

#### § 4. IL PROBLEMA DEI 3 CORPI RISTRETTO.

Già Newton (nei Principia) si cimenta sul problema dei 3 corpi, in particolare nella teoria della Luna, ed ottiene ulteriori verifiche della teoria della gravitazione spiegando come perturbazioni prodotte dall'influenza del sole le principali "variazioni" dell'orbita della luna. Tuttavia la sua opinione in proposito era che il problema era difficile, tanto da dire ad Halley che il problema dei tre corpi "gli aveva fatto venire il mal di testa e lo aveva tenuto sveglio così spesso che non voleva pensarci più". Le difficoltà del problema sono (ancora oggi) di due nature. Primo, l'ordine del sistema di equazioni differenziali del problema dei tre corpi è molto elevato: in principio di ordine 18 (12 nel caso piano) e anche con un oculato uso degli integrali primi classici ("eliminazione dei nodi") non si può ridurre al di sotto dell'ordine 8 (6 nel caso piano): la struttura delle soluzioni e delle varietà invarianti in cui esse si stratificano è complicata perchè contiene le possibili complicazioni topologiche dei sottinsiemi di spazi euclidei di dimensione elevata, e i conti analitici contengono un gran numero di variabili. Secondo, il problema è difficile anche se se ne riduce la dimensionalità con un artificio: questo secondo fatto non fu però subito evidente. Vediamo dunque come si riduce il problema ad uno di ordine 4 .

Eulero (1772) per primo propose (per l'uso nella teoria della luna) di studiare il problema dei tre corpi "ristretto" cioè di supporre che due dei tre corpi ruotassero attorno al loro centro di massa in orbite

circolari e il terzo si muovesse nel campo di forze dei primi due, senza però reagire (in quanto di massa "trascurabile") sui primi due .

Supponiamo che  $P_1, P_2$  siano i corpi di massa  $1-\mu, \mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ) che ruotano su orbite circolari di raggi  $\mu, 1-\mu$  attorno al centro di massa, posto nell'origine, con velocità angolare 1 ( si sono "normalizzate" secondo l'uso degli astronomi e dei matematici, ma non dei fisici , tutte le unità di misura e anche la costante gravitazionale). Allora il terzo corpo "infinitesimo"  $P_3$  si muoverà sotto l'azione del potenziale

$$U = \frac{\mu}{|P_3 - P_2|} + \frac{1-\mu}{|P_3 - P_1|}$$

perciò si potrà descrivere il moto di  $P_3$  con un sistema hamiltoniano in cui però la hamiltoniana  $H'$  dipenderà dal tempo:

$$(18) \quad H' = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\mu}{[(x-(1-\mu)\cos t)^2 + (y-(1-\mu)\sin t)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1-\mu}{[(x+\mu \cos t)^2 + (y+\mu \sin t)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Con questo metodo (o meglio con la corrispondente formulazione "Lagrangiana" inventata da Eulero, e non con quella "Hamiltoniana" inventata da Lagrange) Eulero riduceva il problema a due soli gradi di libertà (nel piano) e perciò all'ordine 4 . Però la dipendenza di  $H'$  dal tempo rendeva le equazioni più complicate da trattare, ed Eulero la eliminò trasformando le equazioni in un sistema di coordinate rotante. In termini più moderni, supponiamo di usare nel problema definito dalla

hamiltoniana (18) al posto delle coordinate e momenti cartesiani  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  le *variabili di Delaunay*  $\ell, g, L, G$  (riferite sempre all'origine cioè al centro di massa di  $P_1$  e  $P_2$ ): avremo allora  $H' = H'(\ell, g, L, G, t)$ . Però se  $t \mapsto t + \varepsilon$ , i due corpi  $P_1$  e  $P_2$  ruotano di  $\varepsilon$  radianti attorno all'origine; se invece  $g \mapsto g + \varepsilon$ , con  $\ell, L, G$  fissi,  $P_3$  si troverà su di una "ellisse osculatrice" ruotata di  $\varepsilon$  attorno al fuoco (cioè l'origine) e nella stessa posizione su di essa (determinata da  $\ell$ ): perciò se  $\ell, L, G$  restano fisse e  $t, g$  aumentano della stessa quantità, il triangolo  $P_1 P_2 P_3$  ruota rigidamente, le distanze  $|P_3 - P_2|$  e  $|P_3 - P_1|$  restano costanti e perciò  $H'$  non varia. Allora  $H'$  si può in realtà scrivere come funzione di  $\ell, L, G$  e  $z = g - t$ :

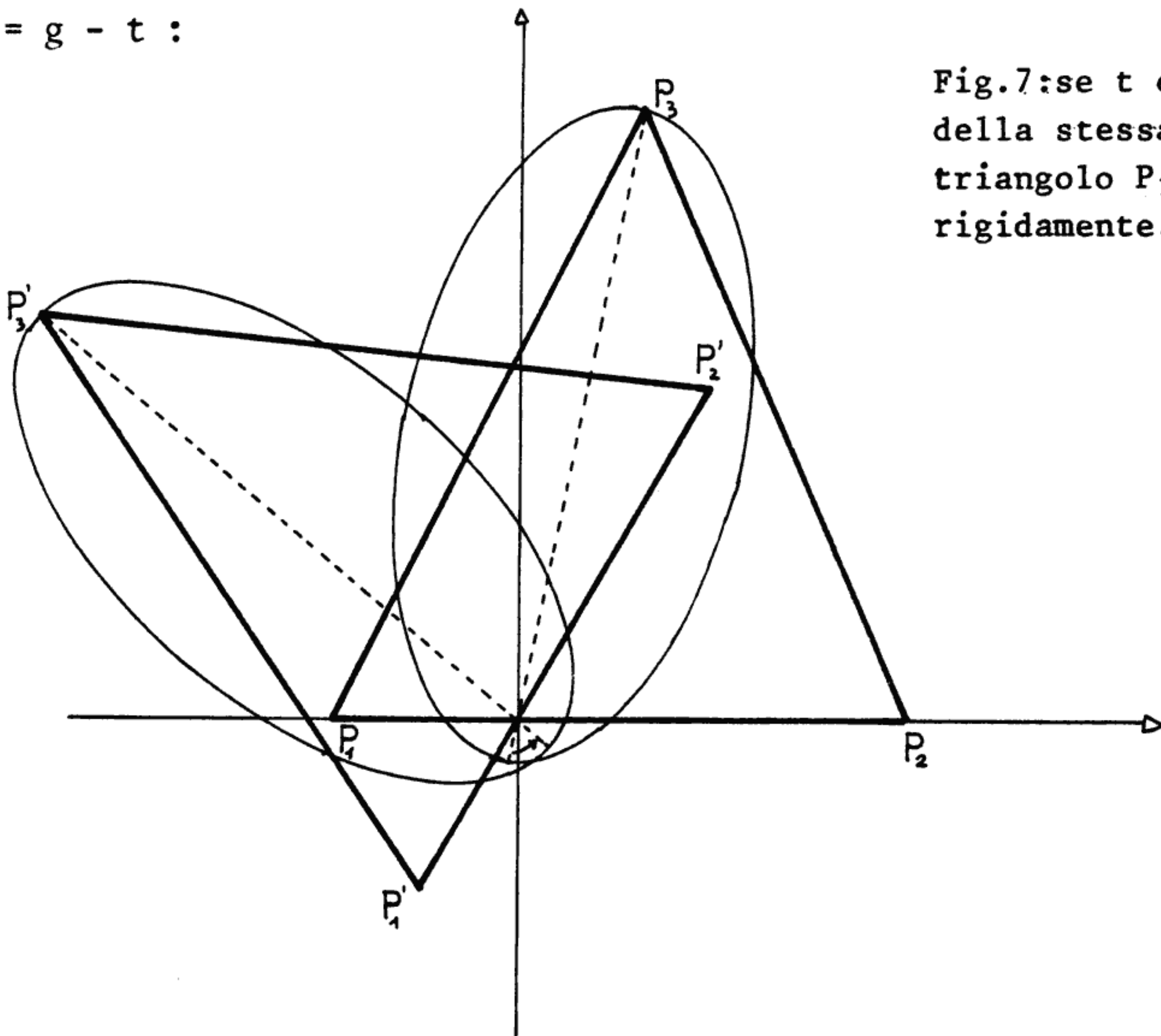


Fig.7: se  $t$  e  $g$  aumentano della stessa quantità, il triangolo  $P_1 P_2 P_3$  ruota rigidamente.

$$H' = H'(\ell, z, L, G) .$$

D'altro canto  $\dot{z} = \dot{g} - \dot{t} = \frac{\partial H'}{\partial G} - 1$  ; perciò se prendiamo una nuova hamiltoniana:

$$(19) \quad H = H'(\ell, z, L, G) - G$$

le equazioni di moto avranno forma hamiltoniana con hamiltoniana  $H$  indipendente dal tempo:

$$(20) \quad \dot{L} = - \frac{\partial H}{\partial \ell} \quad \dot{G} = - \frac{\partial H}{\partial z} \quad \dot{\ell} = \frac{\partial H}{\partial L} \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial G} = \frac{\partial H'}{\partial G} - 1 .$$

In particolare  $H = H' - G$  sarà un integrale primo indipendente dal tempo (*integrale di Jacobi*). Si noti che  $H$  non è l'energia, che è  $H'$  .

Il problema dei tre corpi ristretto definito dalle (20), (19), (18) si può trattare come un problema di *perturbazioni* del problema dei due corpi: ossia, essendo  $H$  funzione analitica anche di  $\mu$  (massa di  $P_2$ ), si può sviluppare in serie di potenze rispetto a  $\mu$  :

$$(21) \quad H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots$$

e il termine indipendente da  $\mu$ ,  $H_0$ , sarà la parte dell'Hamiltoniana corrispondente al problema dei due corpi;  $H_1$  è quello che generalmente si indica con il termine "*funzione perturbatrice*" (ed il simbolo  $-R$ ).

Però per  $\mu = 0$ ,  $H$  non si riduce alla solita funzione di Hamilton dei due corpi  $H_0 = E(L) = -\frac{1}{2L}$  perchè  $H = H' - G$  e quindi

$$(22) \quad H_0 = -\frac{1}{2L} - G = E - J$$

perciò le equazioni di Hamilton per  $\mu = 0$  sono:

$$(23) \quad \dot{\ell} = \frac{1}{L} = n \quad \dot{z} = -1 \quad \dot{L} = 0 \quad \dot{G} = 0 .$$

Le (23) presentano alcune conferme ed una sorpresa.  $L, G$  sono integrali primi per  $\mu = 0$ , ed  $\ell = n(t-t_0)$ . Però il numero di rotazione  $\frac{\omega_2}{\omega_1(L)} = -L^3 = -\frac{1}{n}$  non è zero, ed è razionale od irrazionale a seconda del valore di  $n$  (cioè di  $L$ ).

Allora dove sono sparite le *orbite periodiche* e la *degenerazione* del problema dei due corpi? Nelle variabili  $\ell, z, L, G$  non ci sono più (neppure per  $\mu = 0$ ): perchè un'orbita di  $P_3$  periodica nel sistema di riferimento fisso o "sidereo"  $(\ell, g, L, G)$  è periodica nel riferimento rotante "sinodico"  $(\ell, z, L, G)$  se e solo se dopo il tempo  $\frac{2\pi}{n} p$ ,  $P_3$  torna nella stessa posizione mentre anche  $P_1$  e  $P_2$  ritornano nella stessa posizione, cioè se è passato il tempo  $2\pi q$  ( $p, q$  interi); perciò le orbite periodiche ci sono solo per  $p - nq = 0$ . Queste orbite, periodiche nei due sistemi di riferimento, del problema con  $\mu = 0$ , si chiamano *orbite risonanti*. Perciò nel sistema  $(\ell, z, L, G)$  a tori pieni di orbite risonanti si mescolano inestricabilmente tori con frequenze indipendenti su cui il moto è ergodico.

*Nota:* l'importanza del "problema ristretto" fu di molto accresciuto dai lavori di Hill e di Poincaré nella seconda metà dell'800, con la scoperta di nuove soluzioni periodiche. La teoria delle perturbur

./.

*Nota:* bazioni, di cui parleremo nel prossimo paragrafo, fu in realtà sviluppata sul problema dei 3 corpi non ristretto (o anche degli  $n$  corpi,  $n > 3$ ); tuttavia per mettere in rilievo le difficoltà indipendenti dal gran numero di variabili applichiamo la teoria ad un "problema modello" come quello dei 3 corpi ristretto.

*Bibliografia:*

H. Poincaré *"Les Méthodes nouvelles de la mécanique celeste"* Vol. I  
Gauthiers-Villars, Paris 1892

F.R. Moulton *"An introduction to celestial mechanics"* Macmillan, London  
1902 .