§ 1. Premesse e definizioni.-

DEFINIZIONE 1. - Un'algebra Booleana è un insieme $\mathcal{A} \neq \emptyset$ in cui sono definite due operazioni binarie $\cup$, $\cap$ ed una unaria $-$, che hanno grosso modo le proprietà dell'unione, dell'intersezione e del complementare di sottoinsiemi di un insieme dato.

Formalmente un'algebra deve verificare i seguenti assiomi:

(A1)	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	commutatività
(A2)	$A \cup (B \cup C) - (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	associatività
(A3)	$(A \cap B) \cup B = B$	$(A \cup B) \cap B = B$	assorbimento
(A4)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		distributività
(A5)	$(A \cap -A) \cup B = B$; $(A \cap -A) \cap B = B$		

Porremo inoltre per definizione

DEFINIZIONE 2.-(1) $A \subset B$ (o $B \supset A$) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} A \cap B = A \Longleftrightarrow A \cup B = B$

e si prova che $\subset$ è una relazione d'ordine parziale su $\mathcal{A}$.

L'(A3) può allora essere interpretato come

$$(2) \qquad A \cap B \subset B \qquad e \qquad B \subset A \cup B$$

e l'(A5) come:

$$(3) \qquad A \cap -A \subset B \subset A \cup -A$$

DEFINIZIONE 3. - Poiché si può provare che $A \cap -A = B \cap -B$ $\forall A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap -A$ non dipende dalla scelta di A e sarà denotato con 0 e chiamato zero di $\mathcal{A}$ .. Analogamente poiché $A \cup -A$ non dipende dalla scelta di $A \in \mathcal{A}$, sarà denotato con 1 e chiamato unità di $\mathcal{A}$.

Dalla (3) segue che $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$(4) \qquad 0 \subset A \subset 1$$

e l'(A5) può essere scritto

$$(5) \qquad 0 \cup B = B \qquad 1 \cap B = B .$$

DEFINIZIONE 4. - Un'algebra Booleana si dice degenere se e solo se è formata da un unico elemento. In tal caso $0 = 1$.

<u>PRINCIPIO DI DUALITA'</u>. - Negli assiomi (A1) - (A5), $\cup$ e $\cap$ giocano un ruolo simmetrico, pertanto se una proprietà è vera, da questa se ne può ottenere un'altra (vera) detta la <u>duale</u> della prima, sostituendo all'$\cup$ l'$\cap$ e viceversa.

Si dovrà inoltre sostituire

$1 \to 0 \qquad 0 \to 1 \qquad \subset \to \supset \qquad \supset \to \subset$

per come sono stati definiti.

Con riferimento alla relazione d'ordine $\subset$ osserviamo che

(6) $$A \cup B = \min \{C : {A \atop B} \subset C\} = \sup\{A,B\}$$

(7) $$A \cap B = \max\{C : C \subset {A \atop B}\} = \inf\{A,B\}$$

Per provare la (6) basta osservare che

1) ${A \atop B} \subset A \cup B$; 2) se poi ${A \atop B} \subset C$ allora $A \cup B \subset C$ e quindi $A \cup B = \sup\{A,B\}$;

per la 2) basta provare che da $\begin{matrix} A \cup C = C \\ B \cup C = C \end{matrix}$ segue $(A \cup B) \cup C = C$: infatti $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = C \cup B = C$.

In breve possono essere provate molte delle familiari proprietà della teoria degli insiemi, ad esempio le <u>formule di De Morgan</u>

(8) $$-(A \cup B) = -A \cap -B \qquad\qquad -(A \cap B) = -A \cup -B \qquad \text{ecc.}$$

DEFINIZIONE 5. - Porremo $A - B \doteq (-B) \cap A$ (<u>differenza di A e B o A meno B</u>)

$A \to B \doteq (-A) \cup B$ (<u>è la duale di B-A</u>)

Questa seconda operazione gioca un ruolo importante nell'applicazione della teoria dell'algebre Booleane alla logica matematica. Inoltre porremo :

$A \Delta B \doteq (A-B) \cup (B-A)$ (<u>differenza simmetrica</u> di A e di B) .

DEFINIZIONE 6. - A e B si dicono <u>disgiunti</u> se $A \cap B = 0$

Esempi - A) Se $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ lo chiamiamo <u>campo</u> (field) $\overset{def}{\iff}$ $A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$ e $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow -A \in \mathscr{A}$

(Dalle leggi di De Morgan segue che $A,B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cap B, A-B, A \Delta B \in \mathscr{A}$ $\emptyset, X \in \mathscr{A}$).

Ogni campo è un'algebra Booleana rispetto alle ordinarie $\cup$, $\cap$ e $-$.

Esempi di campi e quindi di algebre sono i seguenti:

1) $\mathcal{P}(X)$

2) $\{A \subset X : A$ finito oppure $-A$ finito$\}$

3) $\{P \subset \mathbb{R} : P$ plurintervallo (finito)$\}$ (cioè unioni finite di intervalli qualsiasi di $\mathbb{R}$

4) Se X è uno spazio topologico $\{A \subset X : A$ chiuso e aperto (=clopen)$\}$

5) Se X è uno spazio topologico $\{A \subset X : \overset{\circ}{\widehat{\partial A}} = \emptyset\}$ con ∂A frontiera di A

$$(\partial A \cup B),\ \partial(A \cap B) \subset (\partial A) \cup (\partial B);\ \partial(-A) = \partial A;\ \overset{\circ}{\widehat{C \cap D}} = \mathring{C} \cap \mathring{D};\ \mathring{C} \cup \mathring{D} \subset \overset{\circ}{\widehat{C \cup D}})$$

NB. GLI SPAZI TOPOLOGICI CHE CONSIDEREREMO SONO SEMPRE T2 (cfr.[3] pag. 555)

B) Esempi di algebre che non sono campi.

Sia X uno spazio topologico. Si dice

C chiuso regolare $\overset{def}{\iff} C = \overline{\mathring{C}}$ (è un dominio)

A aperto regolare $\overset{def}{\iff} \exists C$ chiuso $\ni' A = \mathring{C}$.

Denotiamo con $\mathcal{A}_1$ l'insiemme dei chiusi regolari e con $\mathcal{A}_2$ l'insieme degli aperti regolari.

Su $\mathcal{A}_1$ consideriamo le seguenti operazioni:

$\cup \doteq$ unione; $A \cap B \doteq \overline{\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}}$, $-A \doteq \overline{A'}$ dove A' è il complementare di A.

Con tali leggi $\mathcal{A}_1$ è un'algebra Booleana.

Su $\mathcal{A}_2$ consideriamo le seguenti operazioni:

$A \cup B \doteq \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$, $\cap \doteq$ intersezione , $-A \doteq \overset{\circ}{\widehat{A'}}$

$$(\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}\ ;\ \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y})$$

C) La totalità degli eventi, in teoria delle probabilità con "o" , "e", "non" formano un'algebra Booleana.

D) L'insieme di tutte le "formule" di una teoria basata sulla logica a 2 valori, nel quale si identificano due formule equivalenti (α e β sono equivalenti se $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ è un teorema), con le operazioni $\vee, \wedge, \sim$ è un'algebra Booleana detta <u>algebra di Tarski-Lindenbaum.</u>

§ 2- <u>Ideali e Filtri</u>. Sia $\mathcal{A}$ un'algebra Booleana.

DEFINIZIONE 7. - $\emptyset \neq \mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ è detto <u>ideale</u> $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a) } A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I} \\ \text{(b) } B \in \mathcal{I},\ A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{I} \end{cases}$
$(\Leftrightarrow B \in \mathcal{I},\ A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{I})$

PROP. 1 - (a) $\wedge$(b) $\Longleftrightarrow (A \cup B \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow A \in \mathcal{I} \wedge B \in \mathcal{I})$

DEFINIZIONE 8. - Un <u>ideale</u> $\mathcal{I}$ di $\mathcal{A}$ si dice <u>proprio</u> se $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$.

PROP. 2 - $\mathcal{I}$ ideale proprio $\Longleftrightarrow 1 \notin \mathcal{I}$

($\Leftarrow$ banale, $\Rightarrow$ Se per assurdo $1 \in \mathcal{I}$ dalla (b) segue $\mathcal{A} = \mathcal{I}$)

PROP. 3 - $\mathcal{I}_i$ ideale $\forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} \mathcal{I}_i$ è un ideale.

DEFINIZIONE 9. - Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, diciamo <u>ideale generato</u> da

$$\mathcal{I}(\mathcal{B}) = \bigcap \{\mathcal{I} : \mathcal{I} \text{ ideale} \supset \mathcal{B}\}$$

Se $\mathcal{B} = \emptyset$ $\quad \mathcal{I}(\mathcal{B}) = \{0\}$

PROP. 4 - Se $\mathcal{B} \neq \emptyset$, posto $\mathcal{I}' = \{A \in \mathcal{A} : \exists A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B} \ni' A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n\}$ risulta $\mathcal{I}' = \mathcal{I}(\mathcal{B})$. (Se $\mathcal{B} \subset \mathcal{I}$ allora $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ e quindi $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}(\mathcal{B})$. Si prova poi che $\mathcal{I}'$ è un ideale $\supset \mathcal{B}$ e quindi $\mathcal{I}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{I}'$

In particolare se $A \in \mathcal{A}$ $\mathcal{I}(\{A\}) = \{B \in \mathcal{A} : B \subset A\} = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(A)$.

DEFINZIONE 10. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ <u>filtro</u> $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{(a)' } A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F} \\ \text{(b)' } B \in \mathcal{F};\ A \supset B \Rightarrow A \in \mathcal{F} \end{cases}$ $\Leftrightarrow (A \cap B \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{F}$

PROP. 5 - La nozione di filtro è duale a quella di ideale, cioé

$$\mathcal{I} \text{ ideale} \Longrightarrow \{-A : A \in \mathcal{I}\} \text{ è un filtro}$$
$$\mathcal{F} \text{ filtro} \Longrightarrow \{-A : A \in \mathcal{F}\} \text{ è un ideale}$$

In particolare