathcal{A}$, allora l'$\cup$ (e $\cap$) Booleana (infinita) coincide sempre con qualla insiemistica. Precisamente la 1ª esiste se e solo se la 2ª appartiene ad $\mathcal{A}$. Infatti se $\exists \bigcup_{i\in I}^{\mathcal{A}} A_i = A$ allora $A_i \subset A$ $\forall i \in I$ quindi $\bigcup_{i\in I} A_i \subset A$. Se per assurdo non coincidessero, esisterebbe $x_0 \in A$ $\ni'$ $\bigcup_{i\in I} A_i \subset A - \{x_0\}$. Quindi $A_i \subset A - \{x_0\}$ $\forall i \in I$ contraddicendo la 2ª proprietà del sup $(A - \{x_0\} \in \mathcal{A}$ perché $\{x_0\} \in \mathcal{A})$. Viceversa se $\bigcup_{i\in I} A_i = A \in \mathcal{A}$ allora A è il sup in $\mathcal{A}$ di $\{A_i;\, i \in I\}$ e quindi coincide con l'unione Booleana.

Si può verificare che l'$\cup$ e l'$\cap$ Booleane infinite sono

1) Commutative : cioé $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_{\tau(i)}$ dove $\tau : I \to I$ bigettiva. Analog. per l'$\cap$
2) Associative
3) Verificano le leggi di De Morzan
4) e vale la legge di distributività

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i)$$

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup A_i)$$

Ma mentre per l'unione e l'intersezione insiemistiche vale la seguente legge distributiva

(5) $\bigcap_{t\in T} \bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \bigcup_{\phi\in S^T} \bigcap_{t\in T} A_{t,\phi(t)}$ (e la sua duale)

($S^T = \{f : f : T \to S\}$), tale legge non vale per l'U e l'$\cap$ Booleana, e questo anche se tutte le unioni e intersezioni esistono e se S è finito(cfr. [1] pag. 61).

Per tale ragione un'algebra Booleana per la quale vale la (5) dove card.T=m e card.S = n si dice (m,n)-distributiva. Inoltre diremo che $\mathcal{A}$ è m-distributiva se è (m,m)-distributiva e completamente distributiva se è m-distributiva $\forall$ cardinale m.