Carlo Marchini (*)

La Teoria Alternativa degli Insiemi, sue ragioni e confronto con teorie classiche. (**)

Capitolo I. *La formalizzazione della Teoria degli Insiemi.*

1) Introduzione.

Parlare di matematica alternativa ha oggi un connotato tecnico che cercherò di illustrare brevemente in seguito. Il punto centrale della ricostruzione alternativa è però la Teoria degli Insiemi usata come teoria fondazionale. La scuola cecoslovacca ha inteso rifondare la matematica partendo, come aveva fatto o proposto Cantor, dalla Teoria degli Insiemi, ma utilizzando una interpretazione degli insiemi sostanzialmente diversa da quella classica e questo potrebbe essere visto come una nuova proposta, nel senso della richiesta di [ML].

Per meglio capire la portata innovativa dell'approccio alternativo è opportuno confrontarlo con quello ormai ritenuto classico. Perciò mi soffermo brevemente su alcuni aspetti di tre sistemi formali che si sono presentati, in ordine di tempo e di sviluppo concettuale: i sistemi di Frege, Zermelo, (Von Neumann) Bernays e Gödel. Per brevità li indico con sigle: **F**, **Z** (e poi **ZF**), **NBG**.

a) **F** (1879-84 cfr. [F1] e [F2]) è il sistema "più bello" che si possa pensare; cerca di tradurre formalmente le idee di Cantor e nasce dall'analisi del concetto di "proprietà" identificato con "formula". Gli assiomi sono :

(*) Indirizzo: Dipartimento di Matematica di Lecce - Via Arnesano 73100 LECCE.

(**) Seminario tenuto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce negli A.A. 1987/88 e 1988/89.

$\boxed{\textbf{F1} \quad (\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z\in x \Leftrightarrow z\in y))}$

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi.

$\boxed{\textbf{F2} \quad \text{(schema: per ogni formula } \varphi(x)\text{)} \quad (\exists y)(\forall x)(x\in y \Leftrightarrow \varphi(x))}$

Esistenza dell'insieme costituito da tutti gli oggetti che godono di una stessa proprietà. Con scrittura equivalente, per ogni formula $\varphi(z)$,

$\boxed{\textbf{F2'} \quad (\forall x)(x\in\{z \mid \varphi(z)\} \Leftrightarrow \varphi(x))}$.

Dunque data una proprietà, esiste un unico insieme costituito dagli elementi che soddisfano la proprietà. Tale insieme è denotato da

$$\{x \mid \varphi(x)\}.$$

Applicando questi due soli assiomi ed il linguaggio che si era forgiato, Frege riuscì a ricostruire l'analisi, definendo dapprima le operazioni insiemistiche, poi i numeri naturali e, mediante questi, i reali.

Prima di procedere osservo che nel linguaggio di Frege "tutto" è insieme dunque le variabili sono solo minuscole e non minuscole e maiuscole e tonde ecc.

Ad esempio:

$$x\cup y = \{z \mid z\in x \vee z\in y\};$$
$$x\cap y = \{z \mid z\in x \wedge z\in y\};$$
$$(x,y) = \{z \mid z=x \vee z=y\}.$$

Definito $x \subseteq y$ come abbreviazione di $(\forall z)(z\in x \Rightarrow z\in y)$, si ha

$$\mathcal{P}(x) = \{z \mid z \subseteq x\}.$$

Esiste poi un "massimo" insieme, $\{x \mid x = x\}$. Più complessa è la definizione di numero naturale.

Con tutto ciò il sistema è contraddittorio. Ciò fu provato da Russell in una lettera privata diretta a Frege e da quest'ultimo pubblicata, con grande spirito di umiltà scientifica. In seguito a ciò Frege si allontanò dagli studi e dalle ricerche ritenendo che il paradosso di Russell svuotasse di significato l'intero pensiero razionale. Il paradosso di Russell è dato dalla costruzione di un insieme $r = \{z \mid z\notin z\}$. L'antinomia nasce dalla considerazione dei due casi dati da

$$r\in r \vee r\notin r \text{ (}\textit{terzo escluso}\text{)}.$$

Ma $r \in r$ comporta $r \notin r$ e d'altra parte $r \notin r$ comporta $r \in r$. Dunque entrambi i casi portano a contraddizione.

L'analisi di questo paradosso (e di altre antinomie presentate tra la fine del secolo scorso e l'inizio di questo secolo, cfr. [B]) hanno portato a tentativi di soluzione che vengono "classificati" con etichette di vario genere: si parla di *logicismo*, di *neo-cantorismo* e di *intuizionismo*; un posto a parte merita, in questo panorama, poi il tentativo *formalista* di Hilbert. Da notare anche l'impulso dato dal paradosso di Russell allo sviluppo delle logiche non-classiche.

2) Neo-cantorismo.

Come detto si tratta di una scuola di pensiero sorta in risposta ai paradossi, che ha uno dei suoi maggiori "campioni" in E. Zermelo. Per meglio capire la posizione di questo matematico tedesco è bene confrontarla, sul piano filosofico, con quella di Frege. Per Frege, la Matematica come scienza a sé stante non esiste. La sua ricostruzione è puramente logica: le proprietà degli insiemi sono formule, il loro trattamento può essere effettuato con mezzi assolutamente analitici (in senso kantiano), sfruttando le proprietà della Logica, quali, ad esempio, le tautologie, le formule logicamente valide, ecc. Ad esempio si dimostra che

$$x \cup y = y \cup x$$

provando l'equivalenza tautologica tra le formule

$$z \in x \vee z \in y \quad \text{e} \quad z \in y \vee z \in x.$$

Gli insiemi, sempre secondo Frege, sono solo l'aspetto "estensionale" delle proprietà e i risultati sugli insiemi sono conseguenze delle verità logiche e dei due principi sopra enunciati col nome di **F1** e **F2**, la cui evidenza per Frege ed altri matematici, ad esempio Cantor, era banale. Se dunque si pone il problema dell'esistenza degli oggetti, esso è risolto dicendo che gli enti matematici hanno un valore *oggettivo* e "vivono" in un contesto astratto che è la sede del ragionamento stesso.

Ecco perché non può esserci una contraddizione in quanto questa demolirebbe del tutto la ragione umana.

Ma l'antinomia c'è e bisogna prenderne atto.

Zermelo si colloca in una posizione più *matematica* e pragmatica. La Matematica "funziona", come mostrano i suoi sviluppi e le sue applicazioni alle Scienze della Natura, massime la Fisica. Gli insiemi sono utili per semplificare ed unificare problemi abbastanza complessi e distanti; dunque si possono usare, anche come una fondazione per la Matematica, ma non si può accettare un principio come **F2**, responsabile del crollo del sistema di Frege, crollo da qualcuno paragonato alla cacciata dal Paradiso Terrestre. Il motivo è che un principio di costruzione siffatto dà luogo ad enti "troppo grandi". E' bene allora riflettere che quello che serve in Matematica (e non porta a contraddizione) è l'esistenza di alcune operazioni che, applicate ad insiemi, forniscono insiemi: ad esempio, se a è un insieme e b è pure un insieme, anche $a\cup b$ è un insieme; così pure per $x\cap y$, $\{x,y\}$ e $\mathcal{P}(x)$, ecc. Allora, anzi che preoccuparsi di fornire principi troppo generali, accontentiamoci di partire da certi enti, che sono insiemi, ed operare su di essi con operazioni matematicamente interessanti, per ottenere ancora insiemi. L'idea di Frege di identificare le proprietà con le formule è buona (e semplifica molti problemi), ma a partire da essa si può formulare un principio (schema) abbastanza generale che dica che le collezioni degli elementi *di un insieme* che soddisfano una data proprietà è un insieme. Si è poi mostrato che per la Matematica basta ridurre gli enti di partenza al solo insieme vuoto.

b) Si ottengono così gli assiomi di Zermelo (1907/08 cfr. [Z]):

$\boxed{\mathbf{Z1}\ \ (\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z\in x \Leftrightarrow z\in y))}$ (eguaglianza);

$\boxed{\mathbf{Z2}\ \ (\exists x)(\forall y)(y\notin x)}$ (vuoto);

$\boxed{\mathbf{Z3}\ \ (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w\in z \Leftrightarrow (w=x \vee w=y))}$ (coppia non ordinata);

$\boxed{\mathbf{Z4}\ \ (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists w)(w\in x \wedge z\in w))}$ (unione unaria);

$\boxed{\mathbf{Z5}\ \ (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow z\subseteq x)}$ (parti);

$\boxed{\mathbf{Z6}\ \ (\forall x)((\exists y)(y\in x) \Rightarrow (\exists z)(z\in x \wedge (\forall w)(w\in z \Rightarrow w\notin x)))}$ (fondazione);

ed uno schema: per ogni formula $\varphi(x)$,

$\boxed{\mathbf{Z7}_{\varphi(x)}\ \ (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (z\in x \wedge \varphi(z)))}$ (isolamento).

Accanto a questi assiomi si deve poi aggiungere un assioma d'infinito, che può essere formulato come segue:

Z8 $(\exists x)(\emptyset\in x \wedge (\forall y)(y\in x \Rightarrow \{y\}\in x))$	(infinito).

Tralasciando l'assioma **Z6**, la cui funzione pare (ancora oggi) sia quella di permettere una certa semplificazione tecnica nelle dimostrazioni, gli unici due assiomi esistenziali non condizionati sono **Z2**, esistenza del vuoto e **Z8**, esistenza di un infinito. Si possono riformulare gli assiomi con simboli più consueti, introdotti proprio grazie agli assiomi [1] corrispondenti:

Z2' $(\forall y)(y\notin\emptyset)$	(vuoto);
Z3' $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(w\in\{x,y\} \Leftrightarrow (z=x \vee z=y))$	(coppia non ordinata);
Z4' $(\forall x)(\forall y)(y\in\bigcup(y) \Leftrightarrow (\exists w)(w\in x \wedge y\in w))$	(unione unaria);
Z5' $(\forall x)(\forall y)(y\in\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow y\subseteq x)$	(parti);
Z6' $(\forall x)((\exists y)(y\in x) \Rightarrow (\exists z)(z\in x \wedge (\forall w)(w\in z \Rightarrow w\notin x)))$	(fondazione);

ed uno schema: per ogni formula $\varphi(x)$,

Z7'$_{\varphi(x)}$ $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (z\in\{y\in x \mid \varphi(y)\}))$	(isolamento).

A guardare meglio **Z7** o **Z7'** sembra che la proposta di Zermelo sia ottenuta con un trucco puramente formale: invece di considerare **F2** per tutte le formule $\varphi(y)$, si considera **F2** solo per le formule del tipo $y\in x \wedge \varphi(y)$. In realtà questa presentazione formale è conseguenza di un pensiero profondo che in qualche modo chiama all'esistenza solo quegli insiemi che si possono costruire con le operazioni indicate, ed è ricollegabile alla **VIII** nozione comune euclidea. E poi **F2** basta, assieme a **F1**, tradotto in **Z1**; **Z7** no, bisogna aggiungere gli altri assiomi.

La teoria di Zermelo fu poi migliorata da Fraenkel (1922) che modificò l'assioma qui indicato con **Z7**, generalizzando l'assioma di isolamento ad una versione più applicabile: l'assioma di rimpiazzamento

per ogni formula $\varphi(x)$,

[1] Faccio notare che qui introduco i simboli dopo aver esibito tutti gli assiomi. In realtà i simboli vengono introdotti ciascuno dopo l'assioma corrispettivo. Così, ad esempio, dopo **Z3** si può presentare la riformulazione **Z3'**, prima di **Z4**, ecc.

ZF7 $_{\varphi(x,y)}$	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z) \Rightarrow y=z) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists w)(w\in x \wedge \varphi(w,z)))$

Si può notare che **Z7** è conseguenza di **ZF7**. Il significato intuitivo di **ZF7** è che presa una funzione, l'immagine di un insieme attraverso essa è ancora un insieme. Anche con questa estensione non si ripresenta il paradosso di Russell, perché $\{x \mid x\notin x\}$ non è un insieme, manca la "formuletta magica" $x\in y\wedge$ ... Ma se considero $\{x\in y \mid x\notin x\}$, di qui non riottengo il paradosso perché se $r = \{x\in y \mid x\notin x\}$, allora $r\in r \vee r\notin r$. Ma nel primo caso si ha $r\in y \wedge r\notin r$, dunque questo caso non è possibile. Nel secondo da $r\notin r$. Si ha $r\notin y \vee r\in r$, da cui la conclusione che $r\notin y$. Perciò $r\notin r$ in quanto $r\notin y$. In tal modo si evita l'antinomia. Così non può esistere un insieme universale $\{x \mid x = x\}$, perché altrimenti si ripresenterebbe il paradosso di Russell.

La teoria formale, nota come **ZF**, ha avuto molto successo in Matematica anche se provare in essa risultati sugli insiemi può risultare lungo e faticoso.

3) Le teorie con le classi (1925/28 - 1937 - 1955).

Per ovviare a questo inconveniente sono state presentate varie proposte: una da Von Neumann, [N], un'altra da Bernays [Be] e Gödel, che poi si sono dimostrate equivalenti. L'idea di fondo è che le totalità chiamate in causa da **F2** se pur così formulato, dànno origine a contradizioni, ma si prestano egualmente a snellire la trattazione. Per evitare il paradosso di Russell, basta richiedere che gli oggetti definiti mediante **F2** siano enti di natura diversa dagli insiemi. Così $\{x \mid x\notin x\}$, non sarà un insieme per cui non si porrà più il problema di vedere se l'ente risultante appartiene o no a se stesso. Tali enti vengono indicati col termine linguistico di **classe**. La teoria prevede allora delle classi, come collezioni di oggetti, che però a loro volta sono classi, ma classi più "semplici" o "piccole", visto che le scrivo a sinistra dell'appartenenza. Queste sono gli insiemi di prima. Gli assiomi di **NBG** (teoria di Von Neumann, Bernays e Gödel) tengono conto del desiderio che questa teoria sia un'estensione della teoria **ZF**, in quanto compaiono assiomi che richiamano quelli di **ZF**. Si facilita la distinzione tra insiemi e classi, denotando gli insiemi con lettere minuscole e le classi con lettere maiuscole. Si introduce però una definizione di insieme che riflette la discussione precedente, che identifica gli insiemi nelle classi che vengono poste alla sinistra dell'appartenenza: Set(X) per $(\exists Y)(X \in Y)$.

c) Con questa posizione gli assiomi di **NBG** sono dati da:

NBG1 $(\forall X)(\forall Y)(X=Y \Leftrightarrow (\forall Z)(Z \in X \Leftrightarrow Z \in Y))$ (eguaglianza);

NBG2 $(\exists x)(\forall Y)(Y \notin x)$ (vuoto);

NBG3 $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w \in z \Leftrightarrow (w=x \vee w=y))$ (coppia non ordinata);

NBG4 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge z \in w))$ (unione unaria);

NBG5 $(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$ (parti);

NBG6 $(\forall x)((\exists y)(y \in x) \Rightarrow (\exists z)(z \in x \wedge (\forall w)(w \in z \Rightarrow w \notin x)))$ (fondazione);

NBG7 $(\forall X)(\mathrm{Fnc}(X) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists w)(w \in x \wedge \langle w,z \rangle \in X)))$ (rimpiazzamento);

per ogni formula predicativa $\varphi(X)$,

NBG7'$_{\varphi(X)}$ $(\exists X)(\forall x)(x \in X \Leftrightarrow \varphi(x))$ (astrazione).

NBG8 $(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow \{y\} \in x))$ (infinito).

La limitazione alle formule predicative nasce dall'esigenza di evitare i circoli viziosi nel senso di Russell, cioè quel tipo di definizioni usate per definire una totalità per mezzo dei suoi elementi, tra cui la totalità stessa.

Morse-Kelley-Mostowski (cfr. [Ke]) hanno tolto questa limitazione, partendo da concezioni che hanno sapore neo-platonico, cioè che gli enti esistono (nell'*iperuranio*) indipendentemente dalle loro definizioni, dunque non c'è alcun errore nell'usare definizioni impredicative. La teoria da essi proposta, indicata con la sigla **MKM** si differenzia, apparentemente, solo per la scelta delle formule a cui è applicabile. Ma si può provare che le teoria **NBG** è finitamente assiomatizzabile (Teorema di Bernays, cfr. [Me]), mentre non è appurato che anche **MKM** lo sia.