(3.20) $$|F(u)| \leq g(|u|)$$

con $g(.)$, $f(.,y)$, $f(x,.)$ crescenti. In tal caso se $u,v \in B_Y(v_o,r)$ risulta

(3.21) $$||F(u)-F(v)|| \leq f(N,N)||u-v||$$

(3.22) $$||F(u)|| \leq g(N).$$

Posto allora $h(N) = \max\{f(N,N)\ ,\ g(N)/r\}$ e $p = M(\exp(bT)-1)/b\ h(N)$ risulta

$$||P(u)-P(v)|| \leq p\ ||u-v||$$
$$||P(u)-v_o|| \leq pr.$$

Ora se $h(N)$ come funzione di T è continua, poiché $p(T) \to 0$ se $T \to 0+$ e $p(T) \geq 0$ per $T \geq 0$, esisterà un T' tale che $p(T) < 1$ per $T \in]0,T']$.

La P è allora contrattiva su $B_Y(v_o,r)$ con $T = T'$ e si ha il seguente

TEOREMA (3). Se nel Teorema (2) alle ipotesi (3.1) e (3.2) si sostituiscono le ipotesi (3.19) e (3.20) con f, g ed h del tipo specificato sopra, si ha la stessa tesi.

4. ESEMPI

In [2] si studia il problema (1.1) con $u = u(x,v,w)$; $x \in \underline{R}$; $v,w \in [v_1,v_2]$

$$Au = -v\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{w-v}{\tau}u\right)$$

$$F(u) = q\{(J_1u)(J_2u)-uJ_3J_1u\}\ ;\quad q > 0 \quad \text{cost.}$$

$$J_1u = \int_{v_1}^{v_2} u(x,v,w)dw$$

$$J_2u = \int_v^{v_2} (v'-v)u(x,v',w)dv'$$

$$J_3u = \int_{v_1}^{v} (v-v')u(x,v',w)dv'$$

$$X = \{u \in U, C.B.(\underline{R}^2 x\ [v_1,v_2])\ ;\ u(x,v,w)= 0 \quad se \quad v \notin [v_1,v_2]\}$$

$$|u| = \sup\{|u(x,v,w)|\ ;\ (x,v,w)\ \ \underline{R}^2 x[v_1,v_2]\}.$$

Orbene si prova che A genera un gruppo $Z(t)$ tale che $|Z(t)| = \exp(t/\tau)$ e che vale la (3.1) e (3.2) con $k = q(v_2 - v_1)^3$.

Il problema (1.1) è equivalente al problema (2.7) perché F è derivabile secondo Frechét con derivata $F'_u v$ continua rispetto ad u.

Si è interessati, dato il significato fisico, alle soluzioni positive del problema (1.1), quando u_o è positiva.

Ora le ipotesi del Lemma (2) sono tutte verificate ad eccezione della (C'). Basta infatti prendere $u(x,v,w) = 1$ per avere

$$F(u) = (v_2 - v_1)^2(v_2+v_1-2v)/2 \notin Q$$

dove $$Q =\{u \in X;u(x,v,w) \geq 0 \quad per\ (x,v,w)\ e\ \underline{R}^2 x[v_1,v_2]^2\} .$$

Se però si prende

$$F_1(u) = q\{(J_1u)(J_2u) + (a-J_3J_1u)u\}$$

ed

$$a = (v_2 - v_1)^3/2\ (\exp(T/\tau)\ |u_o| +r) \tag{4.1}$$

risulta verificata la (D) ed anche la (3.17) e (3.18).

Per i dettagli si rimanda al lavoro citato, si noti solo che il valore di a dato dalla (4.1) viene determinato naturalmente imponendo che F_1 verifichi la (D). Infatti posto $C_r = B_\gamma(v_0,r)$, poiché se $u \in C_{rQ}$ risulta J_1u , $J_2u \in Q$, basterà imporre che sia $a - J_3J_1u \in Q$ cioé $J_3J_1u \leq a$.

Facendo i conti si ottiene

$$J_3J_1u \leq (V_2-v_1)^3/2 \ |u| \leq (v_2-v_1)^3/2 \ (\exp(T/\tau)|u_0|+ r)$$

essendo $|v_0(t)| = |Z(t)u_0| \leq \exp(t/\tau)|u_0|$.

In [7] si studia il sistema :$(t>0,|x| < L,|\mu| \leq 1)$

$$(4.2)\begin{cases} \dfrac{\partial n}{\partial t} = -\mu v \dfrac{\partial n}{\partial x} - v\Sigma(\tau)\ n + \dfrac{1}{2} v\cdot \gamma_1(\tau)\displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' + \lambda c(x;t) \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = -\lambda c + \dfrac{1}{2} v\ \gamma_2(\tau) \displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' \\ \dfrac{\partial \tau}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2} K(\tau) \displaystyle\int_{-1}^{1} n(x,\mu';t)d\mu' \end{cases}$$

con le condizioni al contorno

$$(4.3)\begin{cases} n(-L,u;t) = 0 & \mu \in (0,1] \\ n(L,u;t) = 0 & \mu \in [-1,0) \\ \tau(-L;t) = \tau(L;t) = \tau_r & \end{cases}$$

e le condizioni iniziali

$$(4.4)\quad n(x,\mu;0) = n_0(x,\mu)\ ;\ c(x;0) = c_0(x)\ ;\ \tau(x;0) = \tau_0(x)$$

dove $n = n(x,\mu;t)$; $c = c(x;t)$; $\tau = \tau(x;t)$; v,λ,D sono costanti positive

$K, \gamma_1, \gamma_2, \Sigma, \tau_r, n_o, c_o, \tau_o$ sono funzioni positive assegnate.

Posto

$$u_1(t) = n(x,\mu;t) \; ; \; u_2(t) = c(x;t); \; u_3(t) = \tau(x;t)-\tau_r \; ,$$

con ovvie notazioni, il sistema (4.2) (4.3) (4.4) diventa:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = B_1u_1(t) - a_1(u_3(t)u_1(t)+a_2(u_3(t))J_1u_1(t)+u_2(t) \\[2ex] \dfrac{du_2}{dt} = -\lambda u_2(t) + a_3(u_3(t))J_2u_1(t) \\[2ex] \dfrac{du_3}{dt} = B_3u_3(t) + a_4(u_3(t))J_2u_1(t) \\[2ex] u_1(0) = n_o \; ; \; u_2(0) = c_o \; ; \; u_3(0) = \tau_o - \tau_r \end{cases}$$

dove $u_i(t) \in X_i$ per $t \geq 0$ e X_i; sono gli spazi di Hilbert:

$$X_1 = L^2([-L,L] \times [-1,1]) \; ; \; X_2 = X_3 = L^2([-L,L]).$$

Le condizioni al contorno sono inglobate negli insiemi di definizione degli operatori B_1 e B_3 come segue

$$D(B_1) = \{f_1 \in X_1; \; \mu \frac{\partial f_1}{\partial x} \in X_1 \; , \; f_1(-L,\mu) = 0 \quad \text{per} \quad \mu \in (0,1],$$
$$f_1(L,\mu) = 0 \quad \text{per} \quad \mu \in [-1,0)\}$$

$$D(B_3) = \{f_3 \in X_3; \; f_3(-L) = f_3(L) = 0\}.$$

Sulle a_i, che si considerano funzioni da X_3 in $X_\infty = L^\infty([-L,L])$, si fanno le seguenti ipotesi:

(I1) $0 \leq a_i' \leq a_i(f_3(x)) \leq a_i'' < +\infty$ per $f_3 \in X_3$ e per $|x| \leq L$, con a_i', a_i'' costanti opportune e $i = 1, 2,3,4$;

(I2) $|a_i(f_3)-a_i(g_3)|_\infty \leq \bar{a}_i |f_3 - g_3|_3$ per $f_3, g_3 \in X_3$ ed $\bar{a}_i$ costanti positive;

(I3) Esiste $b_{if_3} = (da_i)/(df_3)$ (derivata di Frechét) per ogni $f_3 \in X_3$ ed appartiene a $\mathcal{B}(X_3, X_\infty)$ (cfr. [10] pag. 149)

(I4) per ogni $g_3 \in X_3$, $|b_{if_3} g_3 - b_{if_3'} g_3|_\infty \to 0$ se $|f_3 - f_3'|_3 \to 0$.

Posto $u = (u_1, u_2, u_3)$; $u_0 = (n_0, c_0, \tau_0 - \tau_r)$ il problema (4.5) si può sintetizzare col problema astratto (1.1) avendo posto

$$A = \begin{pmatrix} B_1, & 0, & 0 \\ 0, & -\lambda I, & 0 \\ 0, & 0, & B_3 \end{pmatrix} \qquad D(A) = D(B_1) \times X_2 \times D(B_3)$$

$$F(f) = \begin{pmatrix} -a_1(f_3)+a_2(f_3)J_1 f_1 + f_2 \\ a_3(f_3)J_2 f_1 \\ a_4(f_3)J_2 f_1 \end{pmatrix} \qquad D(F) = X = X_1 \times X_2 \times X_3$$

con prodotto scalare

$$(f,g) = (f_1, g_1)_1 + (f_2, g_2)_2 + \delta_0^2 (f_3, g_3)_3$$

dove $\delta_0^2 = D/K_0 L^2$ e K_0 è un fissato valore di K.

Si definisce poi

$$X_1^+ = \{f_1 \in X;\ f_1(x,\mu) \geq 0 \quad \text{q.o. su} \quad [-L,L]x[-1,1]\}$$

$$X_2^+ = \{f_2 \in X_2\ ;\ f_2(x) \geq 0 \quad \text{q.o. su} \quad [-L,L]\}$$

$$Q = \{u = (u_1,u_2,u_3)\ ;\ u_i \in X_i^+ \quad i = 1,2\}$$

$$A_1 f = Af - a_1'' f_1$$

$$F_1(f) = F(f) + a_1'' f_1$$

Orbene si prova che:

a) $A_1 \in \mathcal{G}(1,-z_0)$ con $z_0 = \min\{a_1''\ ,\ \lambda,\ D/2L^2\} \geq 0$

b) se $f \in Q$ allora $\exp(tA_1)f \in Q$

c) se $f \in Q$ allora $F_1(f) \in Q$.

Si prova inoltre che per F_1 vale la (30) con

$$f(|u|,|v|) = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2\ (|u|^2 + |v|^2))^{\frac{1}{2}}$$

e con α_1 ed α_2 costanti opportune. Poiché inoltre $F_1(0) = 0$, dalla (3.19) segue la (3.20) con $g(|u|) = f(|u|,\ 0)|u|$ .Queste ultime proprietà assicurano la stretta contrattività dell'operatore P_1(cfr. (2.20) su $B_\gamma(w_0,r)$. Si conclude che la soluzione del problema appartiene al cono Q.

Una maggiorazione "a priori" di $|u(t;u_0)|$ assicura poi l'esistenza globale della soluzione "mild" che si dimostra essere anche soluzione "forte".

Lecce, Aprile 1978