

Equazioni a derivate parziali del I ordine.

1. Involuppi.

Si consideri la famiglia ad un parametro di curve

$$(1.1) \quad f(xy; \lambda) = 0$$

dove f è una funzione di classe opportuna nei suoi argomenti, incluso il parametro λ .

Ad ogni valore di λ corrisponde una curva della famiglia. Sia λ_0 un valore fissato di λ e si consideri, oltre alla curva

$$(1.2) \quad f(xy; \lambda_0) = 0$$

la curva

$$(1.3) \quad f(x, y; \lambda_0 + d\lambda) = 0$$

Per determinare i punti di intersezione di (2) e (3) si scriva quest'ultima nella forma:

$$(1.3') \quad f(xy; \lambda_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} d\lambda + o(\lambda^2) = 0$$

I punti della curva (3) appartenenti anche alla curva (2), soddisfanno quindi la relazione:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda} = 0 + o(\lambda) = 0$$

Se, quando $d\lambda \rightarrow 0$, i punti intersezione tendono a posizioni limite, queste sono fornite dal sistema

$$(1.4) \quad \begin{cases} f(xy; \lambda_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_0} = 0 \end{cases}$$

Al variare del valore λ_0 del parametro, i punti individuati dal sistema (4) in generale variano: se essi appartengono ad una curva Γ ,

tale curva è detta l'inviluppo della famiglia (1). Ciò accade, per es., se dal sistema (4) scritto per λ generica, si possono ricavare x e y in funzione di λ .

$$\begin{cases} x = x(\lambda) \\ y = y(\lambda) \end{cases}$$

ottenendo così la curva inviluppo in forma parametrica (tale curva può consistere di diversi rami).

L'equazione cartesiana dell'inviluppo si ottiene risolvendo rispetto a λ la seconda delle (4) e sostituendo $\lambda(xy)$ nella prima

$$(1.5) \quad f[xy; \lambda(xy)] = 0 .$$

Se l'inviluppo esiste, per es. se ad ogni valore di λ_0 le (4) fanno corrispondere un ben determinato punto P_0 di coordinate $x(\lambda_0)$, $y(\lambda_0)$, la curva Γ_0 della famiglia (1), corrispondente al valore $\lambda = \lambda_0$ e l'inviluppo Γ , sono tangenti nel punto P_0 .

Infatti un sistema di parametri direttori per la normale a Γ_0 è $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})_{\lambda=\lambda_0}$ e per la normale a Γ è $(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y})_{\lambda=\lambda_0}$.
D'altra parte sulla curva Γ_0 si ha: $\frac{\partial f}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda_0} = 0$ e quindi Γ_0 e Γ in P_0 avendo la stessa normale hanno pure la stessa tangente.

In modo analogo si può procedere nel caso di famiglie di superfici.

Sia data la famiglia

$$(1.6) \quad f(xyz; \lambda) = 0 .$$

Si supponga che la curva intersezione delle due superfici:

$$\begin{cases} f(xyz; \lambda) = 0 \\ f(xyz; \lambda+d\lambda) = 0 \end{cases}$$

quando $d\lambda \rightarrow 0$ tenda ad una posizione limite (curva caratteristica).

Al variare di λ si ottiene una superficie (la quale può consistere di diverse falde) che viene detta involuppo della famiglia ad un parametro (6). Come nel caso precedente, si trova che le equazioni della curva caratteristica sono

$$\begin{cases} f(xyz; \lambda) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

e l'equazione della superficie involuppo si ottiene, eliminando λ fra queste due equazioni, nella forma:

$$f[xyz; \lambda(xyz)] = 0 .$$

Come nel caso precedente, si riconosce che la superficie involuppo è tangente ad ogni superficie della famiglia lungo la rispettiva caratteristica.

Sia data infine una famiglia a due parametri di superfici:

$$(1.7) \quad f(xyz; \lambda, \mu) = 0 .$$

L'equazione della superficie involuppo si ottiene eliminando λ e μ fra la (7) e le equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} = 0$$

e questa superficie è tangente ad ogni superficie della famiglia (7).

Introducendo una relazione $\mu = \phi(\lambda)$, si può estrarre dalla famiglia (7) una famiglia parziale ad un solo parametro:

$$(1.8) \quad f[xyz; \lambda, \phi(\lambda)] = 0 .$$

In corrispondenza ad ogni scelta della funzione ϕ esiste una diversa famiglia parziale e questa possiede un involuppo la cui equazione si ottiene eliminando λ fra la (8) e la equazione

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\lambda} = 0$$

(in questo caso non è $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$).

La estensione delle considerazioni precedenti a famiglie di varietà nello spazio a n dimensioni ($n > 3$) è immediata.

2. Equazioni a derivate parziali del I° ordine: teoria di Cauchy.

Per motivi di evidenza geometrica si esporrà, in maniera d'altra parte molto succinta, la teoria di Cauchy delle equazioni a derivate parziali del primo ordine nel caso di due variabili indipendenti.

Sia data in R^5 una varietà V_4 a quattro dimensioni:

$$(2.1) \quad F(xyupq) = 0 .$$

Scegliendo u, p, q come funzioni di x e y tali che sussista ancora la (1), queste tre funzioni determinano parametricamente nella varietà V_4 una varietà V_2 . Si supponga che $u(xy)$ sia di classe C^1 e $p(xy)$ e $q(xy)$ siano di classe C^0 . Se sussiste la relazione

$$du(xy) = p(xy)dx + q(xy)dy$$

cioè se

$$p(xy) = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv u_x; \quad q(xy) = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv u_y$$

la funzione $u(xy)$ è detta una soluzione della equazione a derivate parziali del primo ordine.

$$(2.2) \quad F(x \ y \ u \ u_x \ u_y) = 0 .$$

Geometricamente la (2) può essere interpretata nel modo seguente: fisato un punto $P_0(x_0, y_0, u_0) \in R^3$ la (2) esprime una relazione fra i parametri direttori $p_0, q_0(-1)$ della normale in P_0 alla superficie $u = u(xy)$ soluzione della (2) (superficie integrale). In ogni punto P_0 nel dominio di definizione della (2), questa rappresenta una relazione ad un parametro fra tali parametri direttori della normale: facendo va

riare ad es., p , si ottiene q dalla (2). Ciò mostra che esistono in P_0 infiniti elementi di superficie, che soddisfano la (2) e cioè tutti quelli le cui normali soddisfano tale equazione. Queste normali individuano altrettanti piani, ad esse normali e cioè tangenti alle varie superfici menzionate: si tratta dei piani tangenti alle possibili soluzioni della (2) passanti per P_0 . Questi piani passano tutti per P_0 e, in generale, dipendendo come si è detto, da un solo parametro, individuano un cono, il cono di Monge in P_0 . Così la (2) ad ogni punto associa un cono elementare (si tratta, come sempre, di considerazioni locali) come involuppo dei suoi piani tangenti.

Volendo determinare le generatrici del cono di Monge in P_0 , si osservi che una generatrice è contenuta in un piano tangente ad una possibile superficie integrale. Sia

$$(2.3) \quad u - u_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

l'equazione di un tale piano, dove ovviamente

$$(2.4) \quad F(x_0, y_0, u_0, p, q) = 0 \quad .$$

Scegliendo (se ciò è possibile) come si è accennato prima, p come parametro dell'insieme dei piani in P_0 , si ricava da (4) $q = q(p)$. Volendo procedere in maniera più simmetrica, si ponga

$$(2.5) \quad p = p(\lambda) \quad , \quad q = q(\lambda)$$

adottando un conveniente parametro. Naturalmente le (5) soddisfano alle (4). Due piani corrispondenti a valori prossimi di λ hanno equazioni

$$(2.6) \quad \begin{cases} u - u_0 = p(\lambda)(x - x_0) + q(\lambda)(y - y_0) \\ u - u_0 = p(\lambda + d\lambda)(x - x_0) + q(\lambda + d\lambda)(y - y_0) \end{cases} .$$

Le (6) sono le equazioni della retta intersezione dei detti piani

per P_0 . Si scrivano tali equazioni nella forma

$$(2.6') \quad \begin{cases} u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) \\ u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) + \\ + p'(\lambda)d\lambda(x-x_0) + q'(\lambda)d\lambda(y-y_0) + O^2(d\lambda) . \end{cases}$$

Quando, nella equazione del secondo piano, x y u appartengono alla retta intersezione, la seconda equazione, in virtù della prima si riduce a:

$$p'(\lambda)(x-x_0) + q'(\lambda)(y-y_0) + O(d\lambda^2) = 0 .$$

Al tendere di $d\lambda$ a zero la retta intersezione tende ad una posizione limite, che è una generatrice del cono di Monge. Le generatrici hanno quindi equazioni:

$$(2.7) \quad \begin{cases} u-u_0 = p(\lambda)(x-x_0) + q(\lambda)(y-y_0) \\ 0 = p'(\lambda)(x-x_0) + q'(\lambda)(y-y_0) \end{cases}$$

Le (7) si possono scrivere anche nella forma

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{du}{ds} = p(\lambda) \frac{dx}{ds} + q(\lambda) \frac{dy}{ds} \\ 0 = p'(\lambda) \frac{dx}{ds} + q'(\lambda) \frac{dy}{ds} \end{cases}$$

La prima delle (8) esprime l'ortogonalità dei vettori $(p(\lambda), q(\lambda), -1)$ $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dy}{ds})$, cioè la ortogonalità fra la normale al piano tangente e la generatrice presa. Ovviamente questa relazione non basta per individuare la generatrice, e quindi è necessario assegnare un secondo piano (che nelle (2.7) è parallelo all'asse u).

Derivando la (4) rispetto a λ si ha

$$(2.9) \quad F_p p'(\lambda) + F_q q'(\lambda) = 0$$

Il sistema costituito dalla (9) e dalla seconda delle (8) è omogeneo e ammette autosoluzioni se e solo se:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ F_p & F_q \end{vmatrix} = 0$$

cioè se

$$\frac{dx}{ds} = KF_p \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = KF_q$$

Allora la prima delle (8) si scrive

$$\frac{du}{ds} = K(pF_p + qF_q)$$

Introducendo il nuovo parametro

$$s'(s) = \int_0^s K(\xi) d\xi$$

si possono scrivere le ultime tre equazioni nella forma

$$(2.10) \quad \frac{dx}{ds} = F_p \quad ; \quad \frac{dy}{ds} = F_q \quad ; \quad \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q$$

e queste sono le equazioni di una famiglia di curve, (curve focali o di Monge) quando siano dati i secondi membri. Ad ogni punto della curva $x(s), y(s), z(s)$ è associato un elemento di piano di normale $p(s), q(s), -1$.

In base alle (10) la normale $p, q, -1$ a questo elemento di piano è

ortogonale al vettore $\frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} \frac{du}{ds}$ (che è tangente alla curva) e quindi

l'elemento di curva dx, dy, du giace nell'elemento di piano. L'insieme costituito da una curva con gli elementi di piano in tutti i suoi punti costituisce una striscia.

Il sistema delle quattro equazioni (1) e (10) nelle cinque funzioni incognite x, y, u, p, q , è indeterminato. Ogni sua soluzione è detta striscia focale⁽¹⁾. Le strisce focali appartenenti a superfici integrali della (2) sono dette strisce caratteristiche. Ogni superficie integrale è tangente in ogni suo punto al cono di Monge e quindi contiene una striscia caratteristica. Perciò ogni superficie integrale contiene strisce focali.

Se si impone ad una curva focale di appartenere ad una superficie integrale, si perviene a due nuove equazioni.

Si supponga assegnata una superficie integrale $u = u(xy)$. Poiché i membri destri delle (10) sono noti, le prime due di tali equazioni definiscono nel piano xy una famiglia ad un parametro di curve. Se da ogni punto di una di queste curve si conduce la perpendicolare al piano xy fino ad incontrare la superficie integrale data, si ottiene, su questa, una curva. Le prime due delle (10) individuano quindi sulla superficie integrale data, una famiglia ad un parametro di curve e su questa, essendo $u_x = p, u_y = q$ perché u è soluzione di (2), si ha

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = F_p p + F_q q$$

cioè è soddisfatta la terza delle (10). Quindi le curve così generate sono curve focali e generano la superficie integrale.

Dalla (1) si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0 \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y = 0 \end{cases}$$

(1) Per ogni scelta delle funzioni p e q il sistema (10) (che è autonomo) ha ∞^2 soluzioni.

che valgono identicamente sulla superficie.

Essendo poi $p_y = q_x$, le precedenti si scrivono:

$$(2.11) \quad \begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q p_y = 0 \\ F_y + F_u q + F_p q_x + F_q q_y = 0 \end{cases}$$

Se allora, sempre mantenendosi sulla superficie, ci si sposta lungo una curva focale, si possono sostituire le quantità F_p e F_q con $\frac{dx}{ds}$ e $\frac{dy}{ds}$ risp., sicché gli ultimi due termini nella prima delle (11) diventano:

$$F_p p_x + F_q p_y = \frac{dx}{ds} p_x + \frac{dy}{ds} p_y = \frac{dp}{ds}$$

e analogamente

$$F_p q_x + F_q q_y = \frac{dq}{ds}$$

In definitiva sulle curve focali giacenti su una superficie integrale sussistono le cinque equazioni differenziali ordinarie:

$$(2.12) \quad \left. \begin{cases} \frac{dx}{ds} = F_p; \frac{dy}{ds} = F_q; \frac{du}{ds} = pF_p + qF_q & \text{curve focali} \\ \frac{dp}{ds} = -(F_x + pF_u); \frac{dq}{ds} = -(F_y + qF_u) & \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{curve focali appartenen} \\ \text{ti a superfici integrali} \\ \text{(curve caratteristiche)} \end{array}$$

Le ultime due sono le (11).

Il sistema (12) è detto sistema caratteristico della (1). Per questo sistema differenziale ordinario la funzione F è un integrale primo. Infatti, usando le (12), si ha:

$$\frac{dF}{ds} = F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} = 0$$

e quindi ogni superficie $F = \text{cost}$ è costituita da soluzioni di (12).

Si inverta ora il procedimento seguito.

Anziché partire da una superficie integrale, si parta dal sistema (12): tale sistema è autonomo e definisce una famiglia di ∞^4 curve nello spazio $x y u p q$. Allora dalla famiglia a quattro parametri di soluzioni di (12) si estragga una famiglia a tre parametri imponendo la condizione che lungo queste soluzioni la F sia nulla: ogni soluzione del sistema caratteristico che soddisfi la $F = 0$ è detta striscia caratteristica: una curva spaziale $x(s), y(s), u(s)$ che porti tale striscia è detta curva caratteristica.

Sussistono le due proposizioni:

- 1) Su ogni superficie integrale esiste una famiglia ad un parametro di curve caratteristiche e di corrispondenti strisce caratteristiche.
- 2) Se una striscia caratteristica ha un elemento $xyupq$ comune con una superficie integrale essa appartiene tutta alla superficie integrale.

L'ultima affermazione è conseguenza sia del fatto che una superficie integrale è costituita di strisce caratteristiche sia della unicità della soluzione del sistema (12): se la striscia avente un elemento in comune con la superficie non giacesse su questa, dall'elemento comune partirebbe, oltre alla striscia data, anche quella appartenente alla superficie.

Per completezza conviene dare un cenno sul problema di Cauchy che consiste nel ricercare le (eventuali) superfici integrali della (1) che contengono una curva assegnata Γ .

Se la curva Γ non è una caratteristica, la soluzione passante per essa è la superficie luogo ad un parametro delle strisce caratteristiche passanti per i punti di Γ . Se la curva Γ è una caratteristica, per essa passano infinite soluzioni della equazione (1).

Per i particolari si rimanda ai trattati speciali ([1], [2], [3]).

Risulta evidente che la conoscenza della soluzione generale del sistema caratteristico (12) permette di costruire le soluzioni della (1).

Sussiste pure la proposizione inversa: la conoscenza di un integrale completo della (1) permette di risalire alla soluzione generale del sistema (12) (v.nn. 3 e 5).

3. Tipi di integrali delle equazioni del primo ordine.

Una soluzione della (1) dipendente da due parametri

$$(3.1) \quad u = \psi(x, y, a, b)$$

si dice integrale completo della (1) se la matrice

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} \psi_x & \psi_{xa} & \psi_{xb} \\ \psi_y & \psi_{ya} & \psi_b \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Sotto questa ipotesi, quindi, u è detto integrale completo se la (1) soddisfa la (2.1) identicamente per ogni valore di a e b . Poiché i parametri si possono far variare arbitrariamente, si può scegliere in particolare $b = \phi(a)$ dove ϕ è una funzione di classe opportuna. La (1) si può scrivere allora

$$(3.3) \quad u = \psi(x, y, a, \phi(a))$$

L'inviluppo di questa famiglia ad un parametro di superfici si ottiene facendo sistema fra la (3) e la

$$\psi_a + \psi_b \phi'_a = 0 \quad .$$

Se si può ricavare a da questa equazione, si ha una funzione

$$a = a(xy)$$

la quale sostituita nella (3), fornisce una soluzione della (2.1)

$$(3.4) \quad u = u(xy)$$

che è l'involuppo della famiglia (3). Poiché la (4) dipende dalla scelta della funzione ϕ , si ha in tal modo una soluzione dipendente da una funzione arbitraria: una soluzione di questo tipo si dice integrale generale della (1).

Se la famiglia a due parametri (1) possiede essa stessa un involuppo, anche questo è soluzione della (2.1) e, come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, è detto integrale singolare. Un integrale singolare si ricava quindi con procedimenti di eliminazione dal sistema

$$(3.5) \quad \psi(xyab) - u = 0, \quad \psi_a = 0, \quad \psi_b = 0.$$

L'esistenza di un integrale singolare è una proprietà della equazione (2.1) e la sua determinazione non dipende dalla conoscenza di un integrale completo. Infatti sostituendo la (3.1) nella (2.1) si ha:

$$F(xy, \psi, \psi_x, \psi_y) = 0$$

identicamente in a e b (perché ψ è integrale completo).

Derivando rispetto ad a e ab si ha

$$F_u \psi_a + F_p \psi_{xa} + F_q \psi_{ya} = 0$$

$$F_u \psi_b + F_p \psi_{xb} + F_q \psi_{yb} = 0$$

Se ψ è integrale completo si possono usare le (3.5) e si ha:

$$F_p \psi_{xa} + F_q \psi_{ya} = 0$$

$$F_p \psi_{xb} + F_q \psi_{yb} = 0$$

Questo sistema, nell'ipotesi

$$\psi_{xa} \psi_{yb} - \psi_{ya} \psi_{xb} \neq 0,$$

non ha autosoluzioni e quindi è

$$(3.6) \quad F_p = F_q = 0$$

Esiste una connessione stretta fra le curve caratteristiche e gli involuipi di soluzioni della (2.1). Formando l'involuppo della famiglia ad un parametro (3)

$$(3.7) \quad \begin{cases} u - \psi(x, y, a, \phi(a)) = 0 \\ \psi_a + \psi_b \phi' = 0 \end{cases}$$

si ottiene la curva di contatto fra l'involuppo e la superficie della famiglia corrispondente al valore a del parametro. Poiché la funzione ϕ si può scegliere in modo che $\phi(a)$ e $\phi'(a)$ siano valori prefissati, le (7) rappresentano una famiglia a tre parametri di curve. Queste curve sono le caratteristiche della (1). Infatti lungo queste curve sono tangenti due superfici integrali e cioè la (3) e la superficie involuppo: questo è possibile solo lungo una caratteristica. Ciò fornisce il risultato inverso del precedente. Si ha quindi la proposizione:

Nota un integrale completo della (2.1) si possono ricavare da questo le caratteristiche e cioè la soluzione generale del sistema (2.12) (v.n° precedente).

In questo senso l'equazione a derivate parziali del I ordine e il sistema caratteristico sono equivalenti.

La dimostrazione esplicita della proposizione enunciata verrà data a proposito della forma di Hamilton-Jacobi dell'equazione a derivate parziali nel n° 5 .

4. Caso di n variabili indipendenti. Equazione lineare omogenea.

Estendendo in maniera diretta la discussione del n° 2 si riconosce che all'equazione del primo ordine in n variabili

$$(4.1) \quad F(x^1 \dots x^n, u, p_1 \dots p_n) = 0$$

è associato il sistema caratteristico

$$\frac{dx^i}{ds} = F_{p_i}; \quad \frac{du}{ds} = \sum p_i F_{p_i}; \quad \frac{dp_i}{ds} = -(F_{x^i} + F_u p_i)$$

Le curve e le strisce focali, le curve e le strisce caratteristiche si definiscono in modo ovvio.

Come nel caso tridimensionale si dimostra che una superficie integrale è luogo di curve caratteristiche ed è costituita da strisce caratteristiche. Inoltre se una striscia caratteristica ha un elemento $x^1 \dots x^n, u, p_1 \dots p_n$

in comune con una superficie integrale, essa appartiene a tale superficie.

Il problema di Cauchy è anche analogo al problema del caso tridimensionale e consiste nel ricercare le eventuali soluzioni passanti per una data varietà $(n-1)$ dimensionale Γ .

Si hanno i risultati: se la varietà Γ non è luogo di strisce caratteristiche, il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione. Se la varietà Γ è luogo di strisce caratteristiche (varietà caratteristica) il problema ammette infinite soluzioni (v. per es. [1]).

Anche nel caso n dimensionale, quindi, la soluzione generale del sistema caratteristico permette di risalire alle soluzioni della equazione a derivate parziali. Per la proposizione inversa vedere i n.n. successivi. Infine un integrale completo è una soluzione della (1) contenente un numero di costanti arbitrarie uguale al numero delle variabili indipendenti.

In particolare se l'equazione (1) è lineare omogenea

$$(4.2) \quad a^i(x^1 \dots x^n) p_i = 0$$

le equazioni caratteristiche sono:

$$(4.3) \quad \frac{dx^i}{ds} = F_{p_i} = a^i$$

$$(4.3') \quad \frac{du}{ds} = \sum p_i a^i = 0$$

$$(4.3'') \quad \frac{dp_i}{ds} = -\sum p_k \frac{\partial a^k}{\partial x^i} = \sum a^k \frac{\partial p_k}{\partial x^i} = \sum \frac{\partial p_k}{\partial x^i} \frac{dx^k}{ds} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i} \frac{dx^k}{ds} = \frac{dp_i}{ds}$$

Come si vede le (4.3'') sono conseguenza della (2) e delle (3); la soluzione u della equazione a derivate parziali nel caso lineare omogeneo è poi integrale primo del sistema (3) (che è detto ora esso stesso sistema caratteristico).

Viceversa se $\phi(x^1 \dots x^n)$ è integrale primo del sistema (3), sostituendo in tale integrale le soluzioni del sistema e derivando rispetto ad s si trova

$$(4.4) \quad 0 = \frac{d\phi}{ds} = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{dx^k}{ds} = \sum \frac{\partial \phi}{\partial x^k} a^k$$

Questa relazione è vera sulle curve integrali del sistema (3), cioè è vera quando le x sono variabili, non indipendenti, bensì vincolate dalle equazioni di una curva soluzione delle (3). Tuttavia la (4) sussiste identicamente nel campo di definizione del sistema (3), perché per ogni punto di tale campo passa una curva integrale del sistema (v. l'identica discussione nel CAP. V n° 1). Poiché ϕ soddisfa identicamente la (4) essa è soluzione della (2).

Gli integrali primi indipendenti del sistema (3) sono $n-1$: ogni integrale primo del sistema è funzione di $n-1$ integrali primi indipendenti e viceversa, come è ovvio, ogni funzione di integrali primi è un integrale primo.

Nel caso della equazione lineare omogenea (2) si può dare quindi espli

citamente la soluzione generale, sotto forma della più generale funzione (di classe C^1) di $n-1$ integrali primi del sistema caratteristico associato (3).

Per maggiori particolari si rimanda a [1].

Il significato geometrico della (2) è evidente. Poiché il primo membro è il prodotto scalare del vettore $(a^1 \dots a^n)$ e del vettore $(\frac{\partial u}{\partial x^1} \dots \frac{\partial u}{\partial x^n})$,

la (2) esprime che ogni superficie integrale è tangente in ogni punto al vettore $(a^1 \dots a^n)$ in quel punto.

Il cono di Monge come è ovvio, degenera nel suo asse $(a^1 \dots a^n)$, (asse di Monge).

5. Forma di Hamilton-Jacobi dell'equazione del primo ordine.

L'equazione generale

$$(5.1) \quad F(x^1 \dots x^n, u, p_1, p_n) = 0$$

può essere ridotta ad una forma che ha grande importanza in dinamica.

Si ponga $u = x^{n+1}$ e sia

$$\phi(x^1 \dots x^{n+1}) = c$$

una famiglia di soluzioni della (1), in forma implicita: risulta ovviamente $\frac{\partial \phi}{\partial x^{n+1}} \neq 0$. Poiché si ha inoltre:

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{n+1}}{\partial x^i} = - \frac{\partial \phi / \partial x^i}{\partial \phi / \partial x^{n+1}}$$

posto $\bar{p}_k = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \quad (k = 1 \dots n) \quad x^{n+1} = t, \quad \bar{p}_{n+1} = p_t,$

si può scrivere la (1) nella forma:

$$(5.1') \quad F(x^1 \dots x^n \dots x^{n+1}, \frac{\bar{p}_1}{p_t}, \dots, \frac{\bar{p}_n}{p_t}) = 0$$

Nell'ipotesi che sia $\frac{\partial F}{\partial p_t} \neq 0$ ⁽¹⁾, risolvendo la (1') rispetto a p_t e riscrivendo p in luogo di \bar{p} , si ha infine la (1) nella forma

$$(5.2) \quad p_t + H(x^1 \dots x^n p_1 \dots p_n) = 0$$

detta forma di Hamilton-Jacobi.

Si indichi con $\mathcal{F}(x_1 \dots x_n t p_i p_n p_t)$ il primo membro della (2) e si osservi che l'equazione caratteristica relativa alla invariabile t è:

$$\frac{dt}{ds} = \mathcal{F}_{p_t} = 1$$

Per scrivere il sistema caratteristico della (2) conviene quindi assumere come parametro la t .

Il sistema è allora:

$$(5.3) \quad \frac{dx^i}{dt} = \mathcal{F}_{p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -(\mathcal{F}_{x^i} + \mathcal{F}_{\phi} p_i) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$$

(i = 1...n)

$$(5.4) \quad \frac{d\phi}{dt} = \sum_{k=1}^{n+1} p_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^n p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} + p_t \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_t} = p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} - H$$

$$(5.5) \quad \frac{dp_t}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

Come si vedrà nella PARTE II, le (3) sono le equazioni canoniche di un sistema canonico di hamiltoniana H .

La (4) mostra che ϕ è l'azione e la (5) è diretta conseguenza della

 (1) Se risulta $\frac{\partial F}{\partial p_t} = 0$ si risolve la (5.1') rispetto ad un'altra delle p .

(2).

Si può osservare che se si risolve il sistema (3), che è un sistema non autonomo nelle incognite $x_1 \dots x_n p_1 p_n$ si ottiene direttamente per quadrature la soluzione del sistema (4) (5). Infatti le soluzioni $x^i(t)p_j(t)$ ($i = 1 \dots n$) del sistema (3), poste nel sistema (4) (5), riducono i secondi membri di questa a funzioni della sola t (e dei parametri iniziali): di conseguenza queste due ultime equazioni si integrano per quadrature. Ne segue che in sostanza interessa risolvere il sistema canonico (3).

In conclusione: ogni equazione del primo ordine può essere posta nella forma di Hamilton-Jacobi: il suo sistema caratteristico assume allora forma canonica.

Si è visto nel n° 2 che la risoluzione del sistema caratteristico fornisce le soluzioni dell'equazione del primo ordine ad esso associato. Verrà ora dimostrato che viceversa, la conoscenza di una soluzione completa di una equazione del primo ordine fornisce la soluzione generale del sistema caratteristico associato.

La dimostrazione verrà data partendo dalla equazione nella forma di Hamilton-Jacobi. Ciò non lede la generalità, dato che ogni equazione del primo ordine può essere ridotta a tale forma. D'altra parte la dimostrazione in questo caso è direttamente utile in meccanica e fornisce il teorema che in dinamica va sotto il nome di teorema di Hamilton-Jacobi.

Sia

$$(5.6) \quad u = \phi(x^1 \dots x^n t a_1 \dots a_n) + a_{n+1}$$

un integrale completo della (2). Tale integrale contiene un numero di costanti arbitrarie pari al numero delle variabili indipendenti (n° 4).

Nella (6) la funzione incognita compare in (2) solo per il tramite

delle sue derivate: ne segue che una delle costanti arbitrarie è additiva.

Poiché u è un integrale completo sussiste la (3.2). Si assuma esplicitamente che sia:

$$(5.7) \quad \left\| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_i} \right\| \neq 0$$

Per risalire dall'integrale completo u alla soluzione del sistema (3) si costruisca una famiglia ad n parametri di soluzione estratta dalla (6): costruendo poi l'inviluppo di questa famiglia si ottiene una ipersuperficie che è ancora una soluzione della (2) e che tocca ogni elemento della famiglia lungo una curva: tale curva è una caratteristica della (2), cioè una soluzione del sistema (3). In ciò consiste il teorema di Hamilton-Jacobi.

La costruzione della famiglia ad n parametri si può effettuare scegliendo gli $n+1$ parametri $a_1 \dots a_{n+1}$ che figurano nella (6) come funzioni di n parametri $r_1 \dots r_n$:

$$a_i = \omega_i(r_1 \dots r_n) \equiv \omega_i(r) \quad i = 1 \dots n+1 .$$

Introducendo questa nella (6) si ha

$$(5.6') \quad -u + \phi(x^1 \dots x^n + \dots a_1(r) \dots a_n(r)) + a_{n+1}(r) \equiv \\ \equiv \phi(x^1 \dots x^{n+1} \dots a_1 \dots a_{n+1}) = 0$$

Per determinare l'inviluppo ad n parametri occorre far sistema fra la (6') e le sue derivate rispetto alle r :

$$(5.8) \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial a_k} \frac{\partial a_k}{\partial r_r} = 0 \quad (r = 1 \dots n)$$

Ricavando le r dalle (8) e sostituendole nella (6') si ottiene la superficie inviluppo.

Questa superficie tocca la generica superficie della famiglia (6') lungo una curva. Ogni curva di contatto corrisponde, in base alla teoria degli involuipi, ad una n^{pla} di valori fissi delle r .

Perciò anche le a_i e le $\frac{\partial \omega_i}{\partial r_r}$ sono costanti lungo la generica curva di contatto.

Il sistema (8) riguardato come un sistema algebrico di n equazioni nelle $n+1$ incognite $\frac{\partial \phi}{\partial a_k}$, ha matrice

$$(5.9) \quad \frac{\partial(\omega_1 \dots \omega_{n+1})}{\partial(r_1 \dots r_n)}$$

di rango n . Perciò le incognite sono proporzionali ai minori della matrice stessa:

$$(5.10) \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_k} = \lambda \bar{b}_k \quad (i = 1 \dots n)$$

$$(5.10') \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_{n+1}} = \lambda \bar{b}_{n+1}$$

dove \bar{b}_s ($s = 1 \dots n+1$) è il minore di (9) ottenuto eliminando la linea delle derivate di ω rispetto a r_s . In virtù della costanza delle derivate di ω sulle curve di contatto, si ha:

$$(5.11) \quad \bar{b}_i = \text{cost} \quad (i = 1 \dots n+1)$$

Inoltre è $\frac{\partial \phi}{\partial a_{n+1}} = 1$ e quindi la (10') dà:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{b}_{n+1}}$$

Perciò sulle curve di contatto è costante anche λ e, per le (10), (11) risulta infine

$$(5.12) \quad \frac{\partial \phi}{\partial a_i} = \frac{\bar{b}_i}{\bar{b}_{n+1}} \equiv b_i = \text{cost} \quad (i = 1 \dots n+1)$$

La (7) si può scrivere:

$$(5.13) \quad \left| \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_j} \right| \right| \neq 0$$

Allora il sistema (12) si può invertire rispetto alle x :

$$(5.14) \quad x^i = x^i(x_{n+1} a_1 \dots a_n b_1 \dots b_n)$$

Le funzioni

$$(5.15) \quad p_j = \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

calcolate sulle (14) forniscono striscie caratteristiche del sistema (3). Per riconoscerlo basta dimostrare che le (14) e le (15) sono le soluzioni del sistema canonico

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad ; \quad \frac{dp_j}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

Conviene partire dalle soluzioni in forma implicita (12). Derivando rispetto a t si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial t} = 0$$

Derivando la (2) rispetto a a_j , dopo avervi introdotto la soluzione (6) si ha:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial a_j} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial a_j} = 0$$

Gli ultimi due sistemi sono validi in ogni punto del campo di definizione della (2). Sottraendoli a m. a m. si ha

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial a_j \partial x^k} \left(\frac{dx^k}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) = 0$$

In virtù della (4) questo sistema non ammette autosoluzioni e quindi e

$$(5.16) \quad \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad .$$

Derivando le (15) rispetto a t si ha :

$$(5.17) \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial t} \quad .$$

Derivando ancora la (2) rispetto a x^k dopo avervi sostituito la (6') si ha

$$0 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial H}{\partial x^k} + \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^r \partial x^k}$$

ossia usando le (16)

$$- \frac{\partial H}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial t} + \frac{\partial x^r}{\partial t} \frac{d^2 \phi}{\partial x^r \partial x^k} \quad .$$

Confrontando con le (17) si ha infine

$$(5.17') \quad \frac{dp_k}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^k} \quad .$$

Le (14) e le (15) sono dunque soluzioni del sistema canonico: esse contengono $2n$ costanti arbitrarie e forniscono pertanto la soluzione generale di tale sistema.

Si riconosce quindi che:

- 1) La conoscenza dell'integrale completo (6) fornisce la soluzione generale del sistema canonico. Per ottenere tale soluzione basta invertire le (12) rispetto alle x e introdurre queste ultime nelle (15).
- 2) L'inviluppo fornito dalle (6) con l'introduzione delle $a_i = \omega_i(r)$ è una soluzione della (2) perché è costituita da curve caratteristiche.

La discussione precedente giustifica il metodo che segue in dinamica per costruire la soluzione generale del sistema (3) a partire da un integrale completo ϕ della (2) (v. CAP. IV n° 5). Per costruire tale so-

luzione si uguagliano a delle costanti b_i le derivate di ϕ rispetto alle costanti a (eq. (12)) e poi da queste uguaglianze e dalle (15), con procedimento di inversione e di eliminazione si perviene alla soluzione generale del sistema (3).

La discussione fatta in questo n°, mette in luce il significato geometrico di tale procedimento.

6. Sistemi completi di equazioni del primo ordine.

Nei capitoli successivi avranno importanza fondamentale certi sistemi di equazioni a derivate parziali del primo ordine, lineari, omogenee, in una sola funzione incognita, ossia sistemi del tipo:

$$(6.1) \quad X_k f \equiv \sum_{i=1}^n a_{ik}(x_1 \dots x_n) \partial_i f = 0 \quad (k = 1 \dots s; s \leq n)$$

Le s equazioni del sistema saranno sempre supposte linearmente indipendenti: in altri termini si supporrà sempre che la matrice a_{ik} abbia rango s . Di conseguenza deve essere $s \leq n$.

Se $s = n$ il sistema (1), come sistema algebrico, ammette la sola soluzione $\partial_i f = 0$ ($i = 1 \dots n$) e quindi può essere solo $f = \text{cost}$. D'ora in avanti si supporrà pertanto $s < n$.

Un sistema del tipo (1) può essere risolto in vari modi, ma nelle applicazioni interessa generalmente non tanto pervenire alla forma esplicita delle (eventuali) soluzioni, quanto sapere se esistono soluzioni distinte dalla soluzione $f = \text{cost}$ e, in caso affermativo, determinare il numero di tali soluzioni. A queste domande risponde in modo conclusivo la teoria dei sistemi completi, della quale si tratteggeranno ora brevemente quegli aspetti che saranno indispensabili nel seguito.

Una soluzione del sistema (1), oltre a soddisfare le equazioni $X_i f = 0$ e $X_k f = 0$ per ogni i e k con $1 \leq i, k \leq s$, soddisfa ovviamente anche le relazioni

$$(6.2) \quad [X_j, X_k] f \equiv (X_j X_k - X_k X_j) f = 0 \quad .$$

L'operatore $[X_j, X_k]$ è detto il commutatore degli operatori lineari X_j e X_k . Un calcolo diretto mostra che il commutatore dei due operatori lineari è ancora un operatore lineare:

$$\begin{aligned} [X_j, X_k] f &= \sum_{r,i=1}^n a_{ij} \partial_i (a_{rk} \partial_r f) - \sum_{r,i=1}^n a_{rk} \partial_r (a_{ij} \partial_i f) = \\ (6.3) \quad &= \sum_{r,i=1}^n a_{ij} (\partial_i a_{rk}) \partial_r f - \sum_{r,i=1}^n a_{rk} (\partial_r a_{ij}) \partial_i f = \\ &= \sum_{h=1}^n [(X_j a_{hk}) - (X_k a_{hj})] \partial_h f \quad . \end{aligned}$$

Si considerino le equazioni (2) relative a tutte le coppie di indici j e k .

Se risulta per una coppia di indici

$$(6.4) \quad [X_j, X_k] = \sum_{\ell=1}^s c_{j,k}^{\ell} X_{\ell}$$

cioè se il commutatore di X_j e X_k è combinazione lineare delle $X_1 \dots X_s$, l'equazione (2), per quella coppia di indici, non è indipendente dalle (1).

Ci si limiti allora a quelle coppie di indici per le quali le (4) non sono soddisfatte. Per ognuna di tali coppie la corrispondente equazione (2) non è combinazione lineare delle (1), ma al tempo stesso deve essere soddisfatta.

Aggiungendo al sistema (1) tutte le equazioni di tipo (2) per le quali i commutatori non soddisfano alla (4), si ottiene un nuovo sistema differenziale di $r_1 \geq s$ equazioni che ha le stesse soluzioni del sistema (1) (l'aggiunta di equazioni ad un sistema certamente non aumenta il numero delle soluzioni; nel caso presente il numero delle soluzioni resta inalterato quando il sistema (1) viene ampliato mediante l'aggiunta di equazioni (2)).

Ripetendo per il nuovo sistema le operazioni eseguite per il sistema (1) e procedendo nello stesso modo per ogni nuovo sistema ottenuto, si perviene, dopo un numero finito di passi, o ad un sistema di n equazioni indipendenti, nel qual caso l'unica soluzione è $f = \text{cost}$, o ad un sistema di $r < n$ equazioni indipendenti.

$$(6.5) \quad X_i f = 0 \quad (i = 1 \dots r < n)$$

tali che i commutatori $[X_i, X_k]$ ($i, k = 1 \dots r$) sono combinazioni lineari di $X_1 \dots X_r$. Un sistema di questo genere è detto completo (di ordine r): nel caso in cui i commutatori $[X_i, X_k]$ siano tutti nulli, il sistema completo è detto sistema di Jacobi. Per risolvere sistemi di tipo (1) ci si riconduce sempre a sistemi completi.

Per i sistemi completi sussistono le due proposizioni, di cui si omette la dimostrazione (v. per es. [2])

- 1) Ogni trasformazione invertibile di coordinate trasforma un sistema completo in un sistema completo.
- 2) Formando r combinazioni lineari indipendenti con le equazioni di un sistema completo di ordine r , si ottiene ancora un sistema completo (che viene detto equivalente a quello di partenza).

E' conveniente ridurre un generico sistema completo ad un sistema completo avente la forma di Jacobi.

Per vedere che ciò è possibile si parta dal sistema completo:

$$(6.6) \quad \sum_{i=1}^n a_{ik} a_i f = 0 \quad k = 1 \dots r$$

e si supponga che sia di ordine r il minore per il quale $1 \leq i, k \leq r$. Risolvendo il sistema (6) rispetto a $a_1 f \dots a_r f$ si ha un sistema del tipo:

$$(6.6') \quad Z_i f = a_i f + \sum_{k=r+1}^n b_{ki} a_k f = 0 \quad (i = 1 \dots r)$$

Questo sistema è completo perché le equazioni che lo costituiscono sono combinazioni lineari delle equazioni (6). D'altra parte si ha per le (3)

$$\begin{aligned} (Z_j Z_k - Z_k Z_j) &= [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] \partial_h = \\ &= \sum_{h=1}^r [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] \partial_h + \\ &+ \sum_{h=r+1}^n [(Z_j b_{kh}) - (Z_k b_{jh})] \partial_h . \end{aligned}$$

Poiché per $h \leq r$ le b sono 0 o 1, la prima somma è nulla. Di conseguenza i commutatori delle Z non contengono $\partial_1 f \dots \partial_r f$. D'altra parte il sistema (6') è completo e quindi i commutatori delle Z sono del tipo $\sum_{i=1}^r \gamma^i Z_i f$ ossia del tipo $\sum_{i=1}^r \gamma^i \partial_i f + \sum_{i=1}^r \sum_{j=r+1}^n \gamma^i b_{ji} \partial_j f$.

L'assenza delle $\partial_1 f \dots \partial_r f$ implica allora che le γ^i siano tutte nulle. Si ha così

$$[Z_j Z_k] f = 0 \quad (j, k = 1 \dots r)$$

e cioè il sistema (6') è un sistema di Jacobi.

Si consideri allora, per es., la prima delle equazioni (6'): essa possiede (n. 4) $n-1$ soluzioni indipendenti: $f_i = \phi_i(x^1 \dots x^n)$ ($i=1 \dots n-1$).

Se si esegue un cambiamento di variabili che faccia passare dalle variabili $x^1 \dots x^n$ alle variabili $\phi^1 \dots \phi^{n-1} \phi^n$, (dove ϕ^n è una arbitraria funzione indipendente da $\phi^1 \dots \phi^{n-1}$) il sistema (6') si trasforma in un sistema equivalente (e quindi completo) del quale la prima equazione è

è $\frac{\partial f}{\partial \phi^n} = 0$. Risolvendo le restanti equazioni rispetto alle derivate

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{r+1}} \dots \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{n-1}}$ (\bar{f} è la trasformata di f sotto il cambiamento di

variabili $x \rightarrow \phi$) si ha infine un sistema del tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^{r+i}} + \sum_{h=1}^{n-r} C_{h,r+i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^h} = 0 \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial \phi^n} = 0 \end{array} \right. \quad i = 1 \dots n-r-1$$

Le prime $r-1$ equazioni di questo sistema costituiscono un sistema di $r-1$ equazioni nelle $n-1$ variabili $\phi^1 \dots \phi^{n-1}$. Si verifica immediatamente che questo sistema parziale è di Jacobi.

Col metodo usato per il sistema (6'), il sistema parziale può essere ridotto ad un sistema di $r-2$ equazioni in $n-2$ variabili, e questo sistema è anch'esso di Jacobi. Così procedendo si perviene infine ad un'unica equazione in $n-r+1$ variabili e questa equazione ha $n-r$ soluzioni indipendenti (n.4). Poiché questa equazione è equivalente al sistema (6') si conclude che questo possiede $n-r$ soluzioni indipendenti. In definitiva:

Un sistema completo di r equazioni in n variabili indipendenti possiede $n-r$ soluzioni indipendenti.