LA RADICE QUADRATA NELLA SCUOLA MEDIA

E.BARONE

1. Introduzione.

La radice quadrata di solito e' introdotta gia'nella scuola media inferiore, quando il concetto di numero reale non e' stato ancora dato e solitamente si liquida il problema dicendo: "la radice quadrata di un numero intero che non sia quadrato perfetto e' un numero decimale. Alcuni Autori, gia' piu' avveduti, preferiscono dire: "poiche' un numero non quadrato perfetto e' sempre compreso tra quadrati di due numeri interi consecutivi, la sua radice quadrata sara' compresa tra le radici quadrate di questi due numeri. Ad esempio, essendo 45 compreso tra 36 e 49, risulta

$$6 < \sqrt{45} < 7."$$

Si puo' quindi correttamente parlare di approssimazione per difetto e per eccesso della radice quadrata. Dopo cio' tutti gli Autori passano a descrivere l'algoritmo di"estrazione" della radice quadrata, senza alcuna giustificazione di tale algoritmo. Le cose non cambiano negli anni successivi edahime' si puo' arrivare a scoprire che la maggior parte degli insegnanti, sia di scuola media inferiore , che di scuola media superiore, non solo non sa spiegare il predetto algoritmo, ma non si e' mai neanche posto il problema. Vediamo allora di dare una spiegazione di tale famoso algoritmo, che personalmente ho sempre avuto difficolta' a memorizzare e che ho dovuto ripassare, quando la prima delle mie figlie me ne ha chiesto ragione. In un secondo momento vedremo di dire qualcosa sulla opportunita' di tale algoritmo e sulla sua eventuale sostituzione.

2. L'algoritmo della radice quadrata.

Dato un numero naturale Y, di cui si vuole calcolare la radice quadrata X (o meglio la sua MIGLIORE APPROSSIMAZIONE PER DIFETTO, se il numero non e' un quadrato perfetto) , esiste un unico numero naturale n per il quale risulta

$$10^{2(n-1)} \leq Y < 10^{2n}.$$

Poiche' si ha

$$10^{n-1} \leq \sqrt{Y} < 10^{n} ,$$

possiamo affermare che X sara' formato da n cifre. Ad esempio se

Y= 3 218 089 ,

allora poiche'

$$100^3 = 1\ 000\ 000 < 3\ 218\ 089 < 100\ 000\ 000 = 100^4$$

e' n = 4 e quindi sara' X formato da 4 cifre, cioe' compreso fra 10 000 e 99 999.

Un metodo pratico per trovare n , dato Y, e' quello di dividere Y in blocchi di due cifre a partire da destra. Nell'esempio sopra considerato, si ha

$$Y = 3\ 21\ 80\ 89 ,$$

cioe' quattro blocchi.

Se denotiamo rispettivamente con

$$y_1, y_2, .., y_n$$

il primo, il secondo, .., l'n-mo blocco, partendo da sinistra, di

Y (ogni blocco essendo formato da due cifre, con l'eventuale sola eccezione del primo, che puo' essere formato da una sola cifra), risulta

$$Y = y_1 \cdot 100^{n-1} + y_2 \cdot 100^{n-2} + .. + y_n .$$

Se invece denotiamo con x_i la i-ma cifra di X, a partire da sinistra, avremo

$$X = x_1 \cdot 10^{n-1} + x_2 \cdot 10^{n-2} + .. + x_n$$

ed X dovra' essere IL PIU' GRANDE INTERO per il quale

(1) $X^2 \leq Y$.

Quanto precede spiega la prima regola dell'algoritmo e getta le basi per capire tutte le regole successive.

Supponiamo inizialmente, per semplicita', che Y sia formato da due soli gruppetti, cioe' sia

$Y = y_1 \cdot 100 + y_2$.

La (1) diventa allora

$(x_1 \cdot 10 + x_2)^2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$

ovvero

(2) $x_1^2 \cdot 100 + (2\, x_1 \cdot 10 + x_2)\, x_2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$.

Osservato che se x e' il piu' grande intero < 10, per il quale risulta

$x_1^2 \leq y_1$

si ha anche

$$x_1^2 \cdot 100 \leq Y < (x_1 + 1)^2 \cdot 100$$

(il Lettore e' invitato a spiegare questo passaggio) x_1 sara' la prima cifra a sinistra della radice cercata e la seconda regola dell'algoritmo e' spiegata.

Trovato x_1 , dalla (2) risulta

$$(3) \qquad (2 x_1 \cdot 10 + x_2) x_2 \leq (y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2 .$$

Si deve quindi cercare il piu' grande intero $x_2 < 10$, che verificala (3).

Per semplificare tale ricerca, osserviamo che $2 x_1 * 10 * x_2$ e' minore del primo membro della (3) e quindi possiamo, in prima approssimazione, sostituire alla (3) la disuguaglianza piu' semplice

$$2 x_1 x_2 \cdot 10 \leq (y_1 - x_1^1) \cdot 100 + y_2$$

ovvero

$$(4) \qquad x_2 \leq [(y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2] / 2x_1 \cdot 10.$$

Per fissare le idee, consideriamo ad esempio Y = 2 18. Risulta y =2, y =18, x =1 e , come e' noto, si ha la seguente schematizzazione :

$$\begin{array}{c|c}
\sqrt{218} & 1 \\ \cline{2-2}
1 & 2 \\ \cline{1-1}
118 &
\end{array}$$

Ora la (4) esprime la ben nota regola: da

$$118 = (y_1 - x_1^2) \cdot 100 + y_2$$

si stacca l'ultima cifra , ottenendo 11 e si divide tale numero per 2 ($=2x_1$). Si otterra' il numero 5 che puo' essere l'x_2 cercato. Occorre pero'verificare che effettivamente valga la (3) . Si ha invece

$$(2x_1 \cdot 10 + x_2) x_2 = 25 \cdot 5 = 125 > 118.$$

questo significa che deve essere $x_2 < 5$ e quindi e' sensato provare con 4 . Facendo i conti si trova che

$$24 \cdot 4 = 96 < 118$$

e quindi effettivamente $x = 4$. Si ha quindi

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{218} & 14 \\ \cline{2-2} 1 & 24 \cdot 4 = 96 \\ \cline{1-1} 118 & \\ \;\;96 & \end{array}$$

Ora risulta $14^2 = 196$ mentre $15^2 = 225$, quindi $\sqrt{218}$ e' compreso fra 14 e 15.

Se ora supponiamo che Y sia formato da tre gruppetti, come nel caso del numero 2 18 37, la (1) diventa

$$(x_1 \cdot 10^2 + x_2 \cdot 10 + x_3)^2 \leq y_1 \cdot 100^2 + y_2 \cdot 100 + y_3 .$$

ovvero

$$[(x_1 \cdot 10 + x_2) 10 + x_3]^2 \leq (y_1 \cdot 100 + y_2) 100 + y_3.$$

La disuguaglianza precedente si puo' anche scrivere

$$(5) \qquad (x_1 \cdot 10 + x_2)^2 100 + [2(x_1 \cdot 10 + x_2) 10 + x_3] x_3 \leq$$
$$\leq (y_1 \cdot 100 + y_2) 100 + y_3 .$$

La (5) mostra che la ricerca della radice di un numero formato da tre gruppetti (cioe' compreso 10 000 e 999 999), consiste nel trovare prima x_1 ed x_2 massimi, che verifichino

$$(x_1 \cdot 10 + x_2)^2 \leq y_1 \cdot 100 + y_2$$

e quindi nel trovare la radice quadrata di y_1 100 + y_2 , e poi nel trovare la terza cifra x_3 in modo che valga la (5).
Osservato che la (5) e' dello stesso tipo della (2), e' chiaro che il procedimento puo' essere iterato.

A questo punto dovrebbe essere abbastanza chiaro come si procede in presenza di piu' di tre gruppetti e nel caso in cui si hanno e/o si vogliono cifre decimali. Per quest' ultimo caso, ad esempio, basta osservare che

$$2\ 18\ 37{,}898 = (2\ 18\ 37\ 89\ 80)\ 10^{-4}$$

e quindi

$$\sqrt{21837{,}898} = \sqrt{2\ 18\ 37\ 89\ 80} \cdot 10^{-2}.$$

A ben guardare tutto il discorso precedente potrebbe essere sintetizzato dicendo che la spiegazione dell'algoritmo della radice quadrata sta' nella formula

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab ,$$

ma potrebbe essere uno scherzo di cattivo gusto.

Viene spontaneo chiedersi : vista la difficolta' di giustificare tale algoritmo,e' proprio il caso di insegnarlo? Non ci sono algoritmi piu' facilmente giustificabili?

A parere del sottoscritto l'algoritmo di Erone potrebbe tranquillamente sostituire l'algoritmo precedente, almeno percio' che riguarda la giustificabilita'.

Diamo un cenno di tale algoritmo.

3. L' algoritmo di Erone.

Osserviamo innanzitutto che se X e' una approssimazione per difetto della radice di Y, cioe' risulta

$$X^2 \leq Y$$

si ha

$$X^2 Y \leq Y^2$$

e poi

$$Y \leq (Y/X)^2;$$

quindi Y/X e' una approssimazione per eccesso della radice di Y.

Del tutto analogamente si prova che, se invece X e' una approssimazione per eccesso, allora Y/X e' una approssimazione per difetto.

Ora l'idea dell'algoritmo e' molto semplice: se abbiamo due approssimazioni, una per difetto e l'altra per eccesso, possiamo ragionevolmente sperare che la loro media sia una approssimazione migliore.

Pertanto se X_0 e' una approssimazione della radice di Y, probabilmente

$$X_1 = (X_0 + Y/X_0)/2$$

sara' una approssimazione migliore. Vediamo di provarlo.

Intanto osserviamo che

$$X_1^2 - Y = (X_0^2 + (Y/X_0)^2 + 2Y)/4 - Y = (X_0^2 + (Y/X_0)^2 - 2Y)/4 =$$
$$= (x_0 - Y/X_0)^2 / 4 \geq 0.$$

Quindi indipendentemente dal tipo di approssimazione X_0, sicuramente X_1 sara' una approssimazione per eccesso della radice di Y. Per quanto detto sopra, Y/X_1 sara' una approssimazione per difetto. Questa situazione puo' essere illustrata sull'asse reale, come segue

```
-------------*------*---*------*------------------
            Y/X1   √Y   X2     X1
```

dove

$X_2 = (X_1 + Y/X_1)/ 2.$

Osserviamo che, se definiamo , al passo n+1,

(6) $\quad X_{n+1} = (X_n + Y/X_n)/ 2$

otteniamo una successione X_n di approssimazioni per eccesso ed una Y/X_n di approssimazioni per difetto che , per costruzione , verificano le seguenti disuguaglianze.

(7) $\quad Y/X_n \leq Y/X_{n+1} \leq \sqrt{Y} \leq X_{n+1} \leq X_n \quad .$

Osserviamo inoltre che

(8) $$X_{n+1} - \sqrt{Y} = (X_n - Y/X_n)/2 - \sqrt{Y} \leq X_n/2 + \sqrt{Y}/2 - \sqrt{Y} =$$
$$= (X_n - \sqrt{Y})/2.$$

Questo significa che ad ogni passo l'errore che si commette approssimando $\sqrt{Y}$ con X_n (o con Y/X_n), si dimezza e quindi il metodo e' molto rapido .

Dalla (8) si ricavano anche le disuguaglianze

(9) $\quad X_n - \sqrt{Y} \leq (X_1 - \sqrt{Y})/ 2^{n-1} \leq \quad | X_0 - Y/X_0 | \; / 2^n$

che legano l'errore al passo n, alla approssimazione iniziale e permettono di valutare il numero di passi necessario per ottenere il desiderato numero di cifre decimali esatte dopo la virgola. Se ad esempio si desiderano 5 cifre decimali, occorrera' scegliere n in modo tale che risunti

(10) $2^n \geq | X_0 - Y/X_0 | \cdot 10^5.$

In pratica l'esame e' molto piu' semplice , in quanto basta osservare, ad ogni passo, le cifre che si ripetono.

Diamo un ESEMPIO.
Vogliamo la radice di 2 con cinque cifre decimali esatte dopo la virgola.
Partiamo con $X_0 = 1$. Avremo $Y/X_0 = 2$ e $X_1 = 3/2 = 1,5$. Usando la (6) si ha la seguente tabella:

n	X_n	Y/X_n
1	1,5	1,33333
2	1,41666	1,41176
3	1,41421	1,41421

Si deduce ovviamente che non ha senso continuare. Si puo' osservare che, in generale, con tre passi si ottengono ben cinque cifre decimali, pur di partire con una approssimazione iniziale decente.

Per finire osserviamo che questo metodo, che si presta ad essere programmato con estrema facilita', e' solo un caso particolare del piu' generale metodo di NEWTON o DELLE TANGENTI per la ricerca della soluzione dell'equazione

(11) $f(x) = 0,$

quando f e' una funzione derivabile, con derivata f' continua, convessa in [a,b] . Se risulta ad esempio $f(a)<0$, $f(b)>0$ e $f'>0$ allora si prova che la successione

$$(12) \quad x_0 = b \; , \quad x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

converge all'unica soluzione della (11).

Infatti il problema di trovare la radice quadrata di Y equivale a risolvere l'equazione (11) con

$$(13) \quad f(x) = x^2 - Y.$$

Poiche' $f'(x) = 2x$, la (12) diventa

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - Y) / 2x_n = (x_n^2 + Y) / 2x_n$$

e quindi si riottiene la (6).

La (12) puo' essere utilizzata, per esempio per estrarre la radice m-ma di un numero Y. In tal caso la

$$f(x) = x^m - Y, \; f'(x) = m\, x^{m-1}$$

ed il metodo diventa

$$(14) \quad x_{n+1} = ((m-1)x_n + Y/x_n^{m-1}) / m .$$

Quindi insegnando il metodo di Erone si gettano le basi per qualcosa di mòlto piu' generale.

Lecce 25/10/89. Rivisto: 5/10/90