Vale quindi il seguente

Teorema III. Se il rango di $(\phi^{*}_{\alpha\beta})$ è $(r-a_1)-a$, il gruppo non commutativo G_r possiede a funzioni singolari non neutre, che ne determinano un sottogruppo di rango a.

§ 5. Estensione del gruppo.

E' noto (cfr. [2] pag. 286) dalla teoria dei gruppi di funzioni ordinari di ogni gruppo G_r non commutativo si può estendere ad un gruppo di rango equale al numero di variabili indipendenti e tale proprietà si conserva anche per i gruppi generalizzati con P.P.G. definita da una matrice $(\eta^{\alpha\beta}(\omega))$ ([3]) .

Nella letteratura però è trattato solo in caso in cui il numero di variabili indipendenti sia pari, e la matrice $(\eta^{\alpha\beta})$ è non singolare; in questo § si farà vedere che l'estensione di un gruppo generalizzato singolare di rango r si può ottenere indipendentemente dal fatto che n sia pari o dispari.

Consideriamo dunque il gruppo G_r definito come nei numeri precedenti, in esso è possibile (cfr. [2] pag. 285) determinare una base

$$\phi^{1},\ldots,\phi^{t+q},\ \psi_1,\ldots,\psi_t \qquad (2t+q = r)$$

tale che

$$(5.1) \qquad (\phi^{\mu}\ ,\ \phi^{\lambda})^{*} = 0\ ,\ (\psi_i,\psi_k)^{*} = 0\ ,\ (\phi^{\mu},\psi_k) = \delta^{\mu}_{k}$$

con
$$\mu,\lambda = 1,\ldots,\ t+q$$
$$i,k = 1,\ldots t$$

Dalle (5.1) risulta chiaro che le funzioni $\phi^{t+1}, \ldots, \phi^{t+q}$ sono funzioni appartenenti anche al gruppo reciproco di G_r, inoltre è :

$$q = a + a_1$$

con :

a_1 = numero di funzioni neutre di G_r

a = numero di funzioni singolari non neutre di G_r.

Inoltre è possibile (cfr. [2] pag. 286) aggiungere alle funzioni della base di G_r verificanti (5.1), a funzioni del reciproco in modo tale che le $r + a$ funzioni che si ottengono siano indipendenti, generino un gruppo di funzioni G_{r+a} di rango $(r+a)$ privo di funzioni singolari non neutre, e verifichino le (5.1) con $i,k = 1,\ldots,t+a$; in tal modo G_r risulta essere un sottogruppo di G_{r+a}.

Se poi consideriamo il reciproco di G_{r+a}, che è generato dalle soluzioni indipendenti del sistema completo

$$(5.2) \qquad \begin{cases} (\phi^{\mu}, f)^{*} = 0 & \mu = 1 \ldots t + q = t + a + a_1, \\ (\psi_i, f)^{*} = 0 & i = 1 \ldots t + a \end{cases}$$

e che ammette(1) $n - (2t + 2a) = n - (r + a - a_1)$ soluzioni indipendenti, è anch'esso privo di funzioni singolari non neutre, e quindi anche esso, come G_r e G_{r+a}, ha un numero pari di funzioni non neutre.

---

(1) Il sistema (5.2) è composto da $2t+a+q$ equazioni, ma a_1 di esse si riducono a delle identità.

Indicando questo numero con 2b, cioé ponendo

$$n - (2t + 2a) = n - (r + a - a_1) = 2b + a_1 + a_2$$

ed essendo (a_1+a_2) il numero totale di funzioni neutre, con i procedimenti indicati sopra è possibile scegliere una base in tale gruppo, diciamola

$$\bar{\phi}^1,\dots,\bar{\phi}^b,\bar{\phi}^{b+1},\dots,\bar{\phi}^{b+(a_1+a_2)},\ \bar{\psi}_1,\dots,\bar{\psi}_b$$

tale che

$$(5.3)\quad (\bar{\phi}^\rho, \bar{\phi}^\sigma) = 0\ ,\ (\bar{\psi}_\ell, \bar{\psi}_k) = 0\ ,\ (\bar{\phi}^\rho, \bar{\psi}_k) = \delta^\rho_k$$

$$\rho,\sigma = 1,\dots b+(a_1+a_2)$$
$$\ell,k = 1,\dots,b$$

A questo punto osserviamo che, se nella base di G_{r+a} prendiamo le a_1 funzioni neutre coindicenti con

$$\bar{\phi}^{b+1},\ \dots,\bar{\phi}^{b+a_1}$$

le $r + a$ funzioni che si ottengono verificano ancora le (5.1); inoltre, ponendo

$$\bar{\phi}^1 = \phi^{t+a+1},\dots,\ \bar{\phi}^t = \phi^{t+a+b} = \phi^{n_1}$$

$$\bar{\psi}_1 = \psi_{t+a+1},\dots,\ \bar{\psi}_b = \psi_{t+a+b} = \psi_{n_1}$$
$$\bar{\phi}^{b+1} = \phi^{n_1+1},\dots,\bar{\phi}^{b+a_1} = \phi^{n_1+a_1},\dots,\bar{\phi}^{b+a_1+a_2} = \phi^{n_1+(a_1+a_2)}$$

otteniamo n funzioni indipendenti, che verificano le condizioni (5.1) con

$$\lambda,\mu = 1 \ldots n_1 + (a_1+a_2)$$

$$i,k = 1 \ldots n_1 \quad .$$

In definitiva vale il seguente:

Teorema IV. Dato un gruppo di funzioni di n variabili, di rango r, e non commutativo, esiste sempre un gruppo di rango n di cui esso è un sottogruppo, in cui si può scegliere una base

$$\phi^1,\ldots,\phi^{n_1+(a_1+a_2)},\psi_1,\ldots,\psi_{n_1} \qquad (2n_1+ a_1+a_2 = n)$$

che verifica le condizioni:

$$(5.4) \quad \begin{cases} (\phi^\mu,\phi^\lambda)^* = 0 \\ (\psi_i,\psi_k)^* = 0 \\ (\phi^\mu,\psi_k)^* = \delta^\mu_k \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lambda,\mu = 1,\ldots,n_1+(a_1+a_2) \\ i,k = 1, \ldots,n_1 \ . \end{array}$$

§ 6. Base canonica in un gruppo di rango massimo.

E' noto (cfr. [3]) che la validità del teorema IV del § precedente nel caso dei gruppi generalizzati non singolari equivale all'esistenza, in un gruppo di rango massimo G_n, di una base $f^1,\ldots,f^n$ che verifichi le condizioni di canonicità (cfr. [4] pag. 414).

$$(6.1) \qquad (f^i,f^j)^*(\omega_1,\ldots,\omega_n) = \eta^{ij}(f^1,\ldots,f^n) \ .$$

Ci si chiede se è sempre possibile trovare una tale base anche in un gruppo