


CAPITOLO 6

GEOMETRIE DI TITS-BUEKENHOUT
(LA PROPRIETA' D'INTERSEZIONE)

Gli ultimi risultati del precedente capitolo danno l'impressione che la definizione di geometria, così come la si è fissata, sia già soddisfacentemente forte. Ma è presto visto che si tratta di un'impressione erronea. In realtà il risultato della (gd.2) (e quindi della (gd.3)) è reso possibile soprattutto dalla ricchezza dell'informazione racchiusa nel diagramma (L_n) . Ciò appare chiaro non appena si tenti di stabilire su geometrie di diagramma (C_n) un risultato analogo alla (gd.3). L'esempio della geometria costruita sul grafo completo su quattro punti, dato verso la fine del capitolo precedente, mostra che vi sono geometrie di diagramma (C_3)  che non sono spazi polari.

Ora basta poco per accorgersi che la definizione di geometria data nel Cap. 5 consente di denominare "geometria" troppe cose che ben poco hanno di geometrico, nel senso usuale del termine. (Non che questo sia un argomento risolutivo, ma ha la sua importanza). In particolare, un qualunque grafo bipartito connesso dà una geometria di rango 2. Un qualunque insieme di n elementi, con incidenza banale (ogni elemento è incidente ad ogni altro), è una geometria di rango n ; ha una sola camera: l'insieme stesso; i tipi sono gli elementi stessi (in [8] tale geometria viene detta *geometria unità*). In termini categoriali, è un oggetto finale.

Peraltro non sembra opportuno, allo stato attuale delle cose, modificare troppo la definizione. Intanto perché non è ancora del tutto chiaro quali rafforzamenti sia più giusto adottare (per un esame di alcune delle soluzioni più frequentemente proposte rimando a [1]). E poi perché sarebbe desiderabile rinvenire un sistema di definizioni chiuso per costruzioni importanti e, magari, tale da individuare una categoria interessante. E può essere che a questo scopo si rendano necessarie definizioni più deboli di quelle che l'intuizione concederebbe. Ma quel che sappiamo qui è ancora troppo poco per permetterci conclusioni. Qualche risultato c'è, ma si è solo agli inizi.

Nota - La definizione di *struttura di incidenza* adottata da Buekenhout in [7], includendo la Proprietà di Intersezione, è più restrittiva di quella data qui, e, quindi,

di quelle date dallo stesso Buekenhout in [8] e da Tits in [28].

Dunque, pur tenendo ferma la definizione di geometria, passiamo brevemente in rassegna alcune proprietà che, qualora siano imposte sulle nostre geometrie, le riavvicinano a ciò che si è soliti qualificare come 'geometrico'. Intanto: la definizione di geometria non impedisce che una geometria di rango 2 abbia un solo punto o una sola retta. Possiamo evitare ciò assumendo che ogni bandiera di corango 1 sia inclusa in almeno due camere. Una geometria dove ciò accada verrà detta *ferma* (cfr. "The Basic Diagram of a Geometry").

Nota - La fermezza entrava nella definizione di struttura di incidenza in [7], già nel primo assioma. Ad ogni modo, le usuali marche per diagrammi implicano che le geometrie per cui possono venire impiegate siano ferme.

Potremo poi sperare di evitare un po' di patologie assumendo qualche proprietà suggerita dalla considerazione delle geometrie di chiusura.

Sia i un tipo. Rammento che la i -ombra $\sigma_i(F)$ di una bandiera F è l'insieme delle i -varietà incidenti ad F (cfr. Cap. 5, dimostrazione della (gd.2)). Noto che $\sigma_i(\emptyset)$ è l'insieme V_i delle i -varietà. Convenuto di annoverare tra le i -ombre anche il \emptyset , potremmo allora considerare la proprietà:

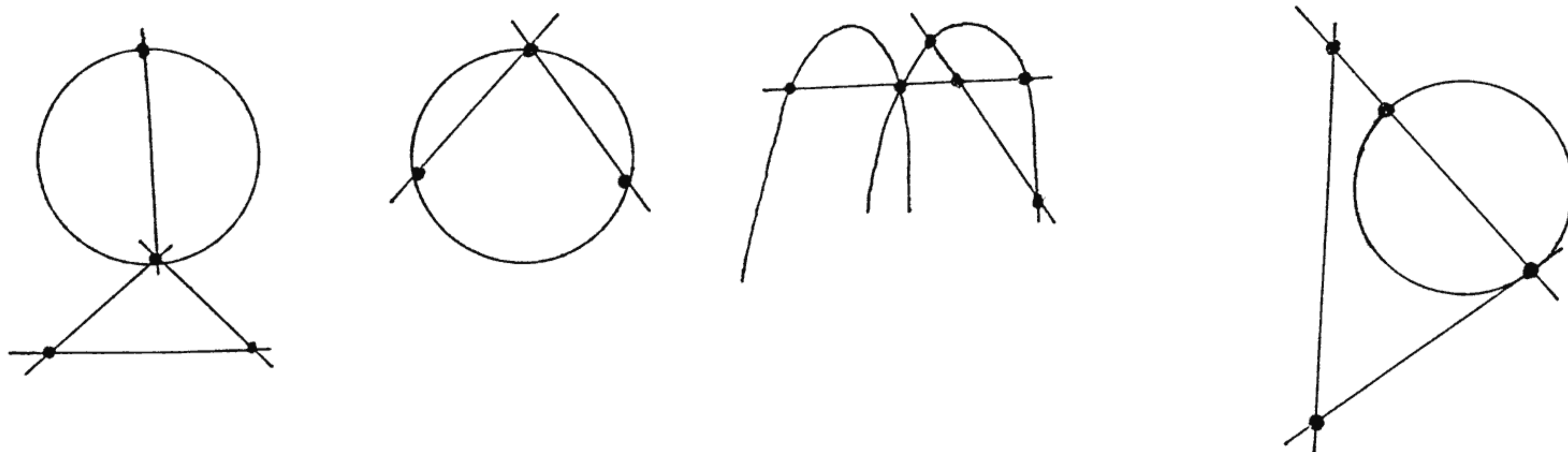
(IP.1) (Cfr. proprietà (Int') in [28]).

Per ogni tipo i l'intersezione definisce un semireticolo completo sull'insieme delle i -ombre. (Sicché: vi resta definito un reticolo completo e atomico).

Nota - In [8] e nell'articolo di Tits [27], si considera una proprietà più debole della (IP.1), indicata con (GL), o Condizione di Linearità. Si ottiene dalla (IP.1) depennando la richiesta che il semireticolo definito da \cap sia completo.

E' presto visto che la (IP.1) cade sui due ultimi esempi del Cap. 5. Nondimeno, essa permette ancora una vasta patologia. Dò alcuni esempi, tutti di rango 2.

Si assumano come 1-varietà le linee e come 0-varietà i punti, in ciascuna delle seguenti figure. Le incidenze sono stabilite nel modo ovvio. La (IP.1) cade su ciascuna delle quattro geometrie così ottenute.



Di esempi di questo genere se ne possono produrre a volontà. E' ovvio che punti, rette, cerchi, ... qui sono niente più che un mezzo espressivo. Per esempio, la seconda di queste quattro geometrie può anche essere così rappresentata: le varietà sono i numeri 2,3,7,6,21 e 42, di tipo 0 o 1 a seconda che siano o no primi. L'incidenza è: il dividere.

Un altro esempio. Sia N l'insieme dei numeri naturali ed N^- l'insieme degli interi negativi. Assumiamo i naturali come 0-varietà e gli interi negativi come 1-varietà. Definiamo un'incidenza I mediante la clausola: sia $x \in N$ ed $y \in N^-$; è xIy se $x \leq -y$. Si ottiene una geometria (ferma) su cui vale (IP.1).

La cosa più fastidiosa in questi esempi è che, pur senza essere digoni generalizzati, vi capita che due 'rette' distinte abbiano più 'punti' in comune.

Si tratta di trovare dunque una proprietà più forte della (Int'). Una soluzione ci viene ancora una volta dalla teoria degli edifici generalizzati. Si dimostra (cfr. [26] , Cap. 12) che *in un edificio generalizzato vale la seguente proprietà:*

(IP.2) Sia i un tipo in una geometria Γ . Siano F una bandiera ed x una varietà di Γ , e sia $\sigma_i(F) \cap \sigma_i(x) \neq \emptyset$. Allora esiste una bandiera G in cidente ad F ed x e tale che $\sigma_i(G) = \sigma_i(F) \cap \sigma_i(x)$. Lo stesso vale sul residuo di ogni bandiera di Γ .

La (IP.2) è l'Assioma (3) in [7], ed è chiamata *Proprietà d'Intersezione* in [8]. In [28] compare una versione più debole di (IP), indicata con (Int). Si può provare che la (IP.2) equivale a:

(IP.2') Per ogni tipo i , e per ogni insieme $\{F_j | j \in J\}$ di bandiere, se $\bigcap_{j \in J} \sigma_i(F_j) \neq \emptyset$ allora esiste una bandiera F incidente a ciascuna delle F_j ($j \in J$) e tale che $\sigma_i(F) = \left(\bigcap_{j \in J} \sigma_i(F_j) \right)$.

(Rimando per una dimostrazione a [1], Proposizione 3 e condizione (S)). La (IP.2) è falsa sugli esempi precedenti. Sicché, per l'equivalenza di (IP.2) ed (IP.2') si trasporta ai residui.

Siccome la denominazione "geometrie lineari" è talvolta impiegata per designare geometrie verificanti la (IP.1) (o qualche sua versione debole) useremo qui la dizione *geometrie strettamente lineari* per designare le geometrie ferme verificanti la (IP.2) (equivalentemente: la (IP.2')). La definizione trova una sua plausibilità nel seguente risultato:

(gd.5) Le geometrie strettamente lineari di rango 2 sono i digoni generalizzati e gli spazi parziali lineari.

(Rimando per la dimostrazione a [8]; osservo che la dimostrazione usa in modo essenziale l'ipotesi di fermezza).

La (gd.5) garantisce che la stretta linearità ci evita gravi patologie sulle geometrie di rango 2. Si ha, poi:

(gd.6) Sia Γ una geometria strettamente lineare e i, j due tipi di Γ . Se v'è una j -varietà incidente a tutte le i -varietà, allora i e j appartengono a due distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma)$.

(Rimando per la dimostrazione a [21]). La (gd.6) fornisce la reciproca della (gd.1). La (IP.2) ha ancora altre conseguenze notevoli. Dato un tipo i , una bandiera F si dirà *i -ridotta* se per ogni sottobandiera propria G di F risulta $\sigma_i(G) \neq \sigma_i(F)$ (si osservi che è, in ogni caso, $\sigma_i(G) \supseteq \sigma_i(F)$ per ogni sottobandiera G di una bandiera F). Una sottobandiera i -ridotta \bar{F} di una bandiera F si dirà una *i -riduzione* di F se è $\sigma_i(\bar{F}) = \sigma_i(F)$.

Si ha:

(gd.7) Sia Γ una geometria strettamente lineare ed i un tipo di Γ . Due bandiere i -ridotte di Γ coincidono se hanno la stessa i -ombra. (Sicché) ogni bandiera di Γ ha un'unica i -riduzione. Date poi due bandiere F e G con F i -ridotta, è FIG se $\sigma_i(F) \subseteq \sigma_i(G)$.

(Rimando per la dimostrazione a [21]). La (gd.7) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le i -ombre e le bandiere i -ridotte. Non permette ancora, però, di ricostruire le inclusioni tra i -ombre dalle incidenze tra bandiere o, viceversa, tutte le incidenze tra bandiere (i -ridotte) dalle inclusioni tra le i -ombre.

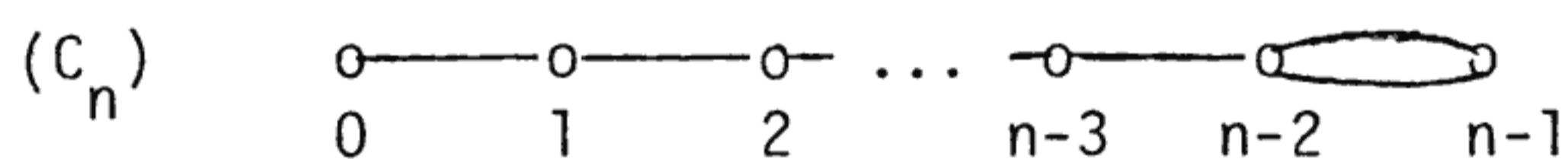
Possiamo ora dare il teorema di caratterizzazione degli edifici generalizzati di diagramma di tipo sferico (diverso da (H_3) ed (H_4)).

(gd.8) *Gli edifici generalizzati di diagramma \mathfrak{D} (con $\mathfrak{D} = (A_n), (C_n), (D_n), (E_6), (E_7), (E_8), (F_4)$) sono le geometrie strettamente lineari di diagramma \mathfrak{D} .*

Sappiamo già che gli edifici generalizzati sono geometrie strettamente lineari. La dimostrazione che le geometrie strettamente lineari nei diagrammi sopra elencati sono edifici generalizzati è assai complessa. Rimando per essa a [28]. Qui mi limiterò a provare per via diretta alcune asserzioni più limitate. Rammento intanto che la parte della (gd.8) concernente (A_n) è già stata provata direttamente (cfr. (gd.3) e (gd.4)).

Proverò ora che:

(gd.9) Le geometrie strettamente lineari di diagramma:



sono gli spazi polari di rango n .

(Da ciò segue subito la parte della (gd.8) concernente (C_n)). Sappiamo già che gli spazi polari sono geometrie strettamente lineari. Proviamo il viceversa. La dimostrazione è per induzione su n . Se $n=2$ non v'è nulla da provare. Sia $n > 2$. Sia $\Gamma = (V, I, t)$ una geometria strettamente lineare di diagramma (C_n) .

Come nella dimostrazione della (gd.2), chiamiamo punti le 0-varietà e rette le 1-varietà. Chiamiamo le (n-1)-varietà sottospazi massimali. La (gd.6) mostra che tutte le varietà sono 0-ridotte (si rammenti che \emptyset è l'unica sottobandiera propria (del singoletto) di una varietà). Sicché, per la (gd.6), due varietà coincidono se hanno la stessa 0-ombra. Ciò ci autorizza ad identificare le varietà con le loro 0-ombre. Inoltre:

i) Per ogni $j \leq n-2$, due j -varietà distinte sono incidenti ad al più una stessa $(j+1)$ -varietà.

Infatti, per assurdo, siano x, y due distinte j -varietà, ed u, v due distinte $(j+1)$ -varietà incidenti sia ad x che ad y . Per la (IP.2), esiste una bandiera F incidente sia ad u che a v e tale che $\sigma_j(F) = \sigma_j(u) \cap \sigma_j(v)$. Per la (t.3), si ha che $\{j, j+1\} \cap t(F) = \emptyset$ (perché $u \neq v$ e $x \neq y$). Del resto, u e v non sono j -ridotte nel residuo Γ_F di F . Sicché, per la (gd.6), j e $j+1$ appartengono a distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma_F)$. Il ché è impossibile, qui. E l'assurdo è raggiunto.

ii) Date due varietà x, y risulta $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ se e solo se xIy e $t(x) \leq t(y)$. Il "se" è ovvio (basta passare al residuo di x , se $t(x) \neq 0$; se invece $t(x) = 0$, è, banalmente, $\sigma_0(x) = \{x\}$). Proviamo il "solo se". Siccome le varietà sono 0-ridotte, la (gd.7) mostra che se $\sigma_0(x) \subseteq \sigma_0(y)$ allora xIy . Se $t(x) \neq t(y)$, e $0 \neq t(x)$, si passi al residuo Γ_x di x . In Γ_x la varietà y non è 0-ridotta. Sicché, per la (gd.6), 0 e $t(y)$ appartengono a due distinte componenti connesse di $\Delta(\Gamma_x)$. Ma qui ciò può essere solo se $t(x) < t(y)$.

iii) Identificate le varietà con le loro 0-ombre, chiamamole sottospazi. Si ha allora che una retta è inclusa in un sottospazio se lo interseca in due punti distinti (ovvio il senso di queste locuzioni).

Siano infatti x, x' due punti distinti, y una retta e z un sottospazio tali che $zIxIyIx'Iz$. Per la (IP.2), esiste una bandiera F con $zIFIy$ e $\sigma_0(F) = \sigma_0(z) \cap \sigma_0(y)$. Siccome $x \neq x'$, è $0 \notin t(F)$. Se $1 \in t(F)$ si ha yeF , per la (t.3). E da ciò yIz perché FIz . Sia invece $1 \notin t(F)$. Passiamo al residuo di F .

La varietà y non è 0-ridotta in Γ_F . Sicché, per la (gd.6), deve essere qui $0 < i < t(y) = 1$ per qualche $i \in \text{iet}(F)$: assurdo.

Completiamo ora l'identificazione di varietà e 0-ombre. Sappiamo già che varietà di Γ sono 0-ridotte. Viceversa, sia F una bandiera non vuota 0-ridotta di Γ . La forma di (C_n) e la (gd.1) mostrano che F è una varietà. Sicché le varietà sono le bandiere non vuote 0-ridotte, e la (gd.7) mostra che possiamo identificare le 0-ombre, che siano diverse dall'insieme V_0 di tutte le 0-varietà, con le varietà di Γ . Date due varietà u e v , se è $\sigma_0(u) \cap \sigma_0(v) \neq \emptyset$, indichiamo con $u \wedge v$ la varietà w tale che $\sigma_0(w) = \sigma_0(u) \cap \sigma_0(v)$ (esistenza ed unicità di w seguono subito da (IP.2), (gd.7) e da quanto ora visto). La varietà $u \wedge v$ può anche essere caratterizzata, per la ii), come la varietà w di tipo massimo tra quelle che sono incidenti ad u e v ed hanno tipo non superiore a $t(u)$ e $t(v)$. Inoltre, posto che esista una varietà x tale che $\sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v)$, definiamo $u \vee v$ uguale alla varietà w tale che $\sigma_0(w) = \cap(\sigma_0(x) \mid \sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v))$. Esistenza ed unicità di w seguono come per $u \wedge v$ (occorrerà però sfruttare la formulazione (IP.2') di (IP.2)). È possibile per ii), dare di $u \vee v$ una caratterizzazione simile a quella data sopra per $u \wedge v$. Introduciamo infine due simboli convenzionali $*_0$ e $*_I$, e poniamo $u \wedge v = *_0$ se $\sigma_0(u) \cap \sigma_0(v) = \emptyset$ e $u \vee v = *_I$ se non esiste alcuna varietà x tale che $\sigma_0(x) \supseteq \sigma_0(u) \cup \sigma_0(v)$ (a rigore, si può assumere al posto di $*_I$ la bandiera \emptyset). Estendiamo poi la funzione di tipo t ai due simboli $*_0$ e $*_I$, ponendo $t(*_0) = -1$ e $t(*_I) = n$. In definitiva: si è ricopiato sulle varietà il reticolo delle 0-ombre. Ciò ci autorizza nel seguito ad usare i termini "varietà", "0-ombra" con una certa libertà, sostituendoli spesso entrambi col termine "sottospazio".

Possiamo ora passare alla verifica delle (P.1)-(P.4) (Cfr. Cap. I, Esempio 2)). L'assioma (P.1) segue dalla (gd.3). L'assioma (P.4) segue immediatamente da (IP.2'). Per provare (P.2) occorrono alcuni preliminari.

Sia (x_0, x_1, x_2) una terna di punti distinti e (y_0, y_1, y_2) una terna di sottospazi massimali, tali che $x_0 I y_0 I x_1 I y_1 I x_2 I y_2$. Passando al residuo di y_1 in Γ , dalla (gd.3) si ha che x_1 e x_2 sono allineati. Sia dunque z la retta di

Γ per x_1 e x_2 (unica per la ii). Passiamo al residuo di x_2 . Esiste un sottospazio massimale y' di Γ incidente a z e tale che y' e y_2 si intersecano su un sottospazio di Γ di tipo $n-2$ (infatti: la (P.2) vale su Γ_{x_2} , per ipotesi induttiva; noto che questo è il primo punto della dimostrazione in cui interviene l'ipotesi induttiva). Per la (gd.1) applicata al residuo di z si ha poi che (la 0-ombra di) z è inclusa nella (0-ombra di) y' . Sicché $x_1 I y'$. Similmente, possiamo trovare un sottospazio massimale y'' nel residuo di x_1 tale che y_0 ed y'' si intersechino su un sottospazio di tipo $n-2$ e sia $x_0 I y''$. Applicando ora la (gd.3) al residuo di y' si ottiene $t(y' \wedge y'') + t(y' \wedge y_2) = t((y' \wedge y'') \vee (y' \wedge y_2)) + t(y' \wedge y'' \wedge y_2)$. Si ha dunque $2t(y_2) = t(y_2) + t(y' \wedge y'' \wedge y_2) + 2$. Da cui $t(y' \wedge y'' \wedge y_2) = t(y_2) - 2$. Ma è $t(y_2) - 2 \geq 0$, perché $n > 2$. Sicché $y' \wedge y'' \wedge y_2 \neq *_0$. Pertanto c'è un punto x incidente a y', y'' e y_2 . Inoltre è $x_0 I y''$. Sicché possiamo sostituire alla concatenazione $x_0 I y_0 I x_1 I y_1 I x_2 I y_2$ da x_0 a y_2 una più breve concatenazione $x_0 I y'' I x I y_2$.

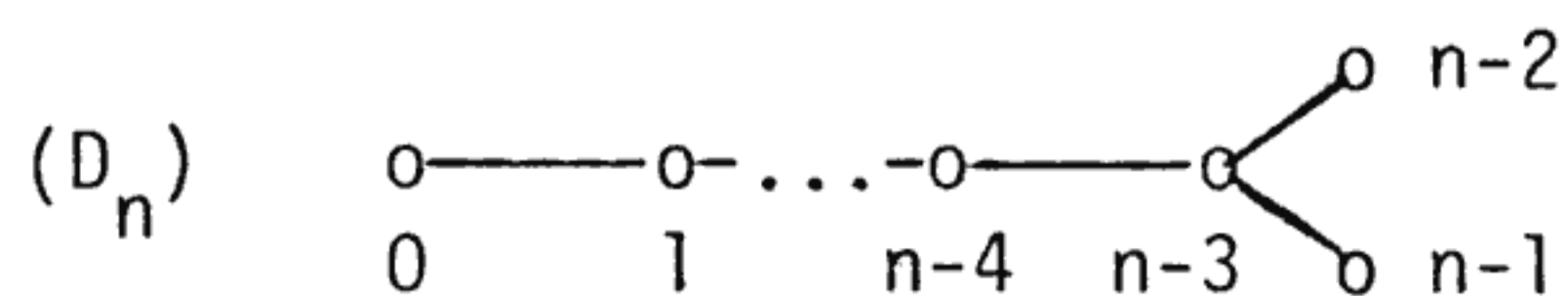
Siano ora x un punto ed y un sottospazio massimale, con x non incidente ad y . Per la (t.5) e per quanto visto ora, esistono un punto x' ed un sottospazio massimale y' tali che $x I y' I x' I y$. Per ipotesi induttiva sul residuo di x' , c'è un sottospazio massimale y'' tale che $x I y'' I x'$ e $t(y'' \wedge y) = n-2$ (occorre sfruttare il fatto che x e x' sono allineati nel residuo di y' , per la (gd.3)). Se ora z fosse un altro sottospazio massimale con le stesse proprietà di y'' , passando al residuo di y e applicando la (gd. 3) e rammentando che $n \geq 3$, avremmo che $y'' \wedge y$ e $z \wedge y$ hanno in comune almeno un punto x'' . Passando ora al residuo di x'' e applicando l'ipotesi induttiva dobbiamo concludere che $z = y''$. In definitiva: la (P.2) è provata.

Verifichiamo infine la (P.3). Per assurdo, sia falsa. Sia z una varietà di tipo $n-2$ e siano y_1 ed y_2 sottospazi massimali tali che $y_1 \wedge y_2 = z$ (l'esistenza di y_1 e y_2 segue dal fatto che Γ è ferma). Sia $x \in \sigma_0(y_2) - \sigma_0(z)$. Per ipotesi induttiva sul residuo di x , c'è un sottospazio massimale y_3 tale che $x I y_3$ e $\sigma_1(x) \cap \sigma_1(y_2) \cap \sigma_1(y_3) = \emptyset$ (si applichi la (p.2) al residuo di x).

Sicché, per motivi ormai ovvi, deve essere $\{x\} = \sigma_0(y_2) \cap \sigma_0(y_3)$. Ma $\sigma_0(y_1) \cap \sigma_0(y_3) \neq \emptyset$, perché la (P.3) è supposta falsa su Γ . Se risulta $t(y_3 \wedge y_1) \geq 1$, allora $\sigma_0(y_3 \wedge y_1)$ interseca $\sigma_0(z)$ (infatti: si passi al residuo di y_1 , si applichi la (gd.3), e si tenga conto del fatto che z è un iperpiano, nel residuo di y_1). D'altronde è $z = y_1 \wedge y_2$. Sicché i punti comuni a $\sigma_0(y_3 \wedge y_1)$ e a $\sigma_0(z)$ sono quelli in $\sigma_0(y_3 \wedge y_1 \wedge y_2)$. Ma si è visto che x è l'unico punto in $\sigma_0(y_3 \wedge y_2)$. Sicché risulta $x \in \sigma_0(z)$. Il che contraddice le ipotesi assunte su x . Allora si deve concludere che $y_3 \wedge y_1$ è un punto. Sia ora $\pi_{y_3}(z)$ la proiezione del sottospazio z su y_3 (cfr. la (p.1) del cap. I; si noti che la (p.1) discende dalle (P.1), (P.2) e (P.4), senza alcun uso della (P.3). Rimando per ciò al cap. VII di [26]. Per l'appunto, qui sappiamo già che le (P.1), (P.2) e (P.4) valgono su Γ). E' allora $(x \vee (y_3 \wedge y_1)) \cap (z \vee \pi_{y_3}(z))$. Infatti x è un punto di $\pi_{y_3}(z)$, perché x è collineare con z (in quanto $x \in \sigma_0(y_2) \supseteq \sigma_0(z)$, e il residuo di y_2 è una geometria proiettiva per (gd.3) e z è ivi un iperpiano) ed è poi $x \in \sigma_0(y_3)$. Il punto $y_3 \wedge y_1$ è collineare con z per gli stessi motivi (si sostituisca y_1 ad y_2) e ovviamente appartiene a y_3 . Sicché anche $y_3 \wedge y_1$ sta in $\pi_{y_3}(z)$. Per ragioni ormai ovvie, dunque, tutta la retta $x \vee (y_3 \wedge y_1)$ sta in $\pi_{y_3}(z)$. Passiamo ora al residuo di $z \vee \pi_{y_3}(z)$. Esso è una geometria proiettiva di dimensione $n-1$, per la (gd.3) e perché $z \vee \pi_{y_3}(z)$ ha tipo $n-1$ per la (p.1). Rammentando che z , avendo tipo $n-2$, è in tale geometria un iperpiano; si ha così che in tale geometria la retta $x \vee (y_3 \wedge y_1)$ interseca l'iperpiano z . Da ciò, e siccome $\sigma_0(x \vee (y_3 \wedge y_1)) \subseteq \sigma_0(y_3)$ si ha che $\sigma_0(y_3) \cap \sigma_0(z) \neq \emptyset$. Ma, siccome $z = y_1 \wedge y_2$, si ha $\sigma_0(y_3) \cap \sigma_0(z) = \sigma_0(y_3 \wedge y_2 \wedge y_1)$. Ed ora, come sopra, si ottiene $x \in \sigma_0(z)$. Assurdo. La (P.3) è provata.

La dimostrazione è conclusa.

(gd.10) Le geometrie strettamente lineari di diagramma



sono i complessi orifiamma di spazi polari fini.

(Da ciò segue la parte della (gd.8) che riguarda (D_n)). Sappiamo già che i complessi orifiamma di spazi polari fini sono geometrie strettamente lineari, poiché sono edifici generalizzati. Viceversa, sia Γ una geometria strettamente lineare di diagramma (D_n) . Nulla vieta di applicare a Γ la stessa costruzione con cui si è prodotto lo spazio polare fine $\mathfrak{P}(\mathcal{O})$ associato ad un edificio generalizzato \mathcal{O} di diagramma (D_n) (cfr. Cap. IV, parte iniziale). Tale costruzione applicata a Γ produce una geometria $\mathfrak{P}(\Gamma)$, strettamente lineare, di diagramma (C_n) (che $\mathfrak{P}(\Gamma)$ abbia diagramma (C_n) si vede facilmente; occorre invece un pò di pazienza per provare che $\mathfrak{P}(\Gamma)$ è una geometria strettamente lineare; ad ogni modo la cosa può anche ottenersi da un risultato più generale, per il quale rimando alla (gd.18) del prossimo Capitolo 7). A questo punto basta applicare la (gd.9), e invertire la costruzione: si ottiene il complesso orifiamma $\mathcal{O}(\mathfrak{P}(\Gamma))$ dello spazio polare (fine) $\mathfrak{P}(\Gamma)$. Ed è immediato vedere che $\Gamma \cong \mathcal{O}(\mathfrak{P}(\Gamma))$.

Dalla (gd.9) e (gd.10) si ottiene subito che:

(gd.11) (Cfr. Cap. 4, (b.10)). Gli edifici generalizzati di diagramma (C_n) sono gli spazi polari. Gli edifici generalizzati di diagramma (D_n) sono i complessi orifiamma di spazi polari fini.

(Rimando a [26], Cap. 7, per dimostrazioni dirette. Ma non si discostano molto da quelle date qui. E' evidente che le dimostrazioni date in [26] includono specializzazioni della dimostrazione che un edificio generalizzato è una geometria strettamente lineare, data per il caso generale nel Cap. 12 di [26]).

Chiudo questo capitolo tornando ai diagrammi (L_n) . Dalla (gd.2) si ha subito che:

(gd.12) Tutte le geometrie di diagramma:

$$(L_n) \quad \begin{array}{ccccccc} & & L & & L & & \dots & & L & & \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-2 & & n-1 & & \end{array}$$

sono strettamente lineari.

Per la (gd.2), basta verificare che le geometrie di chiusura sono strettamen

te lineari. E la cosa si ottiene con facili (ma noiose) verifiche.

Aggiungo due risultati, che rappresentano generalizzazioni della (gd.12) e della (gd.9).

(gd.13) Le geometrie di diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & L & & L & & \dots & & L & & \pi & \\ o & \text{---} & o & \text{---} & o & \dots & o & \text{---} & o & \text{---} & o \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-3 & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

sono strettamente lineari se e solo se, per ogni scelta di i con $0 \leq i < n-1$, non esistono quattro varietà a due a due distinte, x, x', y, y' , con $t(x) = t(x') = i$ e $t(y) = t(y') = i+1$, tali che $xIyIx'Iy'Ix$.

(gd.14) Le geometrie di diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & \pi & & \pi & & \dots & & \pi & & \\ o & \text{---} & o & \text{---} & o & \dots & o & \text{---} & o & \\ 0 & & 1 & & 2 & & n-2 & & n-1 \end{array}$$

sono strettamente lineari se l'enunciato della (IL-2) vale rispetto al tipo 0.

(Ometto le dimostrazioni. Avverto solo che possono ottenersi sulla falsariga di quella data per la (gd.9)).