ti, allora $A = \bigcup_{i \in I} A_i \notin \mathcal{A}$.

DIM. Se $\mathcal{T}$ è la topologia definita nel teor. 13, per quanto visto nell'osserv. 4, $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Se per assurdo $A \in \mathcal{A}$ allora A è chiuso e quindi $\exists$ J finito $\subset I$ $\ni'$ $A = \bigcup_{i \in J} A_i$. Questo è in contrasto con l'ipotesi che I è infinito e le A_i sono non vuote e mutualmente disgiunte.

cvd

§ 7 - Il teorema di rappresentazione di Stone (1934~1938)

Nel §1 abbiamo visto che i campi di sottoinsiemi di un dato insieme X, sono particolari algebre Booleane. In questo paragrafo faremo vedere che data un'algebra Booleana $\mathcal{A}$, questa può sempre essere riguardata, a meno di isomorfismi come un campo di sottoinsiemi, ridotto e perfetto, dello spazio $X = [\mathcal{A}]$ degli ultrafiltri di $\mathcal{A}$.

Teorema 16 - Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana, $X = [\mathcal{A}]$. Posto $h : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$ $\ni'$ $h(A) = \{\beta \in X : A \in \beta\} = A^*$ $\forall A \in \mathcal{A}$, allora h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^* = h(\mathcal{A})$, che è un campo ridotto e perfetto di sottoinsiemi di X.

DIM.

Si tratta di provare che $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$, $(A \cap B)^* = A^* \cap B^*$, $(A')^* = (A^*)'$
A tal fine basta osservare che, per definizione:

$$A \in \beta \iff \beta \in A^*$$

Infine $\beta \in (A \cap B)^* \iff A \cap B \in \beta \iff A \in \beta \wedge B \in \beta \iff \beta \in A^* \wedge \beta \in B^* \iff \beta \in A^* \cap B^*$

$$\beta \in (A')^* \iff A' \in \beta \iff A \notin \beta \iff \beta \notin A^* \iff \beta \in (A^*)'.$$

Per provare che h è ingettiva basta provare che $h(A) = \emptyset \Rightarrow A = 0$ o equivalentemente $0 \neq A \in \mathcal{A} \Longrightarrow h(A) \neq \emptyset$.

Se $0 \neq A \in \mathcal{A}$, posto $\varphi = \{B \in \mathcal{A} : B \supset A\}$, risulta φ un filtro di $\mathcal{A}$. Se β è un ultrafiltro contenente φ risulta $\beta \in h(A)$ e quindi $h(A) \neq \emptyset$. Quindi h è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su $\mathcal{A}^*$.

Proviamo che $\mathcal{A}^*$ è <u>ridotto</u>. Siano $\beta_1, \beta_2 \in X$ e $\beta_1 \neq \beta_2$; questo significa che $\exists A \in \mathcal{A}$ ∍' $A \in \beta_1 - \beta_2$. Conseguentemente $\beta_1 \in A^*$ e $\beta_2 \notin A^*$.

Proviamo che A^* è <u>perfetto</u>. Se β_1 è un ultrafiltro di A^* allora $\beta = h^{-1}(\beta_1)$ è un ultrafiltro di $\mathcal{A}$.

$$B \in \beta_1 \Longrightarrow B \in \mathcal{A}^* \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{A} \ni' h(A) = B \Longrightarrow A \in \beta$$

Viceversa $A \in \beta \Longrightarrow B = h(A) \in \beta_1$. Pertanto

$$B \in \beta_1 \Longleftrightarrow A \in \beta \Longleftrightarrow \beta \in A^* = h(A) = B$$

cioé $\beta_1 = \{ B \in \mathcal{A}^* : \beta \in B \}$,

vale a dire : β_1 è determinato dal punto $\beta \in X$.

cvd

<u>Osservazione</u> 5. Per quanto visto con teorema 13, $\mathcal{A}^*$ induce su $[\mathcal{A}]$ una topologia che lo rende compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}^*$ coincide con l'insieme di clopen di $[\mathcal{A}]$.

DEFINIZIONE 16 - Data un'algebra Booleana $\mathcal{A}$, chiamiammo <u>spazio di Stone</u> di $\mathcal{A}$, ogni spazio topologico compatto e totalmente sconnesso X, il cui campo dei clopen è isomorfo ad $\mathcal{A}$.

<u>Osservazione</u> 6 - Dall'osservazione 3 segue che tutti gli spazi di Stone di $\mathcal{A}$ coincidono a meno di omeomorfismi.

Viceversa se X è uno spazio di Stone di $\mathcal{A}$ ed Y è omeomorfo ad X allora anche Y è uno spazio di Stone di $\mathcal{A}$. Infatti sia $\varphi : X \to Y$ un omeomorfismo di X su Y e sia $\mathcal{C}$ il campo di clopen di X, posto

$$h(A) = \varphi(A) \qquad \forall A \in \mathcal{C}$$

risultando $\varphi(A)$ un clopen di Y, è h un isomorfismo di $\mathcal{C}$ sul campo $\mathcal{C}_1$ dei clopen di Y. Essendo $\mathcal{C}$ isomorfo ad $\mathcal{A}$ anche $\mathcal{C}_1$ è isomorfo ad $\mathcal{A}$.

Esempi

1) Se X è uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso ed $\mathcal{A}$ è il campo dei clopen di X, allora lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ è X stesso.

2) Se $\mathcal{A}$ è un'algebra Booleana finita, necessariamente lo spazio di Stone X di $\mathcal{A}$ deve essere finito ed essendo separato non può che essere $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$. Pertanto se X ha n elementi, $\mathcal{C}$ ne ha 2^n e quindi $\mathcal{A}$ essendo isomorfo a $\mathcal{C}$ ne ha 2^n. Non possono quindi esistere algebre Booleane finite non degeneri (cioè con più di un punto), che hanno una cardinalità diversa da 2^n per qualche $n \in N$.

   Ancora 2 algebre Booleane $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ finite che hanno lo stesso numero di elementi sono isomorfe. Infatti se X è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ ed Y quello di $\mathcal{B}$, necessariamente X ed Y hanno lo stesso numero di elementi, quindi

$$\exists f : X \to Y \qquad \text{bigettiva}$$

   f induce un'applicazione di $\mathcal{P}(X)$ in $\mathcal{P}(Y)$ che è isomorfismo. Essendo $\mathcal{A}$ isomorfo a $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{B}$ isomorfo a $\mathcal{P}(Y)$ segue che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono isomorfi.

3) Lo spazio di Stone X di un'algebra Booleana $\mathcal{A}$ è metrizzabile se e solo se $\mathcal{A}$ è al più numerabile.

   Dal teorema di Uryson (cfr. [3] pag. 616) segue che uno spazio compatto e T_2 è metrizzabile se e solo se ha una base di aperti numerabili, pertanto l'asserto segue dal fatto che $\mathcal{A}^*$ è una base di X.

4) Sia X_0 un insieme infinito che considereremo topologizzato con la topologia discreta. Sia $\mathcal{A} = \{ A \subset X_0 ;\ A \text{ finito o cofinito} \}$. Si vede facilmente che $\mathcal{A}$ è un campo ridotto ma non perfetto, in quanto l'ultrafiltro di $\mathcal{A}$ $\beta = \{ A \in \mathcal{A} : A \text{ cofinito} \}$ non è determinato da alcun punto di X_0. Considerato un punto $x_0 \notin X_0$ sia $X = X_0 \cup \{x_0\}$ e poniamo

$$h(A) = \begin{cases} A & \text{se } A \in \mathcal{A} \text{ è finito} \\ A \cup \{x_0\} & \text{se } A \in \mathcal{A} \text{ è cofinito} \end{cases}$$

Se $h(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$, h è isomorfo di $\mathcal{A}$ sul campo $\mathcal{C}$ di sottoinsiemi di X. $\mathcal{C}$ è ridotto e perfetto (questa volta il corrisponndente di β è determinato da x_0). Considerando $\mathcal{C}$ come base di aperti di X, X diventa uno spazio topologico compatto e totalmente sconnesso e quindi è lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$.

X è detto compatificazione con un punto dello spazio discreto X_0 (cfr. [3] pag. 599).

5) Ricordiamo che uno spazio topologico X si dice a) completamennte regolare (c.r.) se è T_1 e $[\forall$ chiuso C e $\forall x \notin C$ $\exists f : X \to [0,1]$ continua (e limitata) tale che $f(x) = 0$ e $f(c) = 1]$

b) regolare se è T_1 e T_3

c) normale se è T_1 e T_4 (T_2 e compatto $\Rightarrow$ normale ([3] pag.587))

Poiché c) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ b) (cfr. per es. [4] pag. 129) a volte la proprietà tra parentesi quadre e indicata con $T_{3,5}$.

Orbene vale il seguente

TEOREMA 17 (1937) di Stone e E.Čech (cfr. [4],[5] oppure [6] pag. 152).

Se X è C.R. allora $\exists$ ed è ! a meno di omeomorfismi uno spazio topologico $\beta(X)$ T_2 e compatto tale che:

(i) X è denso in $\beta(X)$ (nella topologia di $\beta(X)$)

(ii) ogni $f : X \to \mathbb{R}$ cont. e limitata ha un prolungamento (cont. e limitato) su $\beta(X)$.

Tale spazio $\beta(X)$ prende il nome di compattificazione di Stone-Čech dello spazio X.

Il legame di questo concetto con lo spazio di Stone è il seguente:

se X è un insieme qualsiasi, può sempre essere considerato spazio topologico con la topologia discreta $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$; in tal caso è evidentemente C.R.

Considerato $\beta(X)$ questo altro non è che lo spazio di Stone di $\mathcal{A}$ (cfr. Osservazione 6).

Si ha anche il seguente risultato:

<u>TEOREMA</u> 18 di B.<u>Pospišil</u> (1937) (cfr. [5] pag. 70). Se X è discreto e $|X| = \text{card } X \geq \aleph_0$ allora $|\beta(X)| = 2^{2^{|X|}}$ (cfr.[1] pag. 45)

In breve quello che si prova nel teorema 17, è che detto $C(X)$ l'insieme delle funzioni continue di X in $[0,1] = I$ e posto $\varphi : X \to I^{C(X)}$ $\ni' \forall x \in X$ $\varphi(x) \in I^{C(X)}$ tale che la f-ma coordinata di $\varphi(x)$ è proprio $f(x)$ $\forall f \in C(X)$. φ è <u>continua</u> in quanto ogni sua coordinata è continua, inoltre essendo X C.R., <u>φ è ingettiva</u>. $I^{C(X)}$ come prodotto di spazi compatti e T_2 è compatto e T_2. Posto $\beta(X) = \overline{\varphi(X)}$ segue l'asserto.

6) Sia $\mathcal{A}$ un campo di sottoinsiemi di X. Poniamo $\forall A \in \mathcal{A}$

$$g(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta \text{ e } \beta \text{ non determinato da un punto di } X\}.$$

L'applicazione

$$h(A) = A \cup g(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

è un isomorfismo di $\mathcal{A}$ su un campo perfetto $\mathcal{A}_1$ di sottoinsiemi dello spazio $Y = X \cup g(X)$. Pertanto si può passare da un campo $\mathcal{A}$ ad un campo perfetto $\mathcal{A}_1$, <u>aggiungendo dei punti all'insieme</u> X.

<u>INTERPRETAZIONE DEI CONCETTI ALGEBRICI NELLO SPAZIO DI STONE ASSOCIATO E VICEVERSA</u>

Sia X lo spazio di Stone dell'algebra $\mathcal{A}$ e sia $h : \mathcal{A} \to \mathcal{S}(X)$ il relativo isomorfismo.

Se G è un <u>aperto</u> di X allora $\{A \in \mathcal{A} : h(A) \subset G\}$ è un <u>ideale</u> detto <u>corrispondente</u> a G. Viceversa se $\mathfrak{I}$ è un ideale di $\mathcal{A}$ allora

$$h(\mathfrak{J}) = \cup \{ h(A) : A \in \mathfrak{J} \} \text{ è un aperto di } X.$$

Se F è un chiuso di X allora $\{A \in \mathcal{A} : F \subset h(A)\}$ è un filtro detto corrispondente ad F. Viceversa se $\mathfrak{F}$ è un filtro di $\mathcal{A}$ allora $h(\mathfrak{F}) = \cap\{h(A) : A \in \mathfrak{F}\}$ è un chiuso di X. In breve

$\mathcal{A}$		X	$\mathcal{A}$		X	
ideali	$\longleftrightarrow$	aperti	$\{1\}$	$\longleftrightarrow$	X	
filtri	$\longleftrightarrow$	chiusi	ultrafiltri	$\longleftrightarrow$	$\{x\}$	dove $x \in X$
$\{0\}$	$\longleftrightarrow$	$\emptyset$	ideali massimali	$\longleftrightarrow$	$X-\{x\}$	"

Osserviamo ancora che se $A \in \mathcal{A}$ e consideriamo $h(A) = A^* \in \mathcal{A}^*$ poichè per quanto visto con il T(16) e T(13), $\mathcal{A}^*$ è base della topologia su $X = [\mathcal{A}]$ e coincide con i clopen, risulta se $\beta \in X$

$$A \in \beta \iff \beta \in A^* \iff A^* \text{ è un intorno aperto e chiuso di } \beta.$$

Da ciò segue che: se $Y \subset X$

β_0 è isolato in Y $\iff \exists A \in \mathcal{A} \ni' A \in \beta_0 - \beta \ \forall \beta \in Y-\{\beta_0\}$

$\iff \exists A \in \mathcal{A} \ni' A^* = \{\beta_0\}$ ($\iff$ A è atomo di $\mathcal{A}$ cfr. §11 pag 31)

$Y = \{\beta_i ;\ i \in I\}$ è un insieme discreto in X $\iff$ Ogni punto di Y è isolato in Y

$$\iff \forall i \in I \ \exists A \in \mathcal{A} \ni' A \in \beta_i - \beta_j \ \ \forall j \in I-\{i\}$$

$Y = \{\beta_i ; i \in I\}$ è denso in sè $\iff Y \subset D_r Y \iff \forall i \in I \ \forall A \in \beta_i \ \exists j \in I-\{i\}$ tale che $A \in \beta_j \iff \forall i \in I : \beta_i \subset \bigcup_{j \neq i} \beta_j$

Osservazione 7. Sia $\mathcal{A}$ un campo di sottoinsiemi di X ed $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^*$ con $h(A) = \{\beta \in [\mathcal{A}] : A \in \beta\} = A^*$. Consideriamo la topologia indotta da $\mathcal{A}^*$ su $[\mathcal{A}]$ e proviamo che

$X' = \{\beta_x \in [\mathcal{A}] : x \in X\}$ è denso in $[\mathcal{A}]$, cioè $\overline{X'} = [\mathcal{A}]$.

Traducendo : $[\mathcal{A}] \subset \overline{X}'$ si ha

$$\forall\, \beta \in [\mathcal{A}] \text{ e } \forall A \in \mathcal{A} \ni' \ \beta \in A^* \ \exists\, x \in X \ \ni' \ \beta_x \in A^*$$

ovvero

$$\forall\, \beta \in [\mathcal{A}] \text{ e } \forall A \in \beta \ \ \exists\, x \in X \ \ni' \ A \in \beta_x .$$

La proposizione precedente è banalmente vera in quanto $\forall A \in \beta$ basta considerare un $x \in A$, per avere che $A \in \beta_x$.

Questo risultato va confrontato con il Teorema (17) e la (6).

§8 - U e $\cap$ infinite in un'algebra Booleana $\mathcal{A}$.

Al §1 abbiamo osservato che rispetto alla relazione d'ordine $\subset$ si ha

$$A \cup B = \sup\{A,B\} \qquad A \cap B = \inf\{A,B\} .$$

Tale fatto ci suggerisce come definire l'U e l'$\cap$, che chiameremo BOOLEANA, per un numero infinito di elementi di A.

Se $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, denotiamo l'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ con

$$\bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A$$

e tale unione, se esiste, è per definizione

$$(1) \qquad \bigcup_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \sup\{A; A \in \mathcal{B}\} = B \iff \begin{cases} 1)\ B \in \mathcal{A} \\ 2)\ A \subset B \quad \forall A \in \mathcal{B} \\ 3)\ A \subset C \ (C \in \mathcal{A}) \quad \forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow B \subset C \end{cases}$$

(dove il sup. s'intende in $\mathcal{A}$).

Analogamente per l'intersezione

$$(2) \qquad \bigcap_{A \in \mathcal{B}}^{\mathcal{A}} A = \inf\{A;\ A \in \mathcal{B}\}$$