# I N D I C E

Introduzione pag. iv

Notazioni " v

1. RICHIAMI DELLA TEORIA DEGLI SPAZI LOCALMENTE CONVESSI

§1. Richiami di teoria della dualità .......... pag. 1

§2. Limiti induttivi di slc .................... " 5

§3. Prodotti e somme dirette .................. " 6

§4. Prodotti tensoriali ........................ " 9

2. TEOREMI DI GRAFICO CHIUSO

§1. Teoria classica ............................ " 15

§2. Spazi di Ptak .............................. " 16

§3. Spazi botte ................................ " 20

§4. I teoremi del grafico chiuso e dell'applicazione aperta nella teoria di Ptak ....... " 23

§5. Due teoremi di interpolazione ............. " 27

3. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE

§1. Alcuni risultati classici .................. " 29

§2. Il metodo di decomposizione di Pełczynski.. " 31

§3. Rappresentazione di $C(\Omega)$ e di $C_0(K)$........ 34

4. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI INFINITAMENTE DIFFERENZIABILI E DI DISTRIBUZIONI

§1. Spazi di successioni ....................... " 40

§2. Rappresentazioni di $C^\infty_{2\pi}$, $C^\infty(Q)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ........ " 46

§3. Rappresentazioni di $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$ e loro duali ............................ " 49

§4. Quozienti dello spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ ............... " 54

Tabella delle rappresentazioni ..................... " 59

Bibliografia ....................................... " 60

# I N T R O D U Z I O N E

Questo articolo è una versione notevolmente estesa e accresciuta di un ciclo di conferenze tenute dal Prof. **Manuel Valdivia dell'Università di Valencia**, presso il Seminario di Analisi dell'Università di Lecce nell'aprile 1985.

Il lavoro è stato concepito in modo da essere accessibile anche ai non specialisti: a tal fine la prima parte è stata dedicata ad una panoramica su quegli argomenti della teoria degli spazi localmente convessi necessari per la lettura delle altre due.

La seconda parte è una introduzione alla teoria di Ptak, e, come tale, ha l'obiettivo di mettere in luce i legami essenziali tra teoremi di grafico chiuso e la teoria generale della dualità.

Nell'ultima parte ci siamo limitati ad esporre rappresentazioni degli spazi funzionali più classici (di funzioni continue, funzioni test, distribuzioni) omettendo importanti generalizzazioni, dovute allo stesso **Valdivia e a D.Vogt**, al caso di spazi di funzioni definite su varietà, o a valori vettoriali, e spazi di Beurling, di Sobolev, di Hörmander.

Infine desideriamo ringraziare i Proff. M.Valdivia per la sua disponibilità, V.B.Moscatelli per averci proposto questo lavoro e seguito nel suo svolgimento, M.A.Simões e C.Sempi per i loro utili suggerimenti.

G. Metafune

D. Pallara

# 1. RICHIAMI DELLA TEORIA GLI SPAZI LOCALMENTE CONVESSI.

Per comodità di lettura raccogliamo alcuni argomenti ben noti della teoria degli slc in modo da fissare la notazione. Per trattazioni esaurienti e per le dimostrazioni rimandiamo ai trattati classici citati in bibliografia.

## §1. Richiami di teoria della dualità.

Sia $<E,F>$ una coppia duale di spazi vettoriali: indicheremo con $\sigma(E,F)$ la topologia indotta su E dalla topologia prodotto in $\mathbb{K}^F$. Ricordiamo che $\sigma(E,F)$ è la topologia localmente convessa più debole su E per cui F è il suo duale topologico.

Se U è un sottoinsieme di E indicheremo con $U^o$ (il polare di U) il sottoinsieme di F così definito:

$$U^o = \{y \in F : |<x,y>| \leq 1 \quad \forall x \in U\} .$$

Ricordiamo che $U^o$ è assolutamente convesso e debolmente chiuso e che se U è a sua volta assolutamente convesso e debolmente chiuso allora $U^{oo} \equiv (U^o)^o = U$.

Se E è slc, c'è una dualità naturale $<E,E'>$, dove E' è il duale topologico di E. Notiamo che se la topologia su E è la più forte topologia localmente convessa, cioé quella i cui intorni sono tutti gli insiemi assolutamente convessi e assorbenti (la indicheremo con $\mathscr{L}$) allora $E'=E^*$.

Un insieme $H \subset E'$ si dice equicontinuo se è contenuto nel polare di un intorno.

Sarà utile nel seguito il seguente classico

Teorema 1.1. (Alaoglu-Bourbaki).

Se U è intorno in E slc, allora $U^{o} \subset E'$ è $\sigma(E',E)$ compatto

Descriviamo una tecnica usuale per definire differenti topologie su E ed F, una volta che siano state introdotte le topologie deboli. Si dice bornologia su E (relativa alla dualità $\langle E,F\rangle$) una famiglia $\mathcal{B}$ di sottoinsiemi $\sigma(E,F)$-limitati tali che:

(i) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow \exists B \in \mathcal{B} : B_1 \cup B_2 \subset B$;

(ii) $B \in \mathcal{B}, \rho \in \mathbb{K} \Longrightarrow \exists C \in \mathcal{B} : \rho B \subset C$;

(iii) $\mathrm{span}\{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\}$ è $\sigma(E,F)$ denso in E.

Data una bornologia $\mathcal{B}$ su E, si definisce una topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ localmente convessa su F prendendo come intorni in F i polari degli elementi di $\mathcal{B}$. Osserviamo esplicitamente che tale topologia è quella della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathcal{B}$.

Esempi. Sia E slc e consideriamo la dualità $\langle E,E'\rangle$.

1. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ coincide con $\sigma(E,E')$.

2. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia degli insiemi precompatti di E (o compatti) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è la topologia su E' della convergenza uniforme sui precompatti (compatti) di E e sarà denotata con $\mathcal{T}_{pc}(E',E)$

($\mathcal{T}_c(E',E)$).

3. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia degli insiemi assolutamente convessi e $\sigma(E',E)$-compatti in $E'$, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sarà denotata con $\mu(E,E')$ (topologia di Mackey su E) ed è la topologia localmente convessa più forte per cui il duale topologico di E è E'.

4. Se $\mathcal{B}$ è la famiglia di tutti gli insiemi $\sigma(E',E)$-limitati di E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è la topologia forte su E e sarà indicata $\beta(E,E')$.

E' ovvio che negli esempi precedenti si possono scambiare E ed E'.

Non è difficile convincersi che la topologia debole si conserva passando ai sottospazi ed ai quozienti, e che la topologia di Mackey si conserva passando ai quozienti. Invece la topologia $\mu$ non si conserva in generale per restrizione ai sottospazi; infine, la topologia forte in generale non si mantiene né per passaggio ai quozienti né per passaggio a sottospazi.

**Dualità di operatori.**

Sia T un operatore debolmente continuo fra due slc E ed F. Si definisce l'operatore aggiunto $T':F' \to E'$ tramite l'equazione

$$\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle \quad \forall x \in E,\ \forall y' \in F'.$$

T' risulta debolmente continuo e valgono le seguenti relazioni:

$$\mathrm{Ker}\ T' = [T(E)]^o$$

$$\mathrm{Ker}\ T = [T'(F')]^o ,$$

da cui si deduce, per esempio, che T' è 1-1 se e solo se T(E) è denso in F. Nel seguito useremo il seguente

**Teorema 1.2 del rango chiuso.**

Se E ed F sono spazi di Fréchet e $T:E \to F$ è continuo, sono equivalenti:

(i) T(E) è chiuso in F

(ii) T'(F') è $\sigma(E',E)$ chiuso in E'.

In generale questo teorema non vale in slc. E' invece generale il seguente

**Teorema 1.3 di omomorfismo debole.**

$$E,F \text{ slc},\ T : E \to F ;$$

T'(F') è $\sigma(E',E)$ chiuso se e solo se T è omomorfismo debole.

E' interessante anche sapere quando un operatore $T:E \to F$ debolmente continuo resta continuo rafforzando le topologie di E e di F.

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono bornologie in E' ed F' si ha che T è $E[\mathcal{T}_{\mathcal{B}}]$-$F[\mathcal{T}_{\mathcal{C}}]$ continuo se e solo se $T'(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{B}$, come si verifica con un calcolo standard per polarità (cf. per esempio il

Lemma 2.9). In particolare se T è debolmente continuo, è anche fortemente continuo e Mackey continuo.

Da ciò si deduce la seguente

Proposizione 1.4

Se $T : E \to F$ è omomorfismo debole e $T(E) = F$ allora è anche omomorfismo per le topologie di Mackey.

## §2. Limiti induttivi di slc.

Ci limiteremo a ricordare i fatti essenziali della teoria dei limiti induttivi stretti di slc.

Sia $E_n[\mathcal{T}_n]$ una successione di slc tali che $E_n \subsetneq E_{n+1}$ $\forall n$, e che la topologia $\mathcal{T}_{n+1}$ ristretta ~~ad~~ $E_n$ coincida con $\mathcal{T}_n$. Posto $E = \bigcup_n E_n$, E è ovviamente uno spazio vettoriale; definiamo una topologia $\mathcal{T}$ (localmente convessa) su E come segue:

$U \subset E$ assolutamente convesso è intorno in $\mathcal{T}$ se e solo se $U \cap E_n$ è intorno in $E_n$ per ogni n.

Notiamo che $\mathcal{T}$ è la topologia localmente convessa più fine su E per cui tutte le inclusioni $j_n : E_n \to E$ risultano continue. Si verifica facilmente che un operatore T definito su E è $\mathcal{T}$-continuo se e solo se $T \circ j_n$ é continuo su $E_n$ per ogni n. Lo spazio $E[\mathcal{T}]$ si dice limite induttivo stretto degli slc $E_n$, e la successione $E_n$ si dice una successione di definizione di E. Si può provare che la topologia indotta da E su ogni $E_n$ coincide con $\mathcal{T}_n$ e che se ogni $E_n$ è chiuso in $E_{n+1}$ (e.g.

se ogni $E_n$ è completo) allora un insieme $B \subset E$ è limitato se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $B \subset E_n$ ed è ivi limitato; inoltre se ogni $E_n$ è completo anche E è completo.

Se tutti gli $E_n$ sono spazi di Fréchet allora E si dice spazio (LF)-stretto. Osserviamo che ogni spazio (LF)-stretto E è di prima categoria; infatti $E = \bigcup_n E_n$, e se fosse di seconda categoria uno degli $E_n$ - sia $E_{n_0}$ - conterrebbe un aperto, e quindi sarebbe $E = E_{n_0}$, contro l'ipotesi che la successione $E_n$ sia strettamente crescente. Ne segue che E non è metrizzabile.

Per esempio, lo spazio $\mathscr{D}(\Omega)$ è limite induttivo stretto degli spazi di Fréchet $\mathscr{D}(K_j)$, dove $K_j$ è una successione strettamente crescente di compatti invadenti $\Omega$.

## §3. Prodotti e somme dirette.

Sia $(E_\alpha[\mathscr{T}_\alpha])_{\alpha\in A}$ una famiglia di slc; indicheremo con $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ lo spazio (localmente convesso) prodotto topologico degli $E_\alpha$.

Indicheremo con $\bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$ (somma diretta degli $E_\alpha$) il sottospazio lineare di $\prod_\alpha E_\alpha$ degli $x = (x_\alpha)$ tali che $x_\alpha \neq 0$ per un numero finito di indici. Su $\bigoplus_\alpha E_\alpha$ si può considerare la topologia indotta da $\prod_\alpha E_\alpha$, ma più frequentemente esso si dota della topologia localmente convessa $\bigoplus_\alpha \mathscr{T}_\alpha$, la più fine per cui ogni iniezione canonica $j_\alpha : E_\alpha \to \bigoplus_\alpha E_\alpha$ è continua.

Tale topologia è più fine della topologia prodotto e si chiama topologia somma diretta.

Questa è la topologia che useremo tacitamente nel seguito.

Osserviamo che una base d'intorni per $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ in $E=\bigoplus_\alpha E_\alpha$ è data dalla famiglia $\{\Gamma_\alpha U_{\alpha\beta}\}_\beta$, dove $\{U_{\alpha\beta}\}_\beta$ percorre una base d'intorni in $E_\alpha$; ne segue che la topologia indotta da $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ su $E_\alpha$ coincide con $\mathcal{T}_\alpha$.

Se $\mathbb{A} = \mathbb{N}$ e $E_n = E$ per ogni n useremo le seguenti notazioni:

$$E^{\mathbb{N}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

$$E^{(\mathbb{N})} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad .$$

Osserviamo che se $\mathbb{A}$ è finito allora $\prod_\alpha E_\alpha$ coincide algebricamente e topologicamente con $\bigoplus_\alpha E_\alpha$; perciò in tal caso, useremo indistintamente i due simboli. In particolare $E^2 = E\times E = E\oplus E$.

Notiamo anche che un operatore $T:F \to \prod_\alpha E_\alpha$ (F slc) è continuo se e solo se $p_\alpha \circ T : F \to E_\alpha$ è continuo $\forall\alpha$, $p_\alpha$ essendo la proiezione canonica su $E_\alpha$; analogamente $T:\bigoplus_\alpha E_\alpha \to F$ è continua se e solo se $T \circ j_\alpha : E_\alpha \to F$ è continuo $\forall\alpha$.

Mostriamo come sono fatti gli insiemi limitati in $E=\bigoplus_\alpha E_\alpha$; sia $B \subset E$ limitato e supponiamo che esistano infiniti indici (basta considerare il caso numerabile) per cui $B_n=q_n(B)\neq\{0\}$ ($q_n$ proiezione di E su $E_{\alpha_n}$); se allora $0\neq x_n \in B_n$, esiste $U_n$ intorno in $E_{\alpha_n}$ tale che $\frac{1}{n}x_n \notin U_n$; ne segue che $(x_n)_n \subset B$ non è assorbito dall'intorno $\Gamma_n U_n$, contro l'ipotesi che B sia limitato. Pertanto gli insiemi limitati di E sono contenuti in insiemi del tipo $\bigoplus_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$, $B_{\alpha_i}$ limitato in $E_{\alpha_i}$.

**Dualità tra prodotti e somme dirette.**

Sono facili da vedere gli isomorfismi algebrici tra $(\prod_\alpha E_\alpha)'$ e $\bigoplus_\alpha E'_\alpha$, e tra $(\bigoplus_\alpha E_\alpha)'$ e $\prod_\alpha E'_\alpha$.

E' interessante vedere quando tali isomorfismi sono topologici. Sia $(\mathcal{B}_\alpha)$ bornologia su $E_\alpha$; e siano $\mathcal{B} = \prod_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ e $\mathcal{B}' = \bigoplus_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ rispettivamente, le bornologie prodotto su $\prod_\alpha E_\alpha$, e somma su $\bigoplus_\alpha E_\alpha$, i cui elementi sono del tipo:

$$\mathcal{B} \ni B = \prod_\alpha B_\alpha, \quad B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha,$$
$$\mathcal{B}' \ni B' = \bigoplus_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}, \quad B_{\alpha_i} \in \mathcal{B}_{\alpha_i}.$$

Si verifica con un calcolo per polarità che la topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ su $\bigoplus_\alpha E'_\alpha$ è la topologia somma diretta $\bigoplus_\alpha \mathcal{T}_{\mathcal{B}_\alpha}$ e analogamente che $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ su $\prod_\alpha E'_\alpha$ coincide con la topologia prodotto delle $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_\alpha}$.

Tenendo conto dei legami tra le famiglie di insiemi limitati, debolmente compatti e finiti in $\bigoplus_\alpha E_\alpha$, $\prod_\alpha E_\alpha$ e nei singoli $E_\alpha$ si deducono le seguenti eguaglianze:

$$\beta(\prod_\alpha E'_\alpha, \bigoplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \beta(E'_\alpha, E_\alpha)$$
$$\mu(\prod_\alpha E'_\alpha, \bigoplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \mu(E'_\alpha, E_\alpha)$$
$$\sigma(\prod_\alpha E'_\alpha, \bigoplus_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha \sigma(E'_\alpha, E_\alpha)$$

$$\beta(\bigoplus_\alpha E'_\alpha \, , \, \prod_\alpha E_\alpha) = \bigoplus_\alpha \beta(E'_\alpha \, , \, E_\alpha)$$

$$\mu(\bigoplus_\alpha E'_\alpha \, , \, \prod_\alpha E_\alpha) = \bigoplus_\alpha \mu(E'_\alpha \, , E_\alpha) \quad .$$



E' da notare che l'uguaglianza

$$\sigma(\bigoplus_\alpha E'_\alpha, \prod_\alpha E_\alpha) = \bigoplus_\alpha \sigma(E'_\alpha \, , \, E_\alpha)$$

vale se e solo se $\mathbb{A}$ è finito; infatti altrimenti il prodotto delle bornologie degli insiemi finiti non è la bornologia degli insiemi finiti sul prodotto.

## §4. Prodotti tensoriali

### Nozione algebrica.

La nozione algebrica di prodotto tensoriale tra spazi vettoriali è stata introdotta per studiare applicazioni bilineari: infatti ogni applicazione bilineare sul prodotto di due spazi vettoriali si può leggere come applicazione lineare sul loro prodotto tensoriale.

Il primo esempio di applicazione dei prodotti tensoriali nello studio di problemi di analisi funzionale è dovuto a Schatten [27] che introduce il prodotto tensoriale di due spazi di Hilbert.

Lo studio sistematico di "buone topologie" sul prodotto tensoriale di slc è intrapreso, però, solo nel 1955 con la fondamentale tesi di Grothentieck [9] nella quale è messa in luce l'importanza dei prodotti tensoriali praticamente in tutti i campi dell'analisi funzionale.

Siano $E,F$ spazi vettoriali: denotiamo con $B(E,F)$ lo spazio delle forme bilineari definite su $E\times F$ e con $B^*(E,F)$ il suo duale algebrico. Consideriamo l'applicazione bilineare:

$$\otimes : E \times F \to B^*(E,F)$$

così definita:

$$\otimes(x,y)(b) = b(x,y) \qquad \forall b\in B(E,F) .$$

Posto $x\otimes y = \otimes(x,y)$, denoteremo con $E\otimes F$ l'inviluppo lineare dell' immagine dell'applicazione $\otimes$ in $B^*(E,F)$. Notiamo che se $(e_i)_{i\in I}$ e $(f_j)_{j\in J}$ sono basi di Hamel per $E$ ed $F$ rispettivamente, allora $(e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ è base di Hamel per $E\otimes F$. Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$E \otimes F \simeq F \otimes E$$
$$E \otimes (F\otimes G) \simeq (E\otimes F)\otimes G$$
$$E \otimes (F\times G) \simeq (E\otimes F) \times (E\otimes G)$$
$$E \otimes \mathbb{K} \simeq E .$$

dove $\simeq$ denota isomorfismo algebrico.

Sia ora $T\in L(E\otimes F,G)$; poniamo $\tilde{T} = T\circ\otimes$; $\tilde{T}\in B(E,F;G)$ (spazio delle funzioni bilineari da $E\times F$ in $G$). L'applicazione $T\mapsto\tilde{T}$ è lineare e bigettiva, e l'inversa $\tilde{T}\mapsto T$ è data da:

$$T(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{T}(x_i,y_i).$$

Gli spazi $L(E\otimes F,G)$ e $B(E,F;G)$ sono allora algebricamente isomorfi.

In particolare, se $G=\mathbb{K}$ si ha $(E\otimes F)^* = B(E,F)$.

Consideriamo ora l'applicazione

$$\chi: E^* \otimes F \to L(E,F)$$

così definita:

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \otimes y_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i^* \rangle y_i ;$$

essa induce un isomorfismo algebrico tra $E^*\otimes F$ e il sottospazio degli operatori di rango finito in $L(E,F)$.

Definiamo infine il prodotto tensoriale di due applicazioni: se $T_1 \in L(E_1,F_1)$, $T_2 \in L(E_2,F_2)$ sia

$$T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

così definita:

$$(T_1 \otimes T_2)(x \otimes y) = (T_1 x) \otimes (T_2 y)$$

estesa per linearità a tutto $E_1\otimes E_2$; evidentemente $T_1\otimes T_2 \in L(E_1\otimes E_2, F_1\otimes F_2)$ ed è il prodotto tensoriale di $T_1$ e $T_2$.

## Prodotto tensoriale proiettivo di slc.

Siano ora E ed F slc; denotiamo con $E\otimes_\pi F$ (prodotto tensoriale proiettivo di E ed F) il prodotto tensoriale $E\otimes F$ munito della topologia localmente convessa più fine per cui l'applicazione $\otimes$ è continua. Se U è intorno in E e V è intorno in

F, posto $U\otimes V=\otimes(U\times V)$, proviamo che la famiglia $\mathscr{W}=\{\Gamma(U\otimes V)\}$, al variare di U e V in due basi d'intorni in E ed F rispettivamente, è base d'intorni in $E\otimes_\pi F$.

$W=\Gamma(U\otimes V)$ è assorbente; infatti, sia $z\in E\otimes F$, $z=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$; poiché U e V sono assorbenti, esistono $\lambda_i, \mu_i>0$ tali che

$$x_i\in\lambda_i U,\ y_i\in\mu_i \qquad \forall i=1,\dots,n;$$

ne segue

$$(*)\qquad z=\sum_{i=1}^n \lambda_i\mu_i\left(\frac{x_i}{\lambda_i}\right)\otimes\left(\frac{y_i}{\mu_i}\right)\in\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\mu_i\right)W.$$

E' chiaro inoltre che $\mathscr{W}$ è base di filtro, poiché $\Gamma(U_1\otimes V_1)\cap\Gamma(U_2\otimes V_2)\supset\Gamma((U_1\cap U_2)\otimes(V_1\cap V_2))$ e quindi definisce una topologia su $E\otimes F$; per come è definita essa è evidentemente la più fine per cui $\otimes$ è continua, e quindi è la topologia proiettiva su $E\otimes F$.

Osserviamo che se E ed F sono metrizzabili allora anche $E\otimes_\pi F$ è metrizzabile perché prendendo basi d'intorni numerabili in E ed F $\mathscr{W}$ risulta anch'essa numerabile.

Con un rapido calcolo si verifica la seguente relazione fra i funzionali di Minkowski associati a U,V e $W=\Gamma(U\otimes V)$:

$$p_W(z)=\inf\{\sum_{i=1}^n p_U(x_i)p_V(y_i)\},$$

dove l'inf è su tutte le rappresentazioni di $z=\sum_{i=1}^n x_i\otimes y_i$.

Ne segue subito che se E,F sono spazi normati allora anche $E\otimes_\pi F$ è spazio normato con norma

$$\|z\| = \inf\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \ \|y_i\| \} \quad .$$

L'isomorfismo algebrico tra $L(E\otimes F,G)$ e $B(E,F;G)$ ristretto a $\mathscr{L}(E\otimes_\pi F,G)$ è un isomorfismo algebrico su $\mathscr{B}(E,F;G)$. Infatti $\tilde{T} = T\circ\otimes$ è continua su $E\times F$ per composizione; viceversa, se $b \in \mathscr{B}(E,F;G)$ e T è definita da $T(\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} b(x_i,y_i)$ allora $\tilde{T}=b$, e T è continua su $E\otimes_\pi F$; per provarlo, sia W intorno (assolutamente convesso) in G: esistono U,V intorni in E ed F tali che $b(U\times V) \subset W$; per come è definito T ne segue $T(\Gamma(U\otimes V)) \subset W$, cioé la continuità di T. In particolare, se $G=\mathbb{K}$ si ottiene $(E\otimes_\pi F)' \simeq \mathscr{B}(E,F)$ algebricamente.

In generale, $E\otimes_\pi F$ non è completo anche se E ed F lo sono; $E\tilde{\otimes}_\pi F$ denoterà il suo completamento.

**Prodotto tensoriale iniettivo di slc.**

Siano E,F slc; consideriamo l'applicazione:

$$\chi : E \otimes F \to \mathscr{L}(E'_\sigma ,F)$$

(dove $E'_\sigma = E'[\sigma(E',E)]$) definita da

$$\chi(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i)(x') = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i,x'\rangle\, y_i \qquad \forall x'\in E';$$

essa è isomorfismo algebrico sul sottospazio $\mathscr{F}(E'_\sigma ,F)$ di $\mathscr{L}(E'_\sigma ,F)$ degli operatori di rango finito.

Introduciamo su $\mathscr{L}(E'_\sigma, F)$ la topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ della convergenza uniforme sugli insiemi equicontinui di E'; una base d'intorni per $\mathcal{T}_\varepsilon$ è data da:

$$W_{U,V} = \{T \in \mathscr{L}(E'_\sigma, F) : T(U^0) \subset V\},$$

quando U e V variano in basi d'intorno di E ed F.

$E \otimes F$, munito della topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ indotta tramite $\chi$, è il prodotto tensoriale iniettivo di E ed F e verrà indicato con $E \otimes_\varepsilon F$. Si vede facilmente che le seminorme che definiscono la topologia in $E \otimes_\varepsilon F$ sono date da:

$$\varepsilon_{U,V}(z) = \sup\{|\sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x'\rangle\langle y_i, y'\rangle|; x' \in U^0, y' \in V^0\},$$

per $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$.

Facciamo notare che se E,F sono metrizzabili allora anche $E \otimes_\varepsilon F$ lo è; inoltre se E ed F sono normati la topologia $\mathcal{T}_\varepsilon$ è quella della norma degli operatori in $\mathscr{L}(E', F)$ e quindi $E \otimes_\varepsilon F$ è normato.

L'applicazione bilineare $\chi \circ \otimes : E \times F \to \mathscr{L}(E'_\sigma, F)$ applica $U \times V$ in $W_{U,V}$ con ovvia notazione e quindi $\otimes : E \times F \to E \otimes_\varepsilon F$ è continua; se segue che $\mathcal{T}_\varepsilon$ è meno fine della topologia proiettiva. In particolare, se E ed F sono normati vale la relazione $\|z\|_\varepsilon \leq \|z\|_\pi$.

Come prima, indicheremo con $E \tilde{\otimes}_\varepsilon F$ il completamento di $E \otimes_\varepsilon F$.

Osservazione.

Con le topologie $\varepsilon$ e $\pi$ si verifica facilmente che le proprietà formali algebriche del prodotto tensoriale (p.10) valgono anche in senso topologico; in particolare gli isomorfismi sono isometrie nel caso di spazi normati.

## 2. TEOREMI DI GRAFICO CHIUSO.

### §1. Teoria classica.

E' ben nota l'importanza che tanto nell'analisi funzionale astratta quanto nelle applicazioni rivestono teoremi di grafico chiuso e teoremi di omomorfismo. I primi risultati in questa direzione sono i classici teoremi di Banach del grafico chiuso e dell'applicazione aperta tra spazi di Fréchet ([1]); la nascita della teoria delle distribuzioni ha motivato la ricerca di generalizzazioni agli spazi (LF), classe in cui rientrano gli spazi $\mathscr{D}(\Omega)$. Dieudonné e Schwartz [6] hanno provato il seguente teorema di cui presentiamo la dimostrazione originale:

Teorema 2.1.

Siano E,F spazi (LF) stretti: $T : E \to F$ lineare continuo e surgettivo è aperto.

Dimostrazione.

Siano $E = \text{ind } E_n, F = \text{ind } F_n$.

Proveremo che, se $U$ è un intorno dello zero in $E$, allora $T(U)$ è intorno dello zero in $F$; sarà sufficiente provare che $T(U)\cap F_n$ è intorno dello zero in $F_n$ (per ogni $n$). Posto

$$G_{mn} = E_m \cap T^{-1}(F_n),$$

per la surgettività di $T$ risulta

$$F_n = \bigcup_m T(G_{mn});$$

poiché $T$ è continuo, $G_{mn}$ è chiuso per ogni $m,n$, e quindi dal teorema di Baire segue che $\forall n$ uno dei sottospazi $T(G_{mn})$ - sia $T(G_{m_o n})$ - è di seconda categoria; il teorema di omomorfismo di Banach, applicato a $T_{|G_{m_o n}} : G_{m_o n} \to F_n$ mostra allora che $T(G_{m_o n}) = F_n$: ne segue che $T(G_{m_o n}\cap U)$ contiene un intorno dello zero in $F$: poiché $T(U)\cap F_n \supset T(G_{m_o n}\cap U)$ la tesi è acquisita. $\square$

Con tecniche analoghe si può provare anche un teorema di grafico chiuso tra spazi (LF) stretti (cf. [6] e anche [13] e [9]).

## §2. Spazi di Ptak.

La dimostrazione di Banach e quella di Dieudonné e Schwartz sfruttano (come anche abbiamo visto nel caso della seconda) in modo essenziale il concetto di categoria e il teorema di Baire. In quest'ordine di idee si è pervenuti ad ampie generalizzazioni grazie all'introduzione degli spazi webbed dovuta a De Wilde (cf. [4], [42]). In un'altra direzione, Ptak (cf. [21], [22]) ha avuto il merito di riconoscere i legami tra teoremi di grafico chiuso e la teoria generale della dualità. Il punto di partenza della teoria di Ptak è la seguente semplice

Osservazione 2.2.

Siano E,F slc, $T : E \to F$ un operatore e sia

$$T^* : F^* \to E^* ,$$

l'aggiunto algebrico di T.
Allora il sottospazio $D = (T^*)^{-1}(E') \cap F'$ è $\sigma(F',F)$-denso in $F'$ se e solo se T è chiuso.

Dimostrazione.

Proviamo che

$$G(T) = G(T)^{oo} \iff D \text{ è denso.}$$

Si ha

$$G(T)^{o} = \{(x',y') \in E' \times F' : \langle x,x'\rangle + \langle Tx,y'\rangle = 0 \ \forall x\} =$$
$$= \{(-T^*y',y') \in E' \times F' : y' \in D\},$$

da cui:

$$(x,y) \in G(T)^{oo} \iff \langle Tx,y'\rangle - \langle y,y'\rangle = 0 \quad \forall y' \in D$$
$$\iff Tx - y \in D^{o},$$

perciò $G(T) = G(T)^{oo} \Longleftrightarrow D^o = 0$ . □

Se D è anche $\sigma(F',F)$-chiuso, allora T è debolmente continuo; infatti in tal caso D=F', e quindi $T^*(F') \subset E'$, che è equivale alla debole continuità di T.

La possibilità di ottenere teoremi di grafico chiuso partendo da queste considerazioni è dunque legata all'individuazione di classi di spazi per cui D risulti debolmente chiuso e contemporaneamente T risulti, oltre che debolmente continuo, anche continuo.

Un potente strumento per studiare la chiusura debole di sottospazi (e più in generale di insiemi convessi) del duale topologico di uno slc è il classico

**Teorema 2.3** (Krein-Smulian).

Uno spazio localmente convesso metrizzabile E è completo se e solo se vale la seguente proprietà:

(KS) un sottoinsieme convesso G di E' è $\sigma(E',E)$-chiuso se e solo se $G \cap U^o$ è $\sigma(E',E)$-chiuso per ogni intorno U in E.

Tenendo conto di questo teorema e dell'obbiettivo indicato Ptak dà la seguente

**Definizione 2.4.**

(i) Uno spazio E è $B_r$-completo se (KS) è vera per ogni sottospazio G $\sigma(E',E)$-denso in E'.

(ii) E è B-completo se ogni quoziente separato di E è $B_r$-completo, o equivalentemente se (KS) è vera per ogni sottospazio $G \subset E'$.

Gli spazi B-completi (risp. $B_r$-completi) si chiamano anche spazi di Ptak (risp. infra-Ptak).

Esempi.

1. Il teorema di Krein-Smulian mostra che ogni spazio di Fréchet è B-completo.

2. $\mathbb{K}^I$ è B-completo per ogni insieme di indici I; per I non numerabile si ottiene così un esempio di spazio B-completo non metrizzabile. Inoltre ogni spazio debolmente completo, poiché è isomorfo a un $\mathbb{K}^I$, è B-completo.

3. Il duale di uno spazio di Fréchet è B-completo per la topologia di Mackey; in particolare il duale forte di uno spazio di Fréchet riflessivo è B-completo.

4. Ogni quoziente di uno spazio B-completo è B-completo.

Per altri esempi di spazi $B_r$-completi e B-completi cf. [17], [33],[34].

Proposizione 2.5.

(i) Ogni spazio $B_r$-completo è completo.

(ii) Ogni sottospazio di uno spazio B-completo o $B_r$-completo ha la stessa proprietà.

Dimostrazione.

(i) Ricordiamo una caratterizzazione degli slc completi dovuta a Grothendieck: E è completo se e solo se ogni iperpiano $F \subset E'$ tale che $F \cap U^0$ è debolmente chiuso per ogni intorno U in E è debolmente chiuso.

Sia allora F un iperpiano di E' con $F \cap U^0$ chiuso per ogni intorno U; F non può essere debolmente denso in E' perché E è $B_r$-completo, e quindi è debolmente chiuso.

(ii) Proviamo l'asserto per gli spazi $B_r$-completi; nel caso dei B-completi si procede in modo analogo.

Sia F sottospazio chiuso di E ($B_r$-completo); allora F' è debolmente isomorfo a $E'/F°$, e sia $Q:E' \to F'$ la suriezione. Se G è sottospazio debolmente denso in F' e tale che $G \cap V^0$ è debolmente chiuso $\forall V$ intorno in F, dal teorema di Hahn-Banach segue che $Q^{-1}(G)$ è debolmente denso in E'.

Ma per U intorno in E risulta:

$$U^0 \cap Q^{-1}(G) = Q^{-1}(Q(U^0) \cap G) = Q^{-1}((U \cap F)^0 \cap G),$$

e quindi, essendo $U \cap F$ intorno in F, dalla continuità di Q segue che $U^0 \cap Q^{-1}(G)$ è debolmente chiuso in E'. Pertanto $Q^{-1}(G) = E'$ perché E è $B_r$-completo e quindi $G=F'$. □

Osserviamo che esistono spazi $B_r$-completi che non sono B-completi [41].

## §3. Spazi botte.

Ricordiamo che, dato un slc E, si dice botte un sottoinsieme di E assolutamente convesso, assorbente e chiuso. Le botti in uno slc sono legate agli insiemi debolmente limitati del duale, come mostra la seguente

Proposizione 2.6.

Sia E un slc e G un sottoinsieme di E'; G è debolmente limitato $\Longleftrightarrow$ G° è una botte di E.

Dimostrazione.

G° è assolutamente convesso e chiuso (perché polare di un insieme); proveremo che è assorbente se e solo se G è debolmente limitato.

$$G \text{ debolmente limitato} \Longleftrightarrow \sup_{x'\in G} |\langle x,x'\rangle| < \infty \quad \forall x \in E$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad \exists\, \rho > 0 : \sup_{x'\in G} |\langle x,x'\rangle| \leq \rho \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall x \in E \quad \exists\, \rho > 0 : x \in \rho\, G^\circ. \qquad \square$$

Definizione 2.7.

Uno slc E si dice spazio botte (barreled, tonnelé) se ogni botte è intorno dell'origine.

Alla luce della Proposizione 2.6 una immediata caratterizzazione degli spazi botte è la seguente:

$$E[\mathcal{T}] \text{ è spazio botte} \Longleftrightarrow \mathcal{T} = \beta(E,E')$$

Esempi.

1. Ogni spazio di seconda categoria è uno spazio botte.

Sia infatti U una botte in E; allora $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\,U$, e quindi esiste $n_0$ tale che $\widehat{n_0 U}^{\circ} \neq \emptyset$ ne segue che $\overset{\circ}{U} \neq \emptyset$ e, poiché $0 \in \overset{\circ}{U}$, U è intorno.

In particolare ovviamente ogni spazio di Fréchet è spazio botte.

2. Ogni limite induttivo stretto E di spazi botte è uno spazio botte.

Per vederlo sia $(E_n)$ una successione di definizione per E, e sia U una botte in E; allora ogni $U_n = U \cap E_n$ è botte, e quindi intorno dell'origine, in $E_n$. Dalla definizione della topologia di E segue la tesi.

In particolare gli spazi (LF) stretti sono spazi botte, e quindi non tutti gli spazi botte sono spazi di $2^a$-categoria.

3. Ogni quoziente $F=E/G$ di uno spazio botte E è uno spazio botte. Infatti, se U è botte in $F$, $p^{-1}(U)$ è botte in E, dove p è l'applicazione quoziente di E su F; allora $p^{-1}(U)$ è intorno in E e quindi $U = pp^{-1}(U)$ è intorno in F perché p è aperta.

4. Il prodotto topologico di spazi botte è ancora uno spazio botte.

Se $E = \prod_{\alpha} E_{\alpha}$, e $E_{\alpha}$ ha la topologia forte $\forall\alpha$ anche E ha la topologia forte (cf. p.8) e quindi è spazio botte.

5. Limiti proiettivi e sottospazi di spazi botte non è detto che siano spazi botte; è vero però che sottospazi di codimensione numerabile restano spazi botte. (cf. [38] e cf. anche [5] nel caso finito).

In generale, non è vero neppure che il duale forte di uno spazio botte è spazio botte.

Una proprietà degli spazi botte utile per la nostra discussione è espressa dalla seguente

**Proposizione 2.8.**

Siano E uno spazio botte ed F uno slc; ogni operatore $T: E \to F$ debolmente continuo è continuo.

Dimostrazione.

Sia V un intorno assolutamente convesso e chiuso in F; $T^{-1}(V)$ è assolutamente convesso e assorbente perché lo è V, ed è debolmente chiuso per la debole continuità di T; ma allora è anche chiuso in E ed è quindi una botte. $\square$

Osserviamo che questo risultato si deduce subito dalla discussione sulla dualità di operatori fatta nella prima parte.

## §4. I teoremi del grafico chiuso e dell'applicazione aperta nella teoria di Ptak.

Siamo ora pronti a provare i teoremi del grafico chiuso e dell'applicazione aperta nella formulazione di Ptak.

Premettiamo per comodità il seguente semplice

Lemma 2.9. Siano E,F slc e $T : E \to F$ debolmente continuo:

$$[T(A)]^o = (T')^{-1}(A^o) \qquad \text{per ogni } A \subset E.$$

Dimostrazione.

$$y' \in [T(A)]^o \iff |\langle Tx, y'\rangle| \leq 1 \qquad \forall x \in A$$

$$\iff |\langle x, T'y'\rangle| \leq 1 \qquad \forall x \in A$$

$$\iff T'y' \in A^o. \quad \square$$

Teorema 2.10 del grafico chiuso

Siano E uno spazio botte ed F $B_r$-completo. Ogni operatore chiuso $T : E \to F$ è continuo.

Dimostrazione.

Sia $T^* : F^* \to E^*$ l'aggiunto algebrico di T; $T^*$ è $\sigma(F^*,F)$-$\sigma(E^*,E)$ continuo. Poiché ogni sottospazio di F è $B_r$-completo (cf. Proposizione 2.5), non si perde di generalità supponendo che T(E) sia denso in F . In tal caso $T_o = T^*|_{F'} : F' \to E^*$ è 1-1.

Il sottospazio

$$D = F' \cap (T^*)^{-1}(E'),$$

per l'osservazione 2.2 è $\sigma(F',F)$-denso in F'. Se proviamo che D=F', T risulterà debolmente continuo e quindi continuo per la Proposizione 2.8. Poiché F è $B_r$-completo, è sufficiente provare che $D \cap V^o$ è $\sigma(F',F)$-chiuso per ogni intorno V in F.

Sia allora $V$ un intorno (assolutamente convesso e chiuso) in $F$, e sia $W = T^{-1}(V)$; $\bar{W}$ è botte in $E$, e quindi intorno perché $E$ è spazio botte. Per il Teorema di Alaoglu-Bourbaki $W^\circ = \bar{W}^\circ$ è $\sigma(E',E)$-compatto e quindi $\sigma(E^*,E)$-compatto. Per acquisire la tesi basta allora provare che

$$D \cap V^\circ = T_0^{-1}(W^\circ).$$

Ma

$$T_0(D \cap V^0) = T^*(D \cap V^0) \cap E' =$$

$$= T^*(V^0) \cap E' = T^{-1}(V)^\bullet \cap E' =$$

$$= W^\bullet \cap E' = W^0$$

(dove $\bullet$ indica il polare in $E^*$) per il lemma 2.9. $\square$

Dal teorema del grafico chiuso si deduce agevolmente il

**Teorema 2.11 dell'applicazione aperta.**

Siano $E$ B-completo ed $F$ spazio botte.

Ogni operatore $T : E \to F$ continuo e surgettivo è un omomorfismo.

**Dimostrazione.**

L'operatore

$$T_0 : E/T^{-1}(0) \to F$$

canonicamente associato a $T$ è bigettivo e continuo. Allora $T_0^{-1}$ è chiuso ed è continuo per il teorema precedente; ne segue che $T_0$ è aperto e quindi anche $T$. $\square$

Corollario 2.12.

Ogni operatore bigettivo e continuo, $T : E \to F$, con $E$ $B_r$-completo ed $F$ spazio botte, è isomorfismo.

Osserviamo che il teorema 2.1 di Dieudonné e Schwartz non è contenuto nel teorema 2.11 perché gli spazi (LF) (anche stretti) non sono in generale $B_r$-completi, come si vedrà nel seguito. Con successivi raffinamenti A. e W.Robertson hanno ritrovato il risultato di Dieudonné e Schwartz in questo ordine di idee estendendo la teoria di Ptak (cf.[23],[24],[11], [30],[31] e anche [12]).

Osserviamo che le classi di spazi qui introdotte sono, in certo senso, massimali rispetto alle proprietà di grafico chiuso e di omomorfismo.

Si possono provare infatti le seguenti proposizioni, per le cui dimostrazioni rimandiamo ai trattati di Jarchow e Kothe (cf. anche [15]):

(i) Uno slc E è B-completo sse ogni operatore continuo e surgettivo da E in F, con F spazio botte, è aperto.

(ii) Uno slc E è $B_r$-completo sse ogni operatore continuo e bigettivo da E in F, con F spazio botte, è aperto.

(iii) Uno spazio E è botte sse ogni operatore chiuso da E in uno spazio di Banach è continuo.

## §5. Due teoremi di interpolazione.

Dimostriamo ora due classici teoremi d'interpolazione che saranno utili nel seguito e che possono essere dedotti dal teorema del rango chiuso e dal teorema di Krein-Smulian.

**Teorema 2.13** (interpolazione di Borel).

Sia $(a,b) \subset R$ e $c$ un punto di $(a,b)$. Data una successione $(a_n)$ di numeri reali, esiste $f \in C^\infty(a,b)$ tale che $f^{(n)}(c) = a_n$ $\forall n \in N$.

Dimostrazione.

Sia

$$T : C^\infty(a,b) \to \omega$$

così definito:

$$Tg = (g^{(n)}(c)) \quad ,$$

$T$ è lineare e continuo; proveremo che è surgettivo. A tal fine è sufficiente provare che $T'$ è 1-1 e che $T'$ ha rango debolmente chiuso. Siano $(e_0, e_1, \dots, e_n, \dots)$ i vettori canonici di $\varphi = \omega'$. Risulta per ogni $g \in C^\infty(a,b)$:

$$\langle g, T'e_n \rangle = \langle Tg, e_n \rangle = g^{(n)}(c)$$

e quindi $T'e_n = (-1)^n \delta_c^{(n)}$ (derivata n-esima della distribuzione di Dirac in c).

Ricordiamo che una base di intorni di $C^\infty(a,b)$ è data da $U_n = \{g \in C^\infty : \sup_{J_n} |g^{(k)}(x)| \leq 1/n,\ k \leq n\}$ dove $(J_n)$ è una successione d'intervalli compatti invadenti $(a,b)$. Per provare che $T'\varphi$ è debolmente chiuso in $C^{\infty}(a,b)'$ è sufficiente mostrare, per il teorema di Krein-Smulian che $T'\varphi \cap U_n^o$ è debolmente chiuso $\forall n$.

Poiché

$$T'\varphi = \mathrm{span}\{\delta_c^{(n)}\} ,$$

si vede facilmente che:

$$T'\varphi \cap U_n^o \subset E_n = \mathrm{span}\{\delta_c^{(k)}, k=0,1,\ldots,n\} \subset T'\varphi .$$

Siccome $\dim E_n = n$, $E_n$ è debolmente chiuso in $C^{\infty}(a,b)'$ e $T'\varphi \cap U_n^o$ è chiuso in $E_n$ si ha la tesi. □

**Teorema 2.14.**

Sia $(z_n)$ una successione in $\mathbb{C}$ senza punti di accumulazione al finito, e sia $(a_n)$ una successione di numeri complessi.

Esiste una funzione intera tale che

$$f(z_n) = a_n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione.

Procedendo come nel teorema precedente sia:

$$T : H(\mathbb{C}) \to \omega$$

$$Tg = (g(z_n)), \qquad g \in H(\mathbb{C}).$$

Risulta

$$T'e_n = \delta_{z_n}$$

e quindi $T' : \varphi \to H'(\mathbb{C})$ è 1-1.

Come prima si vede che $T'\varphi$ è debolmente chiuso in $H'(\mathbb{C})$ e quindi che T è surgettivo. $\square$

# 3. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI CONTINUE.

## §1. Alcuni risultati classici.

Un vecchio problema lasciato aperto da Banach nel suo celebre trattato era il seguente:

E' vero che $C([0,1]\times[0,1])$ è isomorfo a $C([0,1])$?

E' da notare che Banach sapeva che non potevano essere isometrici perché aveva provato, nel caso $C(H)$ e $C(K)$ separabili (o equivalentemente H e K metrizzabili) il seguente teorema dovuto a M.H.Stone nella sua formulazione generale:

**Teorema 3.1. (Banach-Stone)**

Siano H e K spazi compatti; $C(H)$ è isometrico a $C(K)$ se e solo se H è omeomorfo a K.

La risposta a questo problema (affermativa) si è avuta oltre trent'anni dopo la sua formulazione, ed è contenuta nel famoso

**Teorema 3.2 (Milutin).**

Se K è un compatto metrico non numerabile, allora $C(K)$ è isomorfo a $C([0,1])$.

Segnaliamo che esiste una classificazione isomorfa di tutti gli spazi $C(K)$, con $K$ compatto metrizzabile, per la quale rinviamo a Lindenstrauss e Tzafriri [14].

Nello studio degli spazi di funzioni continue, come si vedrà anche nel seguito, sono utili strumenti teoremi di estensione che siano legati alla struttura vettoriale degli spazi in oggetto: il teorema di Tietze è perciò inadeguato in quanto l'operatore di estensione che fornisce non è lineare.

Di grande utilità è invece il seguente teorema di estensione simultanea dovuto a Borsuk e Kakutani (cf. [14], [2] e [40]).

Teorema 3.3.

Sia $K$ compatto, e $H \subset K$ chiuso e metrizzabile; esiste un operatore $T : C(H) \to C(K)$ tale che $(Tf)_{|H}=f$ $\forall f \in C(H)$, $\|Tf\| = \|f\|$ e $T1_H = 1_K$ dove $1_H$ e $1_K$ sono rispettivamente l'identità di $C(H)$ e $C(K)$.

Una immediata conseguenza è il seguente utile

Corollario 3.4.

Nelle ipotesi del teorema 3.3, esiste un sottospazio $E$ di $C(K)$ isometrico a $C(H)$ e complementato in $C(K)$ con proiezione di norma uno.

Dimostrazione.

Siano $T : C(H) \to C(K)$ l'operatore dato dal teorema 3.3, $R : C(K) \to C(H)$ operatore di restrizione, ed $E=T(C(H))$.

E è evidentemente isometrico a $C(H)$, e $P = TR$ è la proiezione cercata.

## §2. Il metodo di decomposizione di Pełczyński.

Il metodo in esame è stato introdotto da Pełczyński in [19] per studiare una situazione di questo tipo:

Siano E ed F spazi di Banach (o, più in generale, slc), con E isomorfo ad un sottospazio complementato di F e F isomorfo ad un sottospazio complementato di E (scriveremo nel seguito $E < F$, $F < E$ rispettivamente):

in quali ipotesi su E ed F si può concludere che E ed F sono isomorfi?

Noi esporremo questo procedimento prima attraverso alcuni esempi, e poi nella formulazione astratta dovuta a D.Vogt [45].

Negli esempi che seguono supporremo di essere nella ipotesi del problema enunciato, con $E \simeq F \oplus F_0$, $F \simeq E \oplus E_0$.

**Esempio 1.**

Se $E \simeq E^2$ $(= E \oplus E)$ e $F \simeq F^2$ allora $E \simeq F$. Infatti

$$E \oplus F \simeq F \oplus F_0 \oplus F \simeq F \oplus F_0 \simeq E$$

$$E \oplus F \simeq E \oplus E \oplus E_0 \simeq E \oplus E_0 \simeq F$$

da cui $E \simeq F$.

Esempio 2.

Se $E \simeq (E \oplus E \oplus \dots)_p$ $(1 \leq p \leq \infty$, oppure $p=0)$ allora $E \simeq F$.

Intanto, risulta $E \simeq E \oplus E$, e quindi come nell'esempio 1

$$E \oplus F \simeq F;$$

inoltre:

$$\begin{aligned} E \oplus F &\simeq (E \oplus E \oplus \dots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq ((F \oplus F_0) \oplus (F \oplus F_0) + \dots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq (F_0 \oplus F_0 \oplus \dots)_p \oplus (F \oplus F \oplus \dots)_p \oplus F \simeq \\ &\simeq (F_0 \oplus F_0 \oplus \dots)_p \oplus (F \oplus F \oplus \dots)_p \simeq \\ &\simeq ((F \oplus F_0) \oplus (F \oplus F_0) \oplus \dots)_p \simeq (E \oplus E \oplus \dots)_p \simeq E. \end{aligned}$$

Quest'esempio è servito a Pełczyński (ed a Lindenstrauss nel caso di $\ell^\infty$) per provare che ogni sottospazio complementato di $\ell^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ e di $c_0$ è isomorfo allo spazio stesso (notare che $\ell^p \simeq (\ell^p \oplus \ell^p \oplus \dots)_p$ e $c_0 \simeq (c_0 \oplus c_0 \oplus \dots)_0$).

Esempio 3.

Siano E ed F slc e $E \simeq G^{\mathbb{N}}$, con G slc.

Allora $E \simeq F$. Infatti, come prima, $E \simeq E^2$, e quindi $E \oplus F \simeq F$. Inoltre:

$$E \oplus F \simeq G^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq (F \oplus F_0)^{\mathbb{N}} \oplus F \simeq F^{\mathbb{N}} \oplus F_0^{\mathbb{N}} \simeq (F \oplus F_0)^{\mathbb{N}} \simeq E^{\mathbb{N}} \simeq (G^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \simeq G^{\mathbb{N}} \simeq E.$$

Seguendo Vogt esponiamo ora la formulazione astratta del metodo di Pełczyński.

Sia $A$ un'applicazione che assegna ad ogni slc $E$ un altro slc $AE$, in modo che:

(i) $A(AE) \simeq AE \simeq E \oplus AE$

(ii) $A(E \oplus F) \simeq AE \oplus AF$.

Proposizione 3.5.

Siano $E,F$ slc. Supponiamo che $AE<F$ e $F<AE$; allora $AE \simeq F$.

Dimostrazione.

Siano $F_0, E_0$ t.c. $AE \simeq F \oplus F_0$, $F \simeq AE \oplus E_0$, allora si ha

$$AE \simeq A(AE) \simeq A(F \oplus F_0) \simeq AF \oplus AF_0 \simeq F \oplus AF \oplus AF_0 \simeq F \oplus A(AE) \simeq F \oplus AE$$

ed anche

$$F \simeq AE + E_0 \simeq A(AE) \oplus E_0 \simeq A(AE \oplus E) \oplus E_0 \simeq A(AE) \oplus AE \oplus E_0 \simeq$$

$$\simeq AE \oplus F. \quad \square$$

Osserviamo che negli esempi precedenti l'applicazione $A$ era:

$AE = E \oplus E$ nell'esempio 1,

$AE = (E \oplus E \oplus \ldots)_p$ nell'esempio 2,

$AE = E^{\mathbb{N}}$ nell'esempio 3,

e si supponeva $E \simeq AE$. Diamo altri esempi:

Esempio 4.

Se $AE = E^{(\mathbb{N})}$ la (i), (ii) si verificano facilmente.

Esempio 5.

Sia G uno slc tale che $G \simeq G \oplus \mathbb{K}$ e $G \simeq G\, \tilde{\otimes}_\alpha\, G$, con $\alpha = \varepsilon, \pi$; definiamo $AE = G\, \tilde{\otimes}_\alpha E$.

La verifica di (ii) è immediata tenendo conto delle proprietà del prodotto tensoriale. Proviamo (i):

$$A(AE) = G\, \tilde{\otimes}_\alpha (G\, \tilde{\otimes}_\alpha E) \simeq (G\, \tilde{\otimes}_\alpha G)\, \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq G\, \tilde{\otimes}_\alpha E = AE$$

$$AE = G\, \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq (G\, \tilde{\oplus}\, \mathbb{K})\, \tilde{\otimes}_\alpha E \simeq G\, \tilde{\otimes}_\alpha E \oplus E = AE \oplus E\ . \qquad \square$$

## §3. Rappresentazione di $C(\Omega)$ e di $C_o(K)$.

Siano $K, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, K compatto con interno non vuoto e $\Omega(\neq\emptyset)$ aperto, $C(\Omega)$ sarà lo spazio di Fréchet delle funzioni continue su $\Omega$ con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, $C_o(K)$ lo spazio di Banach delle funzioni continue su $\mathbb{R}^n$ e a supporto contenuto in K con la norma del sup.

In questo paragrafo proveremo i seguenti risultati (dovuti a M.Valdivia (cf. [40],[37]).

Teorema 3.6

$$C_o(K) \simeq C([0,1]).$$

Teorema 3.7

$$C(\Omega) \simeq C([0,1])^{\mathbb{N}}.$$

Alla dimostrazione è necessario premettere i seguenti lemmi.

Lemma 3.8

(i) $C([0,1]) \simeq C([0,1]) \oplus \mathbb{K}$

(ii) $C([0,1]) \simeq C([0,1]) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C([0,1])$

Dimostrazione.

(i)Per H e K compatti l'applicazione $T : C(K) \oplus C(H) \to C(K \dot{\cup} H)$ $\dot{\cup}$ = unione disgiunta) definita da

$$T(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in K \\ g(x) & \text{se} \quad x \in H \end{cases}$$

è un isometria fra gli spazi indicati.

Se $K = [0,1]$ e H è un punto per il teorema di Milutin si ha la (i).

(ii) Per il teorema di Milutin è sufficiente provare che

$$C([0,1] \times [0,1]) \simeq C([0,1]) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C([0,1]).$$

Dimostriamo più in generale che

$$C(H \times K) \equiv C(H) \tilde{\otimes}_{\varepsilon} C(K) \qquad \text{H e K compatti.}$$

Posto per $z = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i \in C(H) \otimes_{\varepsilon} C(K)$,

$$Tz(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \in C(H \times K).$$

Tz non dipende dalla rappresentazione di z e T è un'isometria; infatti:

$$\varepsilon(z) = \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle f_i,\mu\rangle\langle g_i,\nu\rangle \right| =$$

$$= \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \sum_{i=1}^{n} \int_H f_i d\mu \int_K g_i d\nu \right| =$$

$$= \sup_{\|\mu\|=\|\nu\|=1} \left| \int_{HxK} \sum_{i=1}^{n} f_i \; g_i d(\mu\otimes\nu) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \right| ;$$

d'altra parte

$$\sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y) \right| =$$

$$\sup_{(x,y)\in HxK} \left| \sum_{i=1}^{n} \langle f_i,\delta_x\rangle\langle g_i,\delta_y\rangle \right| \leq \varepsilon(z)$$

poiché $\|\delta_x\| = \|\delta_y\| = 1.$

Allora a meno di isometrie $C(H) \otimes_\varepsilon C(K)$ è denso in $C(HxK)$ per il teorema di Stone-Weierstrass e quindi il suo completamento $C(H) \tilde{\otimes}_\varepsilon C(K)$ è $C(HxK)$.

Lemma 3.9.

Sia $\emptyset \neq \Omega \subset R^n$ aperto. Esiste un ricoprimento di $\Omega$ di scatole compatte che subordina una partizione dell'unità di classe $C^\infty$.

Dimostrazione.

Sia $(K_j)$ una successione di compatti invadenti $\Omega$ tali che $\emptyset \neq \mathring{K}_j \subset K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ $\forall j$. Ricopriamo $K_1$ con un numero finito di scatole $\{M_1^{(1)},\ldots M_{m_1}^{(1)}\}$ contenute in $\mathring{K}_2$, prendendo per ogni $x \in K_1$ una scatola $M_x \subset \mathring{K}_2$ ed estraendo poi un ricoprimento finito di $K_1$. Allo stesso modo, per $j \geq 2$, ricopriamo $K_j \setminus \mathring{K}_{j-1}$ con un numero finito di scatole $\{M_1^{(j)},\ldots,M_{m_j}^{(j)}\}$ contenute in $K_{j+1}$.

La famiglia $(M_i^{(j)})$ è localmente finita e quindi si può costruire in modo standard una partizione dell'unità di classe $C^\infty$ ad essa subordinata. $\square$

Dimostrazione del teorema 3.6.

Per il lemma 3.8 si può applicare il metodo di decomposizione di Pełczyński come nell'esempio 5; basta quindi provare che $C([0,1]) < C_0(K)$ e $C_0(K) < C([0,1])$.

Sia $P$ una scatola compatta di $R^n$ che contiene $K$, e poniamo $M = P \setminus \mathring{K}$. Se $T$ è l'operatore di estensione fornito dal Teorema di Borsuk, $T : C(M) \to C(P)$, proviamo che si ha $C(P) = T(C(M)) \oplus C_0(K)$.

Infatti se $f \in C_0(K) \cap T(C(M))$, $f_{|M} = 0$ ed $f = T(f_{|M}) = 0$ per la linearità di T; ne segue che $C_0(K) \cap T(C(M)) = \{0\}$. Inoltre, se $f \in C(P)$, $f = T(f_{|M}) + (f - T(f_{|M}))$, con $T(f_{|M}) \in T(C(M))$ e $(f - T(f_{|M})) \in C_0(K)$. Quindi $C_0(K) < C([0,1]) \simeq C(P)$.

Sia ora $Q \neq \emptyset$ una scatola chiusa contenuta in $\mathring{K}$ e $\psi \in C_0(K)$ una funzione che vale 1 su Q, ($\|\psi\| = 1$); tramite il teorema di Borsuk si costruisce immediatamente un operatore di estensione isometrico S da $C(Q)$ in $C_0(K)$. Se allora $R : C_0(K) \to C(Q)$ è l'operatore restrizione si ha

$$I_{C(Q)} = RS,$$

e quindi $P = SR$ è proiezione di $C_0(K)$ su $C(Q) \simeq C([0,1])$.

**Dimostrazione del teorema 3.7.**

In virtù della Proposizione 3.5 con $AE = E^{\mathbb{N}}$, è sufficiente provare che $C(\Omega) < C([0,1])^{\mathbb{N}}$ e che $C([0,1])^{\mathbb{N}} < C(\Omega)$.

Siano $\mathcal{M} = (M_i)$ come nel Lemma 3.9 e $(\psi_i)$ una partizione dell'unità ad essa subordinata. Definiamo gli operatori

$$R : C(\Omega) \to \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i)$$

$$Rf = (f_{|M_i})_i$$

e

$$T : \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i) \to C(\Omega)$$

$$T(f_i)_i = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i f_i$$

evidentemente $TR = I_{C(\Omega)}$, e quindi, al solito, $C(\Omega) < \prod_{i=1}^{\infty} C(M_i)$ che è isomorfo a $C([0,1])^{\mathbb{N}}$ per il Teorema di Milutin.

Per dimostrare l'altra relazione siano $(N_i)$ e $(P_i)$ due successioni di scatole compatte contenute in $\Omega$ e tali che $N_i \subset \overset{\circ}{P}_i$ $\forall i$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$, e siano $(\eta_i)$ funzioni tali che $\eta_i \in C_0(P_i)$, $\eta_i = 1$ in $N_i$ $\|\eta_i\| = 1$, $\forall i$.

Definiamo gli operatori

$$S : \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i) \to C(\Omega)$$

$$S(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \tilde{f}_i ,$$

dove $\tilde{f}_i \in C(P_i)$ sono le estensioni date dal teorema di Borsuk e

$$R : C(\Omega) \to \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i)$$

$$Rf = (f_{|N_i}) \; .$$

Ancora una volta si ha $RS = I_{\prod_{i=1}^{\infty} C(N_i)}$ e pertanto $C([0,1])^{\mathbb{N}} \simeq$ $\simeq \prod_{i=1}^{\infty} C(N_i) < C(\Omega)$. $\square$

Dalle proprietà generali dei duali di prodotti topologici, essendo $\mathcal{M}(\Omega) = C(\Omega)'$ e $\mathcal{M}([0,1]) = C([0,1])'$, segue

Corollario 3.10

$$\mathcal{M}(\Omega) \simeq \mathcal{M}([0,1])^{(\mathbb{N})} \quad .$$

I risultati mostrati in questo paragrafo possono essere generalizzati nel caso che $\Omega$ sia aperto di uno spazio topologico più generale, utilizzando tecniche analoghe a quelle viste qui. Per questi sviluppi confronta [40], [37] e [38].

## 4. RAPPRESENTAZIONI DI SPAZI DI FUNZIONI INFINITAMENTE DIFFERENZIABILI E DI DISTRIBUZIONI.

### §1. Spazi di successioni.

Esporremo rappresentazioni degli spazi $C^{\infty}_{2\pi}$, $C^{\infty}([0,1])$, $H(\mathbb{C})$, $H(D)$, $\mathscr{D}(K)$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$ tramite spazi di successioni. Perciò richiamiamo brevemente gli aspetti fondamentali della teoria di questa spazi (cf. [12], [25]).

Uno spazio vettoriale $\lambda$ t.c. $\varphi \subset \lambda \subset \omega$, si dirà spazio di successioni. Il suo duale di Köthe $\lambda^{x}$ è definito da $\lambda^{x} = \{\alpha \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \alpha_n| < \infty \ \forall \xi \in \lambda\}$, ed è anch'esso ovviamente uno spazio di successioni. la dualità $<\xi,\alpha> = \sum_n \xi_n \alpha_n$ induce in modo naturale la topologia debole $\sigma(\lambda,\lambda^{x})$ su $\lambda$; più utile nel seguito sarà però la topologia $\nu(\lambda,\lambda^{x})$, che chiameremo normale, definita dalla famiglia di seminorme

$$p_{\alpha}(\xi) \equiv \sum_n |\xi_n \alpha_n| \qquad \alpha \in \lambda^{x} .$$

Osserviamo che il completamento di $\lambda[\nu]$ è $\lambda^{xx}$ e che $\varphi$ è denso in $\lambda[\nu]$. Inoltre $\nu$ è compatibile con la dualità $<\lambda,\lambda^{x}>: \lambda^{x} \subset \lambda'$ perché, dato $\alpha \in \lambda^{x}$, $<\xi,\alpha> = \sum_n \xi_n \alpha_n$ definisce un funzionale continuo, essendo $|<\xi,\alpha>| \le \sum_n |\xi_n \alpha_n| = p_{\alpha}(\xi)$; d'altra parte, se $f \in \lambda'$, esistono $p_{\alpha}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che $p_{\alpha}(\xi) \le \varepsilon \Rightarrow |f(\xi)| \le 1$;

posto $\beta_n = f(e_n)$, si ha $p_\alpha(\varepsilon \frac{e_n}{|\alpha_n|}) = \varepsilon$ e quindi $|f(\varepsilon \frac{e_n}{|\alpha_n|})| =$
$= \varepsilon \frac{|\beta_n|}{|\alpha_n|} \leq 1$, da cui $|\beta_n| \leq \frac{1}{\varepsilon}|\alpha_n|$: questo prova che $(\beta_n) \in \lambda^x$;

poiché f e il funzionale $\xi \to \sum_n \xi_n \beta_n$ coincidono su $\varphi$ e $\varphi$ è denso in $\lambda$ possiamo identificare f e $\beta = (\beta_n)$ e concludere che $\lambda' \subset \lambda^x$.

Uno spazio di successioni $\lambda$ si dice perfetto se $\lambda^{xx} = \lambda$.

Esempi.

1. $(\ell^p)^x = \ell^{p'}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e quindi ogni $\ell^p$ è perfetto (anche $\ell^1$ ed $\ell^\infty$!).

$\ell^{p'} \subset (\ell^p)^x$ è ovvio per la diseguaglianza di Hölder. Viceversa, se $\alpha \in (\ell^p)^x$, allora $\sum_n |\xi_n \alpha_n| < \infty$ $\forall \xi \in \ell^p$; posto $\alpha^{(k)} =$
$= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, 0 \ldots)$, $\alpha^{(k)} \in \ell^{p'}$, $\alpha^{(k)} \to \alpha$ debolmente e quindi per il teorema di Banach-Steinhaus $\alpha \in \ell^{p'}$; questo conclude la dimostrazione se $1 \leq p < \infty$.

Se $p = \infty$, basta scegliere $\xi_n = 1$ $\forall n$ per ottenere $\alpha \in \ell^1$.

2. $c_0^x = \ell^1$, e quindi $c_0$ non è perfetto.

3. $\omega^x = \varphi$, $\varphi^x = \omega$, perciò $\varphi$ e $\omega$ sono perfetti.

4. L'unico spazio di successioni $\lambda$ tale che $\lambda = \lambda^x$ è $\ell^2$. Infatti se $\xi \in \lambda$ anche $\bar{\xi} \in \lambda = \lambda^x$ e quindi

$\sum_n |\xi_n|^2 < \infty$, cioé $\lambda \subset \ell^2$.

D'altra parte $\lambda \subset \ell^2$ implica $(\ell^2)^x \subset \lambda^x$, cioé $\ell^2 \subset \lambda$.

5. $\prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ e $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ sono spazi di successioni (basta pensare

ogni elemento come successione a due indici) e verificano;

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right)^x = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \lambda_i^x$$

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right)^x = \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i^x .$$

Spazi di Köthe.

Gli spazi di successioni che saranno più utili nel seguito spno gli spazi di Köthe: sia $P \subset \omega$ tale che:

K1 $\alpha \in P \Longrightarrow \alpha_n \geq 0 \quad \forall n$

K2 $\alpha, \beta \in P \Longrightarrow \exists \gamma \in P: \max\{\alpha_n, \beta_n\} \leq \gamma_n \quad \forall n$

K3 per ogni n, esiste $\alpha \in P$: $\alpha_n > 0$;

definiamo

$\Lambda(P) = \{\xi \in \ : p_\alpha(\xi) = (\sum_n |\xi_n| \alpha_n < \infty \ \forall \alpha \in P\}$, con le seminorme

indicate. $\Lambda(P)$ è completo (K3 consente di ragionare sulle coordinate) e quindi se P è numerabile $\Lambda(P)$ è Fréchet; d'ora in poi P sarà supposto sempre numerabile.

E' interessante notare che la topologia introdotta su

$\Lambda(P)$ coincide con la topologia normale $\nu$. Infatti, con lo stesso ragionamento usato per provare che $\nu$ è compatibile con la dualità $<\lambda,\lambda^{\times}>$, si vede che $\Lambda(P)' = \Lambda(P)^{\times} = \{(\eta_n)\in\omega : | \exists\alpha\in P, \exists M>0 : |\eta_n| \leq M\alpha_n \;\; \forall n\}$ da cui si ha la tesi. Inoltre $\Lambda(P)$ è perfetto perché è completo per la topologia normale.

Sia ora $\alpha = (\alpha_n)$ una successione crescente a termini positivi divergenti. Poniamo $P_\infty(\alpha) = (e^{k\alpha_n})$, $P_1(\alpha) = (e^{-\alpha_n/k})$ $(k\in\mathbb{N})$, e $\Lambda_\infty(\alpha) = \Lambda(P_\infty(\alpha))$, $\Lambda_1(\alpha) = \Lambda(P_1(\alpha))$.

I $\Lambda_\infty(\alpha)$ si dicono spazi di serie di potenze di tipo infinito, i $\Lambda_1(\alpha)$ spazi di serie di potenze di tipo finito.

Per esempio, se $\alpha_n = \log n$, $\Lambda_\infty(\log n) = s$, lo spazio delle successioni rapidamente decrescenti; per quanto detto prima, $s$ è perfetto, $s' = s^{\times}$ che è lo spazio delle successioni a crescenza polinomiale.

Osserviamo che la topologia su $s$ può essere definita anche tramite le seminorme $q_k(\xi) = \sup_n n^k |\xi_n|$.

Le denominazioni usate per $\Lambda_\infty(\alpha)$, $\Lambda_1(\alpha)$ sono legate al fatto che

(i) $H(\mathbb{C}) \simeq \Lambda_\infty(n)$

(ii) $H(D) \simeq \Lambda_1(n)$ $\quad (D = \{|z| < 1\})$.

Dimostrazione.

(i) $H(\mathbb{C}) \ni f = \sum_n a_n z^n \overset{T}{\longmapsto} (a_n)$ , dove $(a_n) \in \Lambda_\infty(n)$ per la diseguaglianza di Cauchy; viceversa, si verifica facilmente che se $(a_n) \in \Lambda_\infty(n)$ allora $\sum_n a_n z^n$ ha raggio di convergenza infinito e definisce perciò una funzione in $H(\mathbb{C})$; quindi T è bigettivo.

Inoltre T è continuo : posto $q_R(f) = \sup_{|z| \leq R} |f(z)|$, $R \in \mathbb{N}$, $q_R(f)$ è una delle seminorme che definiscono la topologia di $H(\mathbb{C})$ e si ha:

$$p_k(Tf) = p_k(a_n) = \sum_n |a_n| e^{kn} \leq q_R(f) \sum_n \left(\frac{e^k}{R}\right)^n \leq c\, q_R(f)$$ per R abbastanza grande.

Per il teorema dell'applicazione aperta T è isomorfismo.

(ii) Tenendo conto che le seminorme di $H(D)$ sono date da

$$q_R(f) = \sup_{|z| \leq 1 - \frac{1}{R}} |f(z)|, \quad R \in \mathbb{N},$$

la dimostrazione è analoga alla precedente. $\square$

Dato uno spazio di successioni perfetto $\lambda$ e uno slc E si costruisce lo spazio $\lambda(E) = \{(x_n) \subset E : p(x_n) \in \lambda$ per ogni seminorma continua p su E$\}$; la topologia su $\lambda(E)$ è definita dalle seminorme:

$$r_{\alpha U}(x_n) = \sum_n |\alpha_n| p_U(x_n), \qquad \alpha \in \lambda^X, \text{ U intorno in E.}$$

E' immediato che $\varphi(E)$ è denso in $\lambda(E)$; inoltre se E è completo anche $\lambda(E)$ lo è. In particolare, se E e $\lambda$ sono Fréchet anche $\lambda(E)$ è Fréchet.

Per esempio, $\ell^1(E)$ è lo spazio delle successioni in E assolutamente sommabili $\ell^\infty(E)$ è lo spazio delle successioni limitate di E, s(E) lo spazio delle successioni "rapidamente convergenti a zero".

Sarà utile nel seguito la seguente proposizione, dovuta a Grothendieck per $\lambda = \ell^1$ (cf. [9]) e successivamente generalizzata da Pietsch (cf. [20] e anche [12]):

**Proposizione 4.1.**

Se E è completo allora $\lambda \tilde{\otimes}_\pi E \simeq \lambda(E)$.

**Dimostrazione.**

Sia $T : \lambda \times E \to \lambda(E)$ così definito.

$$T(\xi,x) = (\xi_n\, x);$$

poiché T è bilineare, possiamo pensarlo esteso su $\lambda \otimes_\pi E$; faremo vedere che è un isomorfismo su un sottospazio denso di $\lambda(E)$; l'estensione di T al completamento sarà l'isomorfismo cercato.

T è continuo: per $z = \sum_{i=1}^{k} \xi^{(i)} \otimes x_i$ si ha:

$$r_{\alpha U}(Tz) \leq \sum_n \sum_{i=1}^{k} |\alpha_n||\xi_n^{(i)}|p_U(x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_U(x_i) \sum_n |\alpha_n||\xi_n^{(i)}| = \sum_{i=1}^{k} p_U(x_i)p_\alpha(\xi^{(i)}),$$

e poiché

$$\Pi_{\alpha,U}(z) = \inf\{ \sum_{i=1}^{k} p_U(x_i) p_\alpha(\xi^{(i)}) \}$$

si ha

$$r_{\alpha U}(Tz) \leq \Pi_{\alpha U}(z) \; .$$

Se ora z è della forma $z = e_n \otimes x$ risulta

$$\Pi_{\alpha U}(z) \leq |\alpha_n| p_U(x) = r_{\alpha U}(Tz),$$

e quindi

$$\Pi_{\alpha U}(z) \leq r_{\alpha U}(Tz) \quad \text{per } z \in \varphi \otimes E;$$

poiché $\varphi \otimes_\pi E$ è denso in $\lambda \otimes_\pi E$ e T è continuo, vale

$$\Pi_{\alpha U}(z) = r_{\alpha U}(Tz)$$

per ogni $z \in \lambda \otimes_\pi E$, $\alpha \in \lambda^x$, U intorno in E.

Poiché $T(\varphi \otimes_\pi E)$ contiene $\varphi(E)$ si ha la tesi.

## §2. Rappresentazioni di $C^\infty_{2\pi}$, $C^\infty(Q)$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Il seguente risultato è dovuto a Grothendieck.

**Teorema 4.2.**

$$C^\infty_{2\pi} \simeq s \; .$$

**Dimostrazione.**

Associamo ad $f \in C^\infty_{2\pi}$ la successione $Tf = (f_h)$ dei suoi coefficienti di Fourier (complessi). Risulta:

$$|h^k f_h| = |\int_{[0,2\pi]^n} h^k f(x) e^{ih\cdot x} dx| =$$

$$= |\int_{[0,2\pi]^n} f(x)\,\partial^k(e^{ih\cdot x})dx| =$$

$$= |\int_{[0,2\pi]^n} \partial^k(f(x))e^{ih\cdot x}dx| \leq c \sup|\partial^k f|$$

e quindi $(f_h)\in s(\mathbf{Z}^n) \simeq s$ e $T : C^\infty_{2\pi} \to s$ è continuo.

L'iniettività segue dall'unicità dello sviluppo e la surgettività dal fatto che $\sum_h \xi_h e^{ih\cdot x}$ è convergente e derivabile termine a termine infinite volte per $(\xi_h)\in s(\mathbf{Z}^n)$.

Per il teorema dell'applicazione aperta T è isomorfismo. $\square$

Con un metodo analogo proveremo anche altri teoremi di rappresentazione; il seguente è originariamente dovuto a Mitjagin [16]:

**Teorema 4.3.**

$C^\infty(Q) \simeq s$, $Q \subset R^n$ scatola compatta.

**Dimostrazione.**

Scegliamo per semplicità $Q = [-1,1]^n$.

Posto $d\mu_i = (1-x_i^2)^{-\frac{1}{2}}dx_i$ $(i=1,\dots,n)$, i polinomi di Čebišev

$$T_j(x_i) = \cos\,(j \arccos x_i) \qquad (j\in N),$$

sono una base ortogonale di $L^2([-1,1],\ \mu_i)$, e quindi

$$T_h(x) = T_{h_1}(x_1) \ldots T_{h_n}(x_n) \qquad (h \in \mathbb{N}^n)$$

sono una base ortogonale in $L^2(Q,\mu)$, dove $\mu = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n$ è la misura prodotto.

Ad $f \in C^\infty(Q)$ associamo la successione $Rf = (f_h)$ dei coefficienti del suo sviluppo nella base $(T_h)$.

Integrando per parti si vede facilmente che:

$$|h^k f_h| \leq c \sum_{|\alpha| \leq |k|} \sup_Q |\partial^\alpha f(x)|;$$

questo prova che $(f_n) \in s(\mathbb{Z}^n) \simeq s$ e che $R : C^\infty(Q) \to s$ è continuo; è chiaro inoltre che $R$ è iniettivo e surgettivo, e quindi è isomorfismo per il teorema dell'applicazione aperta. $\square$

Tenendo conto che le funzioni di Hermite

$$H_j(X) = e^{x^2/2} \frac{d^j}{dx^j}(e^{-x^2})$$

sono una base ortogonale di $L^2(\mathbb{R})$, e quindi $H_h = H_{h_1}(x_1) \ldots H_{h_n}(x_n)$ lo sono in $L^2(\mathbb{R}^n)$, si può procedere come prima e provare il seguente

Teorema 4.4

$$\mathscr{S}(R^n) \simeq s^{\cdot}$$

## §3. Rappresentazioni di $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}(K)$ e loro duali. Un operatore di estensione.

Esiste una vasta letteratura sull'esistenza di operatori di estensione per funzioni $C^\infty$ su sottoinsiemi chiusi di varietà (cf. e.g. [16],[18],[28],[46]); qui è sufficiente provare che, se Q e P sono scatole compatte in $R^n$ con $Q \subset \overset{\circ}{P}$ esiste un operatore continuo di estensione E da $C^\infty(Q)$ in $\mathscr{D}(P)$.

Scegliamo per semplicità di notazione $Q=[-1,1]^n$, $P = [-2,2]^n$.

Data $f \in C^\infty(Q)$ siano $\varphi_1(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1(x) = 1$ per $x_1 \geq 0$ $\varphi_1(x) = 0$ per $x_1 \leq -1/2$, e $f_1 = f\varphi_1$ estesa a zero per $x_1 \leq -1/2$ : $f_1 \in C^\infty(-\infty,1] \times [-1,1]^{n-1}$.

Data la successione $(-2^k)$, esiste per il teorema d'interpolazione 2.14 una funzione intera $F_1$ tale che $F_1(-2^k) = (-1)^k$, sia $F_1(z) = \sum_k a_k z^k$; poniamo:

(*) $\tilde{f}_1(x) = \chi_1(x)\sum_k a_k f_1(-2^k x_1, x_2, \ldots, x_n)$

($\chi_1 \in C^\infty(R^n)$, $\chi_1 = 1$ per $x_1 \in [-1,1]$, $\chi_1 = 0$ per $x_1 \geq 2$) e:

$$E_1^+ f = \begin{cases} f & \text{per } x_1 \in [-1,1] \\ \tilde{f}_1 & \text{per } x_1 \in \,]1,2] \end{cases} ;$$

$$E_1^+ f \in C^\infty([-1,2] \times [-1,1]^{n-1}):$$

infatti avendo moltiplicato per $\varphi_1$ la serie in (*) contiene per ogni x un numero finito di termini; inoltre il raccordo delle derivate per $x_1 = 1$ è assicurato dalla scelta di $F_1$, come si verifica facilmente.

Consideriamo ora i punti $(2^k)$ e una funzione intera $F_2$ t.c. $F_2(2^k) = (-1)^k$; come prima, estendiamo $E_1^+ f$ ad una funzione $E_1 f \in C^\infty([-2,2] \times [-1,1]^{n-1})$ tale che $E_1 f(-2,x_2,\ldots,x_n) = E_1 f(2,x_2,\ldots,x_n) = 0, (E_1 f)_{|Q} = f$.

In modo analogo, per $k=2,\ldots,n$ costruiamo operatori $E_k$ sulle variabili $x_k$ che estendono f da

$$\underbrace{[-2,2] \times \ldots \times [-2,2]}_{k-1 \text{ volte}} \times \underbrace{[-1,1] \times \ldots \times [-1,1]}_{n-k+1 \text{ volte}}$$

a

$$\underbrace{[-2,2] \times \ldots \times [-2,2]}_{k \text{ volte}} \times \underbrace{[-1,1] \times \ldots \times [-1,1]}_{n-k \text{ volte}},$$

e sia $E = E_n \circ E_{n-1} \circ \ldots \circ E_1$. Allora $E : C^\infty(Q) \to \mathcal{D}(P)$ è l'operatore di estensione cercato. $\square$

I seguenti teoremi di rappresentazione sono dovuti a M.Valdivia (cf.[40] e [36]).

**Teorema 4.6.**

$$\mathcal{E}(\Omega) \simeq s^{\mathbb{N}}$$

Dimostrazione.

Proveremo che $\mathscr{E}(\Omega) < s^{\mathbb{N}}$ e che $s^{\mathbb{N}} < \mathscr{E}(\Omega)$. Dal motodo di decomposizione di Pełczynski seguirà la tesi.

Sia $(M_i)$ una partizione di cubi come nel Lemma 3.9, e $(\psi_i)$ l'associata partizione dell'unità. Definiamo gli operatori:

$$R_1 : \mathscr{E}(\Omega) \to \prod_i C^\infty(M_i)$$

$$R_1 f = (f_{|M_i}) ;$$

$$T : \prod_i C^\infty(M_i) \to \mathscr{E}(\Omega)$$

$$T(f_i) = \sum_i \psi_i f_i .$$

Evidentemente $TR_1 = I_{\mathscr{E}(\Omega)}$ e quindi

$$\mathscr{E}(\Omega) < \prod_i C^\infty(M_i) \simeq s^{\mathbb{N}}$$

per il teorema di Mitjagin.

Viceversa, siano $(N_i)$ e $(P_i)$ due successioni di scatole compatte contenute in $\Omega$ tali che $\emptyset \neq N_i \subset \overset{\circ}{P}_i$, $P_i \cap P_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, e siano $(E_i)$ operatori di estensione, $E_i : C^\infty(N_i) \to \mathscr{D}(P_i)$.

Definiamo

$$S : \prod_i C^\infty(N_i) \to \mathscr{E}(\Omega)$$

$$S(f_i) = \sum_i E_i f_i ,$$

$$R_2 : \mathscr{E}(\Omega) \to \prod_i C^\infty(N_i)$$

$$R_2 f = (f_{|N_i});$$

come al solito, $R_2 S = I_{\prod_i C^\infty(N_i)}$, e quindi $s^{\mathbb{N}} < \mathscr{E}(\Omega)$. $\square$

Si ottiene immediatamente per dualità la seguente rappresentazione dello spazio delle distribuzioni a supporto compatto

Corollario 4.7

$$\mathscr{E}'(\Omega) \simeq (s')^{(\mathbb{N})}$$

Teorema 4.8

$$\mathscr{D}(\Omega) \simeq s^{(\mathbb{N})} \quad .$$

Dimostrazione.

Proveremo anche in questo caso

$$\mathscr{D}(\Omega) < s^{(\mathbb{N})}, \; s^{(\mathbb{N})} < \mathscr{D}(\Omega) \quad .$$

Sia $(K_j)$ una successione di compatti invadenti $\Omega$ tali che $\emptyset \neq \mathring{K}_j \subset K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$, e siano $(M_i),(N_i),(P_i)$ scatole compatte tali che:

$(M_i)$ sono costruite come nel lemma 3.9 a partire da $(K_j)$ e subordinano la partizione dell'unità $(\psi_i)$;

$$N_i \subset \mathring{P}_i, \; P_i \subset \mathring{K}_{i+1} \setminus K_i \qquad \forall i.$$

Definiamo gli operatori

$$R_1 \; : \mathscr{D}(\Omega) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} C^\infty(M_i)$$

$$R_1 f = (f_{|M_i});$$

$$T : \bigoplus_{i=1}^{\infty} C^{\infty}(M_i) \to \mathscr{D}(\Omega)$$

$$T(f_i) = \sum_i f_i \psi_i;$$

$$R_2 : \mathscr{D}(\Omega) \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} C^{\infty}(N_i)$$

$$R_2 f = (f_{|N_i});$$

$$S : \bigoplus_{i=1}^{\infty} C^{\infty}(N_i) \to \mathscr{D}(\Omega)$$

$$S(f_i) = \sum_i E_i f_i,$$

dove $E_i : C^{\infty}(N_i) \to \mathscr{D}(P_i)$ sono i soliti operatori di estensione. Si verifica immediatamente che:

$$TR_1 = I_{\mathscr{D}(\Omega)} \quad , \quad R_2 S = I_{\bigoplus_{i=1}^{\infty} C^{\infty}(N_i)} \quad ;$$

poiché $\bigoplus_{i=1}^{\infty} C^{\infty}(N_i) \simeq s^{(\mathbb{N})}$ la tesi è provata. $\square$

Ancora per dualità si ottiene una rappresentazione dello spazio delle distribuzioni:

**Corollario 4.9**

$$\mathscr{D}'(\Omega) \simeq (s')^{\mathbb{N}} .$$

M.Valdivia ha provato anche una rappresentazione dello spazio $\mathscr{D}(K)$; della dimostrazione daremo qui solo un cenno; rimandiamo a Valdivia ([39],[40]) e Vogt ([45]) per la prova completa. In essa si usano risultati sugli spazi nucleari (cf. [43],[44]) la cui esposizione ci è sembrata andare al di là degli scopi di queste note.

. Teorema 4.10

$$\mathscr{D}(K) \simeq s, \; K \subset R^n \text{ compatto}, \; \mathring{K} \neq \emptyset.$$

Dimostrazione (cenno)

Assumiamo senza darne prova che $\mathscr{D}(K) < s$ e mostriamo invece che $s < \mathscr{D}(K)$.

Infatti, siano $Q \subset \mathring{K}$ una scatola compatta, ed $E: C^\infty(Q) \to \mathscr{D}(K)$ un operatore di estensione; sia inoltre $R : \mathscr{D}(K) \to C^\infty(Q)$ l'operatore di restrizione; si ha:

$$RE = I_{C^\infty(Q)} ,$$

da cui, poiché $C^\infty(Q) \simeq s$, $s < \mathscr{D}(K)$.

D'altra parte dalla proposizione 4.1 segue che $s(s) \simeq s \hat{\otimes}_\pi s$, e, scrivendo ogni elemento di s come successione doppia, si vede che $s(s) \simeq s$; ne segue che $s\hat{\otimes}_\pi s \simeq s$, e quindi si può applicare il metodo di decomposizione di Pełczyński (cf. l'esempio 5), ottenendo la tesi.

## §4. Quozienti dello spazio $\mathscr{D}(\Omega)$.

Mostreremo che $\mathscr{D}(\Omega)$ non è B-completo: infatti ha un quoziente isomorfo a un sottospazio denso proprio di $\omega$ : tale quoziente evidentemente non è completo e perciò neanche $B_r$-completo (cf. Proposizione 2.4); ne seguirà che $\mathscr{D}(\Omega)$ non è B-completo. (cf. [29] nel caso $\Omega = R^{\mathbb{N}}$).

In realtà $\mathscr{D}(\Omega)$ non è neanche $B_r$-completo (cf. [35]).

Un risultato che sarà utile (ma è interessante di per sé) è il seguente, dovuto originariamente ad Eidelheit (cf. [8]); ne riportiamo la dimostrazione per completezza.

Teorema 4.10

Se E è uno spazio di Fréchet non Banach allora E ha un quoziente isomorfo ad $\omega$ .

Dimostrazione.

Poiché E di Fréchet ma non di Banach esiste in E una base d'intorni $\mathscr{U}$ tale che se $(B_n)$ è la corrispondente famiglia dei polari $B_n$ non assorbe $B_{n+1}$ per ogni n; allora posto $E_n = \mathrm{span}(B_n)$ per ogni n, esiste $x'_n \in E_n \setminus E_{n-1}$.

Se $F=\mathrm{span}(x'_n)$, $F \cap B_n$ ha dimensione finita per ogni n, e quindi è debolmente chiuso; per il teorema di Krein-Smulian F è perciò debolmente chiuso.

Sia $G = E/F°$; mostriamo che $G \simeq \omega$ ; basta provare che G è debolmente completo; infatti è in tal caso isomorfo a $\mathbb{K}^I$ e I è numerabile perché G è metrizzabile. Poiché i compatti di $F=G'$ sono di dimensione finita, le topologie $\sigma(G,F)$ e $\mu(G,F)$ coincidono; ma $\mu(G,F)$ è la topologia quoziente (perché G è Fréchet) e quindi G è debolmente completo. $\square$

Sia allora G un sottospazio di s tale che $s/G \simeq \omega$.

Risulta:

$$\frac{s\tilde{\otimes}_\pi s}{s\tilde{\otimes}_\pi G} \simeq s\ \tilde{\otimes}_\pi (s/G) = s\tilde{\otimes}_\pi \omega = s\ \tilde{\otimes}_\pi\ \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \simeq (s\ \tilde{\otimes}_\pi\ \mathbb{K})^{\mathbb{N}} \simeq s^{\mathbb{N}} \quad ,$$

cioé: s ha un quoziente isomorfo ad $s^{\mathbb{N}}$.

Siamo ora in grado di provare il seguente

**Teorema 4.11**

$\mathscr{D}(\Omega)$ ha un quoziente isomorfo ad un sottospazio denso e proprio di $\omega$.

**Dimostrazione.**

$\mathscr{D}(\Omega) \simeq s^{(\mathbb{N})} \simeq s \times s^{(\mathbb{N})}$, e quindi, con L opportuno:

$$\mathscr{D}(\Omega)/L \simeq s^{\mathbb{N}} \times s^{(\mathbb{N})};$$

per il teorema 4.10 (applcato ad ogni s in $s^{(\mathbb{N})}$) esiste un sottospazio H di $\mathscr{D}(\Omega)$ tale che

$$\mathscr{D}(\Omega)/_H \simeq s^{\mathbb{N}} \times \omega^{(\mathbb{N})}.$$

Sia

$$T : s^{\mathbb{N}} \times \omega^{(\mathbb{N})} \to \omega^{\mathbb{N}}$$

così definito:

$$T(\xi, \eta) = \xi+\eta \ , \text{ per } \ \xi \in s^{\mathbb{N}},\ \eta \in \omega^{(\mathbb{N})}.$$

T è continuo e ha immagine densa, perché $R(T) = T(s^{\mathbb{N}} \times \omega^{(\mathbb{N})}) \supset \varphi^{\mathbb{N}}$, e propria perché, ad esempio, $\xi = \xi^{(i)}$, con $\xi^{(i)} = (1,1,\ldots,\ldots,1,\ldots) \notin R(T)$.

Ammettiamo ora per un attimo che T sia un omomorfismo debole, in modo che l'applicazione indotta

$$\tilde{T} : E = \frac{s^{\mathbb{N}} \times \omega^{(\mathbb{N})}}{T^{-1}(0)} \to R(T) \quad .$$

Sia un isomorfismo debole. E ha la topologia di Mackey perché è quoziente di uno spazio con la topologia di Mackey, ed anche R(T) perché è metrizzabile. Segue dalla proposizione 1.4 che $\tilde{T}$ è isomorfismo.

Ne segue che $\mathscr{D}(\Omega)$ ha un quoziente isomorfo ad un sottospazio denso e proprio di $\omega$.

Resta da provare che T è un omomorfismo debole, o, equivalentemente, che R(T') è debolmente chiuso. Risulta:

$$T' : \varphi^{(\mathbb{N})} \to (s')^{(\mathbb{N})} \times \varphi^{\mathbb{N}}$$
$$T'(\xi) = (\xi, \xi) \quad .$$

Lo spazio

$$G = \{(\xi', \xi') : \xi' \in \varphi^{\mathbb{N}}\}$$

è il grafico dell'aggiunto dell'inclusione di $s^{(\mathbb{N})}$ in $\omega^{(\mathbb{N})}$ e pertanto è debolmente chiuso in $(s')^{\mathbb{N}} \times \varphi^{\mathbb{N}}$; ne segue che

$$F = G\cap((s')^{(\mathbb{N})} \times \varphi^{\mathbb{N}})$$

è debolmente chiuso in $(s')^{(\mathbb{N})} \times \varphi^{\mathbb{N}}$ .

D'altra parte non è difficile convincersi che $F=R(T')$. $\square$

In conclusione segnaliamo che anche $\mathscr{D}'(\Omega)$ non è $B_r$-completo; anche per questo risultato rinviamo a M.Valdivia [32].

TABELLA DELLE RAPPRESENTAZIONI

$C_0(K) \simeq C([0,1])$

$C(\Omega) \simeq C([0,1])^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{M}(K) \simeq \mathcal{M}([0,1])$

$\mathcal{M}(\Omega) \simeq \mathcal{M}([0,1])^{(N)}$

$C^\infty_{2\pi} \simeq s$

$C^\infty(Q) \simeq s$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \simeq s$

$\mathcal{E}(\Omega) \simeq s^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{E}'(\Omega) \simeq (s')^{(\mathbb{N})}$

$\mathcal{D}(\Omega) \simeq s^{(\mathbb{N})}$

$\mathcal{D}'(\Omega) \simeq (s')^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{D}(K) \simeq s$

BIBLIOGRAFIA

[1] S.BANACH, *Théorie des opérations linéaires,* Monografje Matematiczne, Warsaw, 1932.

[2] K.BORSUK, Über die Isomorphic der Funktionalraume, *Bull. Int. Acad. Pol. Sci.* 1933,1-10.

[3] N.BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques,* Hermann, Act.Sci. et Ind. Voll.1189, 1229, Paris, 1953,1955.

[4] M.DE WILDE, *Closed Graph Theorems and Webbed Spaces,* Pitman, London, 1978.

[5] J.DIEUDONNÉ, Sur les propriétés de permanence de certains espaces vectoriels topologiques, *Ann.Soc.Polon.Math.* 25(1952), 50-55

[6] J.DIEUDONNÉ-L.SCHWARTZ, La dualité dans les espaces $(\mathscr{F})$ et $(\mathscr{L}\mathscr{F})$, *Ann.Inst. Fourier* 1(1949), 61-101.

[7] N.DUNFORD-J.T.SCHWARTZ, *Linear Operators,* Part. I: General Theory, Interscience, New York, 1958.

[8] M.EIDELHEIT, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, *Studia Math.* 6 (1936), 139-148.

[9] A.GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires,* Mem.Amer.Math.Soc. 16(1955).

[10] H.JARCHOW, *Locally Ccnvex Spaces,* Teubner, Stuttgart, 1981.

[11] Y.KOMURA, On Linear Topological Spaces, *Kumamoto J. Sciences* 5(A)(1962), 148-157.

[12] G.KÖTHE, *Topological Vector Spaces,* Vol.I e II, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969 e 1979.

[13] G.KÖTHE, Uber zwei Satze von Banach, *Math. Z.* 53(1950) 203-209

[14] J.LINDENSTRAUSS-L.TZAFRIRI, *Classical Banach Spaces,* vol.I (Sequence Spaces) e vol.II (Function Spaces), Springer,Berlin-Heidelberg-New York, 1977 e 1979.

[15] M.MAHOWALD, Barreled Spaces and the Closed Graph Theorem, *J.London Math. Soc.* 36(1961), 108-110.

[16] B.S.MITJAGIN, Approximate Dimension and Bases in Nuclear Spaces, *Usp.Mat.Nauk.* 16(1961),73-132 (in russo); Traduzione in inglese in *Russian Math. Surveys* 16(1961), 59-127.

[17] V.B.MOSCATELLI, Sur une classe d'espaces localement convexes B-complètes, *C.R.Acad.Sc.Paris* Sér.A, **276**(1973), 1205-1208.

[18] Z.OGRODZKA, On Simoultaneous extension of infinitely differentiable functions, *Studia Math.* 28(1967), 193-207.

[19] A.PEŁCZYNSKI, Projections in Certain Banach Spaces, *Studia Math.* **19**(1960), 209-228.

[20] A.PIETSCH, Zur Theorie der Topologischen Tensorprodukte, *Math. Nachr.* 25(1963) 19-31.

[21] V.PTAK, On Complete Topological Vector Spaces, *Czech.Math.J.* 78(1953), 301-364 (in russo).

[22] V.PTAK, Completeness and the Open Mapping Theorem, *Bull.Soc.Math. France* **86**(1958), 41-74.

[23] A.P.ROBERTSON-W.J.ROBERTSON, On the Closed Graph Theorem, *Proc. Glasgow Math. Ass.* 3(1956), 9-12.

[24] W.J.ROBERTSON, On the Closed Graph Theorem and Spaces with Webs, *Proc. London Math. Soc.* **24**(1972), 692-738.

[25] W.H.RUCKLE, *Sequence Spaces*, Pitman, London, 1981.

[26] H.SCHAEFER, *Topological Vector Spaces*, Springer, Berlin Heidelberg -New York, 1971.

[27] R.SCHATTEN, *A Theory of Cross-Spaces*, Princeton, U.P., Princeton, 1950.

[28] R.T.SEELEY, Extension of $C^{\infty}$ Functions Defined in a Half-Space, *Proc.Amer.Math.Soc.* **15**(1964), 625-626.

[29] O.G.SMOLJANOV, The Space $\mathscr{D}$ is not Hereditarily Complete, *Izv. Akad. Nauk SSSR* Ser.Mat. 35(1971), 686-696 (in russo). Traduzione in inglese in *Math. USSR Izv.* 5(1971), 696-710.

[30] M.VALDIVIA, El teorema general de la gráfica cerrada en los espacios vectoriales localment convexos, *Rev.Real.Acad.Cienc.Madrid* 52 (1968), 553-562.

[31] M.VALDIVIA, Sobre el teorema de la grafica cerrada, *Collectanea Math.* 27(1971), 51-72.

[32] M.VALDIVIA, The Space of Distributions $\mathscr{D}'(\Omega)$ is not $B_r$-Complete, *Math. Ann.* 21(1974), 145-149.

[33] M.VALDIVIA, On $B_r$-Completeness, *Ann.Inst. Fourier* 25(1975), 235-245.

[34] M.VALDIVIA, On Countable Locally Convex Direct Sums, *Arch.Math.* 26(1975), 407-413.

[35] M.VALDIVIA, The Space $\mathscr{D}(\Omega)$ is not $B_r$-Complete, *Ann.Inst.Fourier* 27(1977), 29-43.

[36] M.VALDIVIA, Representaciones de los espacios $\mathscr{D}(\Omega)$ y $\mathscr{D}'(\Omega)$ *Rev. Real. Acad.Cienc.Madrid* 72(1978),570-571.

[37] M.VALDIVIA, Sobre ciertos espacios de funciones continuas, *Rev.Real. Acad.Cienc. Madrid* 73(1979), 485-490.

[38] M.VALDIVIA, Espacios de medidas de Radon, *Rev.Real.Acad.Cienc. Madrid* 74(1980), 91-98.

[39] M.VALDIVIA, A Representation of the Space $\mathscr{D}(K)$, *J.Reine Angew. Math.* 320(1980), 97-98.

[40] M.VALDIVIA, *Topics in Locally Convex Spaces,* North-Holland Amsterdam-New York-Oxford, 1982.

[41] M.VALDIVIA, $B_r$-Complete Spaces which are not B-Complete, *Math.Z.* 185(1984), 253-259.

[42] M.VALDIVIA, On Slowikowski, Raikov and De Wilde Closed Graph Theorems, preprint.

[43] D.VOGT, Subspaces and Quotient Spaces of (s), in *Functional Analysis. Surveys and Recent Results* (eds: K.D.Bierstedt and Fuchsteiner), North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1977, pp.167-187.

[44] D.VOGT, Sequence Spaces Representations of Spaces of Test Functions and Distributions, in *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory* ( ed. G.I.Zapata), Marcel Dekker Inc. New York, 1983, pp.405-443.

[46] H.WHITNEY, Analytic Extension of Differentiable Functions Defined in the Closed Sets, *Trans.Am.Math.Soc.* **36**(1934), 63-89.