$\forall r \in \mathbb{N}$, da cui scende, come nel teorema appena citato $d_k(F_n,F) \to 0$.

ESEMPIO 3.2. Riprendiamo l'esempio 1.2. Risulta

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_{ab}\, d\varepsilon_n = \phi_{ab}(n) \text{ e quindi } d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-n} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r\, d\varepsilon_n \right| = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \theta_r(n).$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $s = s(\varepsilon)$ il minimo numero naturale tale che $2^{-s} < \varepsilon$. Si può allora scegliere n sufficientemente grande, sia $n \geq \nu$, perché risulti $\theta_r(n) = 0$ per $r = 1,2,\dots,s$. Di conseguenza, per $n \geq \nu$

$$d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) = \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r}\theta_r(n) \leq \sum_{r=s+1}^{\infty} 2^{-r} = 2^{-s} < \varepsilon$$

sicché $d_k(\varepsilon_n,\varepsilon_\infty) \to 0$.

4. UN BREVE CONFRONTO DELLE METRICHE d_S E d_k.

Si è visto, nelle due sezioni precedenti, che sia d_S sia d_k rendono Δ uno spazio metrico, che la convergenza debole di f.r. è equivalente indifferentemente alla convergenza in d_S o in d_k e che (Δ,d_S) e (Δ,d_k) sono compatti. Vi è quindi un indubbio vantaggio ad operare in Δ munito di una delle due metriche d_S o d_k anziché in Δ_o munito della metrica di Lévy d_L.

Ora d_S e d_k sono topologicamente equivalenti; infatti, poiché uno spazio metrico soddisfa, in modo ovvio, al primo assioma di numerabilità (ogni punto ammette una base d'intorni numerabile), le due metriche d_S e d_k, che implicano la stessa convergenza sulle successioni, generano la medesima topologia su Δ (si veda [6], capitolo 2, teorema 8). Tuttavia, esse differiscono per un aspetto importante. Infatti riguardato Δ come un sottoinsieme di $BV(\bar{\mathbb{R}})$, lo spazio delle funzioni a variazione limitata definite in $\bar{\mathbb{R}}$, d_k deriva da una norma su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ (si veda il teorema qui di seguito) mentre ciò non accade per d_S.

<u>TEOREMA 4.1.</u> L'applicazione $\| \ \|_k : BV(\bar{\mathbb{R}}) \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$\| f \|_k = \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} \left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, df \right| \qquad (f \in BV(\bar{\mathbb{R}}))$$

è una norma tale che $d_k(F,G) = \| F-G \|_k$ se $F,G \in \Delta$.

<u>DIM.</u> L'unica proprietà che occorra dimostrare per concludere che $\| \ \|_k$ è effettivamente una norma su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ è che $\| f \|_k = 0$ implichi $f = 0$. Ogni funzione $f \in BV(\bar{\mathbb{R}})$ può essere scritta nella forma $f = f_1 - f_2$ ove f_1 e f_2 sono due funzioni $f_i : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ $(i=1,2)$ crescenti e che si possono prendere continue a destra. Perciò $\| f \|_k = 0$ implica, per ogni $r \in \mathbb{N}$, $\left| \int_{\mathbb{R}} \theta_r \, df \right| = 0$ cioé $\int_{\mathbb{R}} \theta_r df_1 = \int_{\mathbb{R}} \theta_r df_2$, o ancora, $\int_a^b f_1(t)dt = \int_a^b f_2(t)dt$ per ogni coppia di numeri razionali a e b. L'ultima relazione dà, come nel teorema 3.1, $f_1 = f_2$ e, perciò, $f = 0$.

Q.E.D.

Non può, al contrario, esistere alcuna norma $\| \ \|_S$ su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ tale che $d_S(F,G) = \| F-G \|_S$ se $F,G \in \Delta$. Si ragioni, per assurdo, come segue. Se esistesse una tale norma allora $d_S(f,g) = \| f-g \|_S$ $(f,g \in BV(\bar{\mathbb{R}}))$ definirebbe in $BV(\bar{\mathbb{R}})$ una metrica invariante, per la quale, cioè, $d_S(f,g) = d_S(f-g,0)$ $\forall f,g \in BV(\bar{\mathbb{R}})$. Tra breve daremo, però, l'esempio di due funzioni $F,G \in \Delta$ tali che $d_S(F,G) \neq d_S(F-G,0)$ e tali, inoltre, che $F-G$ soddisfi a tutti i requisiti di una f.r. tranne (iv)' poiché $(F-G)(+\infty) = 0$. Tuttavia $F-G$ può egualmente essere riguardata come una f.r. poiché la definizione di d_S su Δ dipende solo dai valori assunti dalle f.r. in $\mathbb{R}$ anziché in $\bar{\mathbb{R}}$.

<u>ESEMPIO 4.1.</u> Sia F e F f.r. definite in $\mathbb{R}$ da

$$F(x):=\begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \; , \\ \frac{x}{8}+\frac{1}{2}, & \quad x \in [0,4[\; , \\ 1 & , \quad x \geq 4; \end{cases} \quad \text{e} \quad F(x):=\begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{8}, & x \in [0,4[\\ 1/2, & x \geq 4 \end{cases}$$

Allora $F(x)-G(x) = 0$ per $x > 0$, $= 1/2$ per $x \geq 0$. Poiché,

$$d_S(F-G,0) = \inf\{h>0 : F(x-h)-G(x-h) \leq 0 \leq F(x+h)-G(x+h)+h \quad \text{e}$$

$$|F(x) - G(x)| \leq h \qquad \forall x \in I(h)\}$$

si controlla facilmente che $d_S(F-G,0) = 1/2$.

D'altra parte, semplici calcoli mostrano che $d_S(F,G)=4/9$. Infatti poiché $F(x) \geq G(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, le diseguaglianze $G(x-4/9)-4/9 \leq$ $\leq F(x)$ e $G(x) \leq F(x+4/9)+4/9$ sono banalmente soddisfatte per ogni $x \in I(4/9) =]-9/4, 9/4[$ .Per quanto riguarda le diseguaglianze rimanenti, si noti che, se $x \in]-9/4, 4/9[$, si ha $F(x-4/9)-4/9 =$ $- 4/9 < G(x)$ mentre, se $x \in [4/9 , 9/4[$, è $F(x-4/9)-4/9 = (x-4/9)/8+$ $+ 1/2 - 4/9 = x/8 = G(x)$ sicché $F(x-4/9)-4/9 \leq G(x)$ $\forall x \in I(4/9)$. Inoltre, se $x \in I(4/9)$, è

$$G(x+4/9) + 4/9 = (x+4/9)/8 + 4/9 = x/8 + 1/2 = F(x).$$

Perciò $d_S(F,G) = 4/9 < 1/2 = d_S(F-G,0)$.

Incidentalmente, si può osservare che la norma usuale su $BV(\bar{\mathbb{R}})$ che, nella notazione del presente quaderno, si scrive $\| f \| = \ell'(f)+V_f(\bar{\mathbb{R}})$, essendo $V_f(\bar{\mathbb{R}})$ la variazione totale di $f \in BV(\bar{\mathbb{R}})$ (|5|), ha scarso significato probabilistico, giacché la sua restrizione $\| \, \|_\Delta$ a Δ dà $\|F\|_\Delta = 1+\ell'(F)$ di modo che $\|F_n - F\|_\Delta \to 0$ se, e solo se, $\ell'(F_n) \to \ell'(F)$, o, equivalentemente, se e solo se, $P[X_n=-\infty] \to P[X=-\infty]$.

E' ancora insoluto il problema di determinare se esistano due costanti positive a,b tali che

$$a\, d_k \leq d_S \leq b\, d_k \qquad (a > 0,\ b > 0).$$

5. LA CONVERGENZA DEBOLE DI F.R. A r DIMENSIONI.

Se Δ_r è lo spazio delle f.r. a r dimensioni, è interessante studiare i rapporti che intercorrono tra la convergenza debole in Δ_r e la topologia prodotto su $\Delta \times \Delta \times \ldots \times \Delta$ indotta dalla topologia della metrica d_S o d_K su Δ. Basta svolgere tutte le considerazioni nel caso $r = 2$, il caso $r > 2$ ottenendosi da quello con semplici avvertenze.

DEFINIZIONE 5.1. Sia Δ_r l'insieme delle f.r. a r dimensioni (per brevità r-f.r.), cioè la famiglia delle funzioni $H : \bar{\mathbb{R}}^r \to [0,1]$ che godono delle seguenti proprietà:

(i) $H(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$ se $x_i = -\infty$ per almeno un indice i,

(ii) $H(+\infty, +\infty, \ldots +\infty) = 1$;

(iii) H è continua a destra in ogni variabile: $H(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i+0, x_{i+1}, \ldots, x_r) = H_r(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_r)$ $(i=1,2,\ldots,r)$;

(iv) $V_H(R) \geq 0$ per ogni rettangolo $R = \prod_{i=1}^{r}]a_i, b_i[$ ove $a_i \leq b_i$ $(i=1,2,\ldots,r)$, ove $V_H(R) := \Sigma\, \mathrm{sign}(\underline{c})\, H(\underline{C})$, essendo la somma sopra tutti i vertici $\underline{c}$ di R, ed essendo $\mathrm{sign}(\underline{c}) = 1$ oppure -1 secondo che sia $c_i = a_i$ per un numero pari o dispari di indici.

Come è noto, ad ogni H e Δ_r corrispondono un'unica misura di probabilità P su $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}^r)$ - la famiglia degli insiemi di Borel di $\bar{\mathbb{R}}^r$ - e