SULLA NOZIONE DI MEDIA

Silvano Holzer

1. La nozione di media, pur essendo costantemente presente nella analisi quantitativa di fenomeni sia fisici che economici o, più semplicemente, di situazioni pratiche, non riceve, come merita, sufficiente attenzione da parte dei matematici, dei fisici e degli statistici impegnati nell'insegnamento. Spesse volte infatti tale nozione viene "liquidata" riproponendo la definizione "naif" di Cauchy: " dicesi media fra più quantità date, una nuova quantità compresa fra la più piccola e la più grande delle quantità considerate", oppure, adottando un'impostazione "empirica", elencando le singole specie di medie che s'incontrano abitualmente (aritmetica, geometrica, armonica, antiarmonica, etc.). Ora, è del tutto evidente che nel primo caso si dice press'a poco nulla, mentre nel secondo, pur formalmente esatto, ci si riduce ad un mero elenco che non consente di individuare il quid comune a tutte le medie conosciute.

La situazione sopra adombrata è, a mio avviso, singolare in quanto non imputabile ad una difficoltà intrinseca alla nozione di media poichè, come osserva Oscar Chisini, "il concetto di media è così semplice e così perspicuo che basta fissarvi un poco l'attenzione per ritrovarne la vera natura e la conseguente definizione matematica"; ciò apparirà chiaro dagli esempi riportati nella Sezione 2 e dalla conseguente definizione di media, relativa ad un numero finito di grandezze, data nella Sezione 3. In detta Sezione si fa anche vedere come le usuali medie rientrino nella definizione proposta. Nella Sezione 4 invece si riporta il celebre teorema di Nagumo-Kolmogoroff, punto di partenza delle impostazioni assiomatiche della teoria delle medie. Passando poi a considerare medie di un numero infinito di grandezze, nella Sezione 5 si formalizza tale nozione e si fa vedere come le usuali medie generalizzate ne siano casi particolari. Nella Sezione 6 s'introducono alcune basilari proprietà delle medie e si riporta il ben noto teorema di rappresentazione integrale delle medie di de Finetti. Infine, nella Sezione 7, si fornisce una interessante caratterizzazione della media aritmetica generalizzata.

2. Cominciamo con un esempio dovuto al Chisini. Un'automobile noleggiata percorre 225 Km. : i primi 120 alla velocità di 60 Km/h e gli altri 105 alla velocità di 105 Km/h. Qual'è la sua *velocità media* ? Viene spontaneo rispondere che, avendo l'automobile impiegato 3 ore a percorrere 225 Km., la sua velocità media è: 225 : 3 = 75 Km/h. Cioè si considera come dato per scontato che la media di due velocità v_1, v_2, relative agli spazi s_1, s_2 , si ottiene tramite la :

$$v_m = \frac{s_1 + s_2}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} ,$$

cioè mediante la cosiddetta media armonica ponderata.

Supponiamo ora che il noleggiatore dell'automobile sia interessato, com'è del tutto naturale, al consumo di benzina. Ammettendo che il consumo di benzina C(v) per unità di spazio percorso alla velocità v sia espresso dalla formula :

$$C(v) = a + b(v - 60)^2,$$

il noleggiatore troverà che il consumo fatto per i 225 Km. *non* è quello che si sarebbe avuto se l'automobile avesse viaggiato a 75 Km/h, bensì quello corrispondente alla velocità di 80 Km/h ottenuta tramite la:

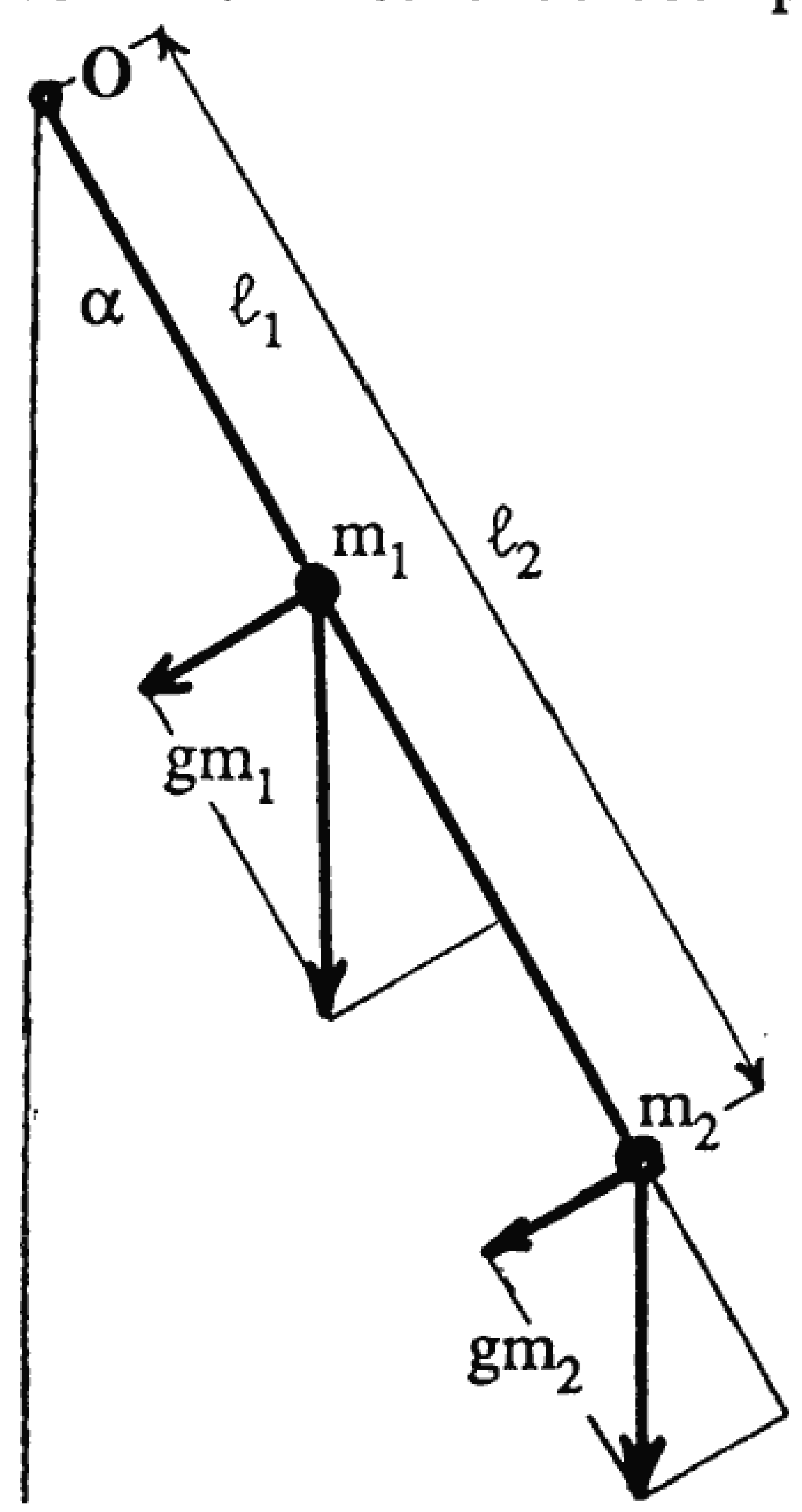
$$v_m = 60 + \left[\frac{s_1(v_1 - 60)^2 + s_2(v_2 - 60)^2}{s_1 + s_2} \right]^{\frac{1}{2}},$$

cioè mediante la cosiddetta media quadratica ponderata.

Quindi l'automobilista ed il noleggiatore, essendo interessati, rispettivamente, ad un *consumo di tempo* e ad un *consumo di benzina*, sono portati a determinare una *diversa* velocità media.

Pertanto la morale dell'esempio è la seguente: la ricerca di una media ha lo scopo di *semplificare* un dato problema *sostituendo*, in esso, a più quantità date una quantità *sola* che *le sintetizzi* senza *alterare* la visione d'insieme del fenomeno in esame. *Non ha quindi senso* parlare di *media di due o più quantità* tout court, ma *ha senso* parlare di *media di esse relativamente alla valutazione sintetica di un'altra grandezza (la* ***circostanza****) che da esse dipende.*

Al fine di chiarire ulteriormente quanto appena affermato, consideriamo un secondo esempio. Dato un pendolo composto costituito



dalle masse m_1, m_2 poste, rispettivamente, a distanza ℓ_1, ℓ_2 dal centro di sospensione **O**, ci si chiede qual'è la lunghezza media ℓ_m del pendolo rispetto la circostanza: momento statico, momento d'inerzia, periodo delle piccole oscillazioni. Cioè, a quale distanza da **O** bisogna concentrare l'*intera* massa $m = m_1 + m_2$ per ottenere un pendolo semplice che abbia il *medesimo* valore del pendolo dato rispetto la *stessa* circostanza?

Per quanto riguarda la circostanza:

(a) <u>momento statico</u>, dalla:

$$m_1 \, g \, \ell_1 \operatorname{sen}\alpha + m_2 \, g \, \ell_2 \operatorname{sen}\alpha = (m_1 + m_2) g \, \ell_m \operatorname{sen}\alpha$$

otteniamo la media aritmetica ponderata:

$$\ell_m = \frac{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2}{m_1 + m_2} \quad \text{(baricentro)} \, ;$$

(b) momento d'inerzia, dalla:

$$m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2 = (m_1 + m_2) \, \ell_m^2$$

otteniamo la media quadratica ponderata:

$$\ell_m = \left[\frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 + m_2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{(giratore)} \, ;$$

(c) periodo delle piccole oscillazioni , dalla:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{l_m} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \left[\frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

otteniamo la media antiarmonica ponderata :

$$l_m = \frac{m_1 \ell_1^2 + m_2 \ell_2^2}{m_1 \ell_1 + m_2 \ell_2} \quad \text{(lunghezza ridotta).}$$

3 . Gli esempi e le considerazioni fatte nella precedente sezione suggeriscono la seguente formalizzazione, dovuta al Chisini (1929), del concetto di media di un numero finito di grandezze.

Definizione. Data una funzione reale

$$y = f(x_1,..,x_n),$$

di n variabili reali, il numero reale x si dirà *media* delle $x_1,..,x_n$ *rispet-*

to alla funzione f se sostituito alle $x_1,..,x_n$ dà il medesimo valore per la f che le $x_1,..,x_n$; cioè se

$$f(x,..,x) = f(x_1,..,x_n).$$

Nota. (i) Una prima immediata constatazione è che nella definizione proposta, la funzione f altro non rappresenta se non ciò che in precedenza avevamo chiamato circostanza. Conseguentemente, per fornire una valutazione sintetica (una media) di un numero finito di grandezze occorre (e basta), in questo contesto, semplicemente considerare una opportuna funzione su tali grandezze.

(ii) Ovviamente, dati $x_1,..,x_n$, la $f(x,..,x) = f(x_1,..,x_n)$, intesa come equazione in x, può avere nessuna, una o più soluzioni (si pensi ad esempio alla funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$). Onde evitare situazioni non significative si richiede che la funzione circostanza f soddisfi la seguente condizione di unicità ed esistenza della media :

per ogni y appartenente all'immagine di f *esiste uno ed un solo* elemento x tale che $y = f(x,..,x)$.

Posto allora $g(x) = f(x,..,x)$, la funzione g riesce invertibile; possiamo pertanto ottenere l' espressione *esplicita* della media di $x_1,..,x_n$:

$$m(x_1,.., x_n) = g^{-1}(f(x_1,..,x_n)).$$

(iii) Riesce agevole verificare che una funzione reale $m(x_1,.., x_n)$, di n variabili reali, è una media rispetto a qualche circostanza se e solo se $m(x,..,x) = x$ per ogni $(x,..,x)$ del dominio di m.

Al fine di chiarire ulteriormente la portata della definizione proposta e di mostrare come essa bene si adatti ai casi concreti, elenchiamo le diverse funzioni f che consentono di ottenere le usuali medie ponderate.

<u>media ponderata</u>	<u>funzione circostanza</u>
aritmetica: $x_m = \dfrac{a_1x_1+...+a_nx_n}{a_1+...+a_n}$	$a_1x_1+...+a_nx_n$
quadratica: $x_m = \left[\dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1+...+a_n}\right]^{\frac{1}{2}}$	$a_1x_1^2+...+a_nx_n^2$
geometrica: $x_m = \left[x_1^{a_1}\cdot...\cdot x_n^{a_n}\right]^{\frac{1}{a_1+..+a_n}}$	$x_1^{a_1}\cdot...\cdot x_n^{a_n}$
armonica: $x_m = \dfrac{a_1+...+a_n}{\frac{a_1}{x_1}+...+\frac{a_n}{x_n}}$	$\dfrac{a_1}{x_1}+...+\dfrac{a_n}{x_n}$
antiarmonica: $x_m = \dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1x_1+....+a_nx_n}$	$\dfrac{a_1x_1^2+....+a_nx_n^2}{a_1x_1+....+a_nx_n}$
esponenziale: $x_m = \dfrac{1}{\lambda}\ \ln\left[\dfrac{e^{\lambda x_1}+...+e^{\lambda x_n}}{n}\right]$	$e^{\lambda x_1}+...+e^{\lambda x_n}$.

4. E' facile rendersi conto che, ad eccezione della media antiarmonica, le medie sopra riportate, con $a_1 = .. = a_n = 1$, sono *trasformate* della media aritmetica ; cioè si ottengono da quest'ultima tramite una trasformazione continua e crescente nel senso che, indicata con m la media considerata, risulta per qualche funzione reale ϕ continua e crescente:

$$m(x_1,..,x_n) = \phi^{-1}\left[\frac{\phi(x_1)+...+\phi(x_n)}{n}\right],$$

per ogni $x_1,..,x_n$ del dominio di m (ad esempio, per le medie ponderate geometrica e armonica riesce, rispettivamente, $g(x) = \ln x$ e $g(x) = x^{-1}$). Ci si può allora chiedere quali siano le medie che sono trasformate della media aritmetica nel senso sopra precisato. La risposta a tale questito è fornita dal seguente notevole teorema:

Teorema (M.Nagumo - A.Kolmogoroff, 1930). Data una successione di funzioni reali $m_n(x_1,..,x_n)$, le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

(a) la successione (m_n) verifica le proprietà di :
consistenza : $m_n(x,..,x) = x$;
monotonia : m_n è crescente rispetto ad ogni variabile ;
associatività : $m_n(x_1,..,x_n)$ non cambia se sostituiamo h degli $x_1,..,x_n$ con il valore ad essi associato da m_h ;
simmetria : m_n è una funzione simmetrica ;

(b) m_n è una trasformata della media aritmetica.

5. La definizione del Chisini riguarda medie di un numero finito di grandezze. Per comprendere come si possa estenderla al caso di un numero infinito di grandezze, consideriamo, ad esempio, un pendolo fisico costituito da una barra di lunghezza ℓ incernierata ad un estremo **O** e di massa complessiva unitaria. Indicata con M(x) la *funzione di distribuzione* della massa, cioè la funzione che per ogni $x \leq \ell$ fornisce la massa complessiva depositata sulla barra di estremi il punto **O** ed il punto **P** distante x da **O**, è noto che il momento statico del pendolo fisico è dato dalla:

$$\int_0^\ell x \, dM(x).$$

Ora, per determinare la *lunghezza media* ℓ_m rispetto al momento statico basta, evidentemente, determinare a quale distanza da **O** deve essere posta l'intera massa unitaria per ottenere un pendolo semplice avente il *medesimo* momento statico di quello fisico. Riesce:

$$(*) \qquad \ell_m = \int_0^\ell x \, dM(x).$$

Per mettere in luce la stretta analogia esistente tra questo caso continuo e quelli discreti prima considerati, introduciamo la funzione di distribuzione ε_x che *concentra* nel punto **P** distante x da **O** l'intera massa unitaria :

$$\varepsilon_x(t) = 0, \quad \text{se } t < x,$$
$$= 1, \quad \text{se } t \geq x.$$

Allora la (*) può scriversi :

$$\int_0^\ell x \, d\varepsilon_{\ell_m}(x) = \int_0^\ell x \, dM(x)$$

che consente di interpretare la lunghezza media del pendolo nel seguente modo: considerato il *funzionale reale* (la *circostanza*):

$$\mathcal{F}(M') = \int_0^\ell x \, dM'(x),$$

definito su tutte le possibili funzioni di distribuzione M' della massa unitaria sulla barra di lunghezza ℓ data, il numero reale x è la lunghezza media del pendolo fisico di distribuzione M, se sostituita la funzione di distribuzione ε_x alla M, essa dà il *medesimo* valore per $\mathcal{F}$ che M. Pertanto il ruolo svolto dalle $x_1,..,x_n$, dalla f e dalla x nella definizione del Chisini viene qui, rispettivamente, svolto dalla funzione di distribuzione M, dal funzionale $\mathcal{F}$ e dalla funzione di distribuzione ε_x.

Quanto appena esposto suggerisce, in modo del tutto naturale, la seguente definizione generale di media, dovuta a Bruno de Finetti (1931), riguardante le funzioni di ripartizione unidimensionali che, in questo contesto, sono utilmente interpretabili come distribuzioni di massa unitaria sulla retta.

Definizione. Considerato:

- un insieme Δ di *funzioni di ripartizione* (cioè funzioni F non decrescenti, continue a destra e tali che $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$) ;
- un funzionale reale $\mathcal{F}$ definito su Δ ,

il numero reale x si dirà *media* di $F \in \Delta$ *all'effetto della valutazione* di $\mathcal{F}$ se soddisfa l'uguaglianza :

$$\mathcal{F}(\varepsilon_x) = \mathcal{F}(F).$$

Nota. Ovviamente, come nel caso finito, si assume che sussista la seguente condizione di unicità e di esistenza della media:

per ogni $F \in \Delta$ esiste ed è unico un x tale che $\mathcal{F}(\varepsilon_x) = \mathcal{F}(F)$.

Posto allora $g(x) = \mathcal{F}(\varepsilon_x)$, la funzione g risulta invertibile; possiamo pertanto ottenere l' espressione *esplicita* della media di F :

$$M(F) = g^{-1}(\mathcal{F}(F)).$$

Poichè, come è facile verificare, un funzionale reale M definito su Δ è una media rispetto a qualche circostanza se e solo se $M(\varepsilon_x) = x$ per ogni $\varepsilon_x \in \Delta$, la definizione proposta può essere utilmente sostituita dalla seguente che non fa riferimento esplicito al funzionale circostanza.

Definizione. Considerato un insieme Δ di funzioni di ripartizione, un funzionale reale M definito su Δ si dirà una *media* su Δ se risulta

$$M(\varepsilon_x) = x$$

per ogni $\varepsilon_x \in \Delta$.

Analogamente a quanto fatto nella Sezione 3 per le medie di un numero finito di grandezze, elenchiamo i diversi funzionali $\mathcal{F}$ che consentono di ottenere le usuali medie generalizzate.

media generalizzata	funzionale circostanza
aritmetica: $x_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)$
quadratica: $x_m = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x) \right]^{\frac{1}{2}}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)$
geometrica: $x_m = e^{\int_{0}^{+\infty} \ln x \, dF(x)}$	$\int_{0}^{+\infty} \ln x \, dF(x)$
armonica: $x_m = \dfrac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dF(x)}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} dF(x)$
antiarmonica: $x_m = \dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)}$	$\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, dF(x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x)}$
esponenziale: $x_m = \frac{1}{\lambda} \ln \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \, dF(x)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \, dF(x)$.

6 . Il teorema di Nagumo-Kolmogoroff, visto nella Sezione 4, mette in luce, tra l'altro, come si possano caratterizzare usuali medie tramite alcune loro proprietà *qualitative* (monotonia, associatività, etc.). Al fine di ottenere anche per le medie di funzioni di ripartizione un teorema analogo a quello appena citato, introduciamo le seguenti *proprietà qualitative* :

monotonia : $M(F) > M(G)$ ogniqualvolta $F < G$, ove $F < G$ significa che $F(x) \leq G(x)$ per ogni x e che $F(x') < G(x')$ per qualche x'. A parole: la media cresce se la massa unitaria viene spostata a destra.

associatività : $M[\alpha F + (1 - \alpha)G] = M[\alpha H + (1 - \alpha)G]$ ogniqualvolta $M(H) = M(F)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. A parole: la media non cambia se parte della massa unitaria viene ridistribuita in modo tale da conservarne la media.

continuità : $M(F_n) \to M(F)$ ogniqualvolta $F_n(x) \to F(x)$ in ogni punto di continuità di F. A parole: le medie, di distribuzioni di masse unitarie convergenti ad una distribuzione di massa, convergono alla media della distribuzione limite.

Il prossimo teorema estende al contesto più generale nel quale ci siamo messi il teorema di Nagumo-Kolmogoroff; rileviamo che l'equivalenza tra le proposizioni (a) e (c) è dovuta al de Finetti (1931).

Teorema. Sia M una media definita sull'insieme $\Delta_{[a,b]}$ delle funzioni di ripartizione aventi supporto incluso in [a,b] (cioè tali che $F(x) = 0$ per ogni $x < a$ e $F(x) = 1$ per ogni $x \geq b$). Allora le seguenti tre proposizioni sono equivalenti :

(a) M è associativa e monotona ;

(b) M è associativa e continua ;

(c) M è una trasformata della media aritmetica generalizzata; cioè esiste una funzione reale ϕ continua e crescente tale che :

$$M(F) = \phi^{-1}\left[\int_a^b \phi \, dF \right]$$

per ogni $F \in \Delta_{[a,b]}$.

7 . Al fine di enunciare una interessante caratterizzazione della media aritmetica generalizzata introduciamo le seguenti due ulteriori proprietà qualitative :

omogeneità : $M(F_k) = k\,M(F)$, ove $F_k(x) = F(\frac{x}{k})$. A parole: la media viene moltiplicata per k qualora l'intera massa venga ridistribuita tramite una omotetia di fattore k.

traslatività : $M(F_k) = k + M(F)$, ove $F_k(x) = F(x - k)$. A parole: la media aumenta di k qualora l'intera massa unitaria venga traslata di k.

Il seguente teorema, conseguenza del precedente, fornisce la preannunciata caratterizzazione.

Teorema. L'unica media definita sull'insieme $\Delta_{[a,b]}$ che sia associativa, monotona, continua, omogenea e traslativa è la media aritmetica generalizzata.

Dipartimento di Matematica applicata alle
Scienze economiche, statistiche e attuariali "B. de Finetti"
Università degli Studi
Trieste.