e che $1 - \left|\frac{b}{a}\right|^2 = \frac{1}{|a|^2} > 0$.

Viceversa, data la trasformazione di Moebius

$$\xi \longmapsto e^{i\theta}\frac{\xi - \xi_o}{1 - \bar{\xi}_o\xi} \quad \text{con} \quad \xi_o \in \Delta \quad \text{e} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

scegliendo a tale che $1 - |\xi_o|^2 = \frac{1}{|a|^2}$ e $\frac{a}{\bar{a}} = e^{i\theta}$, e $b = -\xi_o a$,

risulta

$$e^{i\theta}\frac{\xi - \xi_o}{1 - \bar{\xi}_o\xi} \equiv \frac{a\xi + b}{\bar{b}\xi + \bar{a}} \quad .$$

Dunque $\Phi(SU(1,1)) = \mathrm{Aut}(\Delta)$. In fine si verifica facilmente che Φ è un omomorfismo di gruppi e che $\mathrm{Ker}\,\Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ = centro di $SU(1.1)$.

§ 1.2. METRICA DI POINCARÉ NEL DISCO.

Proviamo intanto il

LEMMA DI SCHWARZ-PICK. *Per ogni* $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, *risulta*

$$1) \qquad \left| \frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{1 - \overline{f(\xi_1)}\, f(\xi_2)} \right| \le \left| \frac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2} \right| \quad \textit{per tutti gli } \xi_1, \xi_2 \in \Delta$$

Se $f \in Aut(\Delta)$ vale il segno di uguaglianza. Viceversa se vale il segno di uguaglianza in due punti $\xi_1 \neq \xi_2$ di Δ, è $f \in Aut(\Delta)$.

2) $$\frac{|f'(\xi)|}{1-|f(\xi)|^2} \leq \frac{1}{1-|\xi|^2} \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta.$$

Se $f \in Aut(\Delta)$ vale l'uguaglianza in ogni $\xi \in \Delta$.
Viceversa se vale l'uguaglianza in uno $\xi_0 \in \Delta$, è $f \in Aut(\Delta)$.

Dimostrazione. Data $f \in Hol(\Delta,\Delta)$, la $g \in Hol(\Delta,\Delta)$ definita dalla

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)-f(0)}{1-\overline{f(0)}\,f(\xi)}$$

verifica la $g(0) = 0$. Quindi per il lemma di Schwarz si ha:

$$|g(\xi)| = \left|\frac{f(\xi)-f(0)}{1-\overline{f(0)}\,f(\xi)}\right| \leq |\xi| \qquad \text{per ogni} \quad \xi \in \Delta, \quad (1.2.1)$$

Se vale l'uguaglianza per uno $\xi \neq 0$ è $g(\xi) = e^{i\theta}\xi$ per un opportuno $\theta \in \mathbb{R}$ e per tutti gli $\xi \in \Delta$, pertanto

$$f(\xi) = e^{i\theta}\,\frac{\xi + f(0)e^{-i\theta}}{1+\overline{f(0)e^{-i\theta}}\,\xi}$$

cioé f è una trasformazione di Moebius. Per completare la dimostrazione della 1) basta sostituire, nella (1.2.1), alla $f(\xi)$ la funzione definita dalla

$$f\left(\frac{\xi+\xi_1}{1+\bar{\xi}_1\xi}\right).$$

Proviamo la 2), applicando la 2) del lemma di Schwarz alla $g(\xi)$ si ha:

$$|g'(0)| \leq 1 \qquad \text{cioé} \qquad \frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2} \leq 1,$$ se vale l'uguaglianza g è una rotazione e quindi f una trasformazione di Moebius. Sostituendo

alla f la funzione definita dalla $f\left(\dfrac{\xi+\xi_1}{1+\bar{\xi}_1\xi}\right)$ si completa la dimostrazione della 2).

C.V.D.

<u>La metrica di Poincaré su Δ</u> è la metrica riemanniana espressa dalla

$$ds^2 = \frac{|d\xi|^2}{(1-|\xi|^2)^2} = g(\xi,\bar{\xi})\, d\xi d\bar{\xi} \quad .$$

La curvatura Gaussiana di tale metrica è costante ed è uguale a -4.

In generale, la curvatura Gaussiana della metrica $2h d\xi d\bar{\xi}$ è data da

$$-(1/h)\cdot(\partial^2 \log h/\partial\xi\partial\bar{\xi}) \quad .$$

<u>OSSERVAZIONE 2</u>. Dal lemma di Schwarz-Pick segue che gli automorfismi olomorfi sono isometrie per la metrica di Poincaré.

Indichiamo con

$$\langle x\rangle_\xi = \frac{|x|}{1-|\xi|^2} \qquad \text{per} \quad \xi\in\Delta \quad \text{e} \quad x\in\mathbb{C}$$

la lunghezza del vettore x, rispetto alla metrica di Poincaré, in ξ. La 2) del lemma di Schwarz-Pick diventa

$$\langle f'(\xi)\rangle_\xi \leq \langle 1\rangle_\xi \qquad \text{per ogni} \quad \xi\in\Delta \ ,$$

se vale l'uguaglianza in un punto $\xi\in\Delta$ si ha uguaglianza per ogni ξ, ed $f\in \mathrm{Aut}(\Delta)$.

<u>Distanza per la metrica di Poincaré</u>. Sia $\omega : \Delta\times\Delta \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la funzione distanza definita dalla metrica di Poincaré:

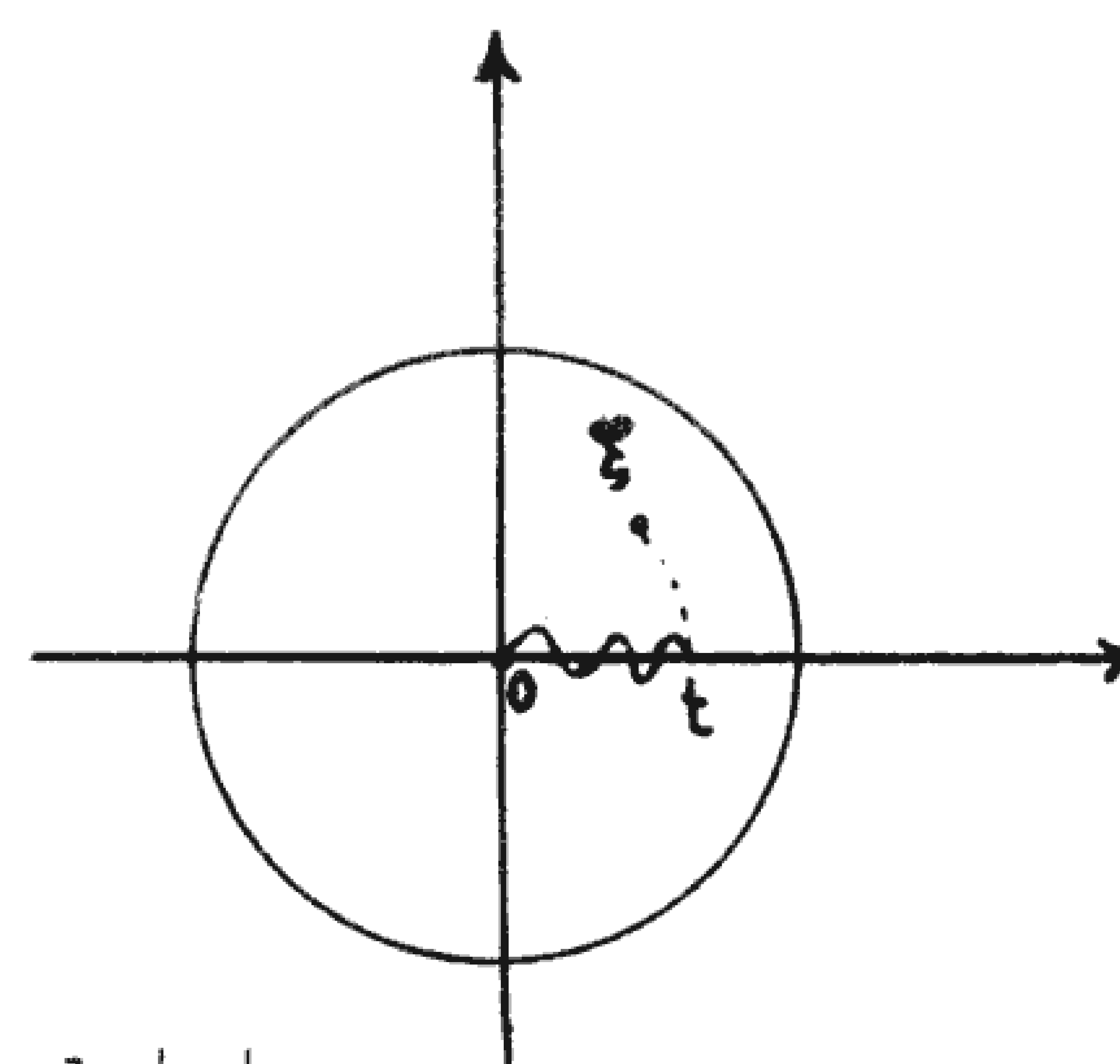
$$\omega(\xi_1,\xi_2) = \inf \int_a^b <\sigma'(t)>_{\sigma(t)} dt \qquad \text{per ogni} \quad \xi_1,\xi_2 \in \Delta ,$$

ove l'estremo inferiore è preso su tutte le curve $\sigma:[a,b] \to \Delta$ differenziabili a tratti che congiungono ξ_1 e ξ_2 in Δ .

Calcoliamo prima $\omega(0,t)$ con $t \in \mathbb{R}$,

chiaramente $$\omega(o,t) = \int_o^t \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t} .$$

Poiché ω è invariante per $\mathrm{Aut}(\Delta)$, risulta per $\xi \in \Delta$



$$\omega(0,\xi) = \omega(0,|\xi|) = \int_0^{|\xi|} \frac{ds}{1-s^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+|\xi|}{1-|\xi|} . \qquad (1.2.2)$$

Utilizzando ancora l'invarianza di ω rispetto a $\mathrm{Aut}(\Delta)$, calcoliamo $\omega(\xi_1,\xi_2)$ per $\xi_1,\xi_2 \in \Delta$.

Preso $f \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ tale che $f(\xi_1) = 0$, si ha

$$\omega(\xi_1,\xi_2) = \omega(0,f(\xi_2)) = \frac{1}{2} \log \frac{1+|f(\xi_2)|}{1-|f(\xi_2)|} = \frac{1}{2} \log \frac{1+\left|e^{i\theta} \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2}\right|}{1-\left|e^{i\theta} \dfrac{\xi_2 - \xi_1}{1 - \bar{\xi}_1 \xi_2}\right|}$$

$$= \frac{1}{2}\log \frac{1+\left|\dfrac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\,\xi_2}\right|}{1-\left|\dfrac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\xi_2}\right|} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}\left|\frac{\xi_2-\xi_1}{1-\bar{\xi}_1\,\xi_2}\right|^{2n+1}$$

Possiamo rienunciare il lemma di Schwarz-Pick, come segue:

$$\omega(f(\xi_1),f(\xi_2)) \leq \omega(\xi_1,\xi_2) \quad \forall f\in \mathrm{Hol}(\Delta,\Delta) \text{ e } \forall \xi_1,\xi_2\in\Delta, \qquad (1.2.3)$$

se $f\in \mathrm{Aut}(\Delta)$ vale l'uguaglianza. Se vale l'uguaglianza in due punti dustinti ξ_1 e ξ_2 di Δ è $f\in \mathrm{Aut}\,\Delta$.

OSSERVAZIONE 3 . Dalla (1.2.2) segue che le geodetiche della metrica di Poincaré passanti per il centro 0 di Δ sono tutti e soli i raggi del cerchio. Per conseguenza, dato un qualsiasi $\xi \in \Delta\setminus\{0\}$, esiste una ed una sola geodetica passante per 0 e per ξ. Quindi, in virtù dell'omogeneità di Δ, per due punti distinti qualsiasi di Δ passa una ed una sola geodetica della metrica di Poincaré. Tenuto conto che $\mathrm{Aut}(\Delta)$ è il gruppo delle trasformazioni di Möbius, un semplice calcolo conduce al seguente risultato.

Le geodetiche della metrica di Poincaré sono i diametri del cerchio Δ e le intersezioni di Δ con le circonferenze che incontrano ortogonalmente $\partial\Delta$.

NOTA. Per le nozioni precedenti rinviamo il lettore, ad esempio, a L. Bianchi [2] .