

Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Per presentare una disciplina curiosa e uno studio
stimolante, per potenziare passione e vivacità
intellettuale

C. Costabile⁽¹⁾⁽²⁾, S. Costabile⁽²⁾, A. Guido⁽²⁾, R. Santarossa

⁽¹⁾ Dipartimento di Matematica - Università della Calabria

⁽¹⁾ Dipartimento di Matematica - Università della Calabria
c.costabile@unical.it

Sommario

L'uso della matematica nella società è cambiato profondamente negli ultimi decenni. Ciò ha influito sul suo ruolo nel percorso educativo che ha anche perso, così, una visione organica.

E' necessario che la scuola della progettualità e dell'autonomia recuperi l'unitarietà del sapere, e riconquisti una visione globale del processo educativo.

Sin dalla scuola di base può essere stimolata la creatività di ogni studente, con una scuola che guidi l'alunno a ricercare la conoscenza non solo con la logica e il ragionamento, ma anche con l'intuito e la fantasia e con una scuola che stimoli la curiosità, che sia attenta ai bisogni degli studenti e che ne favorisca il protagonismo in un clima di collaborazione.

Ovviamente non è facile abbandonare la comoda via dei programmi tradizionali, i consueti criteri di verifica e di valutazione. La via della sperimentazione è più complessa e rischiosa. Nel lavoro si presentano aspetti e spunti particolari di argomenti che rendono la matematica curiosa ed affascinante quali i bioritmi ed i frattali e stimolante quale la crittografia.

Si discutono, quindi, celebrazioni di organizzazioni mondiali quale, l'UNESCO, e conquiste sociali e civili di grandi scienziati che suscitano forti passioni ed evidenziano profondo spirito critico.

Infine si presentano argomenti ludici e divertenti che richiedono creatività e fantasia mostrando matematica che stimola vivacità di pensiero e potenzia le capacità intellettuali.

1 Introduzione

Negli ultimi decenni abbiamo assistito ad uno sviluppo vertiginoso delle scienze e ad un impetuoso progresso della tecnica grazie, anche, ad una pervasiva diffusione dei moderni mezzi di calcolo che hanno cambiato profondamente la scala dei valori per quanto riguarda l'uso della matematica.

Tutto ciò ha influito sul ruolo e sulla funzione avute dalla matematica nel ciclo degli studi ed ha provocato una tendenza alla frammentarietà del percorso educativo facendogli, quindi, perdere una visione organica.

E' necessario che la scuola della progettualità e dell'autonomia dia un senso al fare scuola, recuperando l'unitarietà del sapere, e riconquisti una visione globale individuando i cardini su cui fondare il processo educativo, promuovendo la persona, le sue potenzialità, le sue aspirazioni e le sue attitudini ossia la sua creatività.

Questa, infatti, deve essere intesa come fluidità, originalità, flessibilità di pensiero, elaborazione di idee nuove. Sin dalla scuola di base può essere stimolata la creatività di ogni studente, con una scuola che guidi l'alunno a ricercare la conoscenza non solo con la logica e il ragionamento, ma anche con l'intuito e la fantasia, e con una scuola che stimoli la curiosità, che sia attenta ai bisogni degli studenti e che ne favorisca il protagonismo in un clima di collaborazione.

Ovviamente non è facile abbandonare la comoda via dei programmi tradizionali, i consueti criteri di verifica e di valutazione. La via della sperimentazione è più complessa e rischiosa.

2 Matematica curiosa

Con l'insegnamento tradizionale della matematica si trasmettono quotidianamente saperi od abilità operative che ai discenti quasi sempre risultano aridi e pesanti. Pertanto, allo scopo di suscitare amore e interesse nei confronti della disciplina, per gli insegnanti è viva e sentita l'esigenza di presentare argomenti semplici che possano suscitare curiosità ed al tempo stesso servire da spunto per approfondimenti.

Un argomento che può risultare adatto allo scopo è rappresentato dal binomio, matematica e bioritmi. Tale tema che collega interessi pratici ed esistenziali con questioni teoriche di natura astrologica può incuriosire i discenti e condurli, così, in modo naturale verso l'approfondimento di argomenti di aritmetica elementare.

E' risaputo che accanto alla cultura che possiamo dire scientifica, ne esiste un'altra, viva ai nostri giorni forse non meno di come era viva in tempi che usiamo ritenere oggi meno "illuminati", alla quale gli uomini si rivolgono quando vogliono superare gli inesorabili divieti della natura. Come si possa guarire da malattie incurabili, prevedere il futuro, ottenere successo, amore, fama, denaro, etc., tutto questo è promesso agli acquirenti di decine di opuscoli, o anche veri e propri libri, che fanno bella mostra di sé nelle nostre edicole, o ai potenziali clienti e seguaci di guaritori, maghi, veggenti, che ci fanno pervenire i loro messaggi senza fatica a causa della diffusione dei mezzi di comunicazione.

Una teoria appartenente a questa seconda "cultura" è quella dei cosid-



Figura 1:

detti bioritmi, la cui conoscenza permetterebbe di “evitare incidenti pericolosi, superare crisi psicologiche, conoscere in anticipo la data di nascita e il sesso dei nostri figli, etc.”, della quale si è parlato, e si continua a parlare di tanto in tanto, in riviste e giornali di grande diffusione. Gli studenti sono messi, così, in curiosità di quale sia il contenuto di questa teoria, che si può illustrare brevemente in questo modo. Basterà dire che ad ogni essere umano, a partire dal giorno della sua nascita, ma tenendo conto anche del “temperamento” espresso dal segno zodiacale di appartenenza, sono associati dei ritmi vitali, ciascuno avente un diverso periodo di giorni, in corrispondenza ai minimi o massimi dei quali si attraversano fasi critiche o di grandi potenzialità, specialmente in coincidenza di minimi o massimi multipli. Ad esempio, a partire dal giorno della sua nascita, un individuo dopo 23 giorni attraversa una fase critica del proprio ritmo solare (S) di 23 giorni correlato allo stato “fisico”, e così ancora dopo $46(2 \times 23)$ giorni, etc., inoltre attraversa una fase critica del ritmo lunare (L), correlato alle proprie capacità sensitive, dopo 28 giorni e così ancora dopo $56(2 \times 28)$ giorni e così per multipli interi di 28. Ovviamente, dopo $23 \times 28 = 644$ giorni, attraverserà una fase doppiamente critica, e lo stesso dopo $1288 = 2 \times 644$ giorni, etc... E’ evidente che per soddisfare la loro curiosità di determinare i loro bioritmi saranno indotti senza accorgersene ad esercitarsi sulle operazioni di aritmetica.

3 Matematica affascinante con i frattali

I frattali, con le loro forme misteriose e affascinanti, suscitano la nostra meraviglia e ci colpiscono innanzitutto per la loro bellezza. Ci sono dei paesaggi frattali, oggi usati largamente negli effetti speciali dei films e nei videogiochi, che quasi non si riescono a distinguere dalla realtà; altri invece sembrano veri e propri quadri astratti.

Tale argomento può essere presentato, così come storicamente Mandelbrot

lo ha affrontato, determinando la lunghezza di una costa marina. Si può partire, ad esempio, da una cartina dell'Italia e avvalendosi di questa tentare di conoscerne l'area e la lunghezza complessiva delle sue coste.

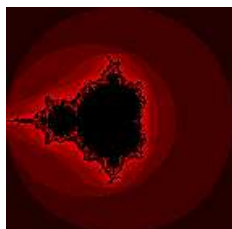


Figura 2:

Per quanto riguarda l'area si può pensare di prendere una carta geografica rappresentante tutta l'Italia, quadrettarla e contare i quadretti. Moltiplicando il numero dei quadretti occupati per l'area di ogni quadretto si ottiene con una certa approssimazione l'area dell'Italia. Per ottenere un risultato più preciso si può pensare (idealmente) di prendere delle carte geografiche sempre più dettagliate. Oltre un certo limite le carte non saranno più utili e si potrebbe addirittura misurare dal "vivo" la superficie dell'Italia. Per andare ancora oltre si può pensare di prendere degli ingrandimenti e misurare l'area sugli ingrandimenti. Confrontando i risultati ottenuti con queste misure successive si nota che le aree *stimate* tendono ad approssimare con sempre maggior precisione un determinato valore. Tale valore *limite* può essere di buon grado scelto come misura *vera* dell'area dell'Italia.

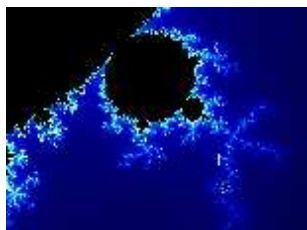


Figura 3:

Vediamo ora cosa succede se vogliamo applicare lo stesso procedimento per la lunghezza della costa. Come prima approssimazione si prende la carta dell'intera Italia, si costruisce una poligonale che approssimi la costa e si considera la lunghezza di tale poligonale. Poi si prendono delle carte più dettagliate, nelle quali, quello che prima era approssimato con un segmento ora si nota che non era perfettamente dritto ma che contiene molte insena-

ture o promontori. Approssimando quindi meglio si otterrà una lunghezza maggiore di quella ottenuta precedentemente. Se si ingrandisce ancora la costa si ottengono sempre maggiori dettagli che ad ogni passaggio fanno aumentare considerevolmente il risultato ottenuto in precedenza. Le misure che si ottengono crescono ad ogni passaggio e grosso modo crescono sempre della stessa quantità. Quello che succede è che se si volesse passare al limite il risultato che si ottiene sarebbe *infinito*. Dunque la costa dell'Italia può

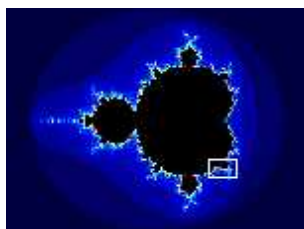


Figura 4:

essere preso come primo esempio di frattale. Più in generale un *frattale* può essere presentato come un oggetto che man mano che viene ingrandito presenta sempre nuovi dettagli.

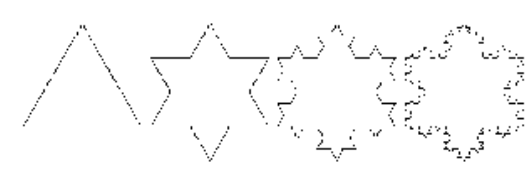


Figura 5:

4 Matematica che suscita passione

L'interesse per la Matematica sembra attraversare un periodo difficile, dovuto a diversi motivi, fra i quali una certa riluttanza, da parte del mondo accademico, ad aprirsi verso le nuove applicazioni. D'altro canto, c'è un'oggettiva difficoltà nel riuscire ad adeguarsi ai cambiamenti che si susseguono con grande rapidità e, per questo, c'è in corso nel mondo scolastico e accademico, un vivace dibattito sui modi di insegnare e di divulgare la Matematica, anche in relazione alle recenti riforme dell'Università e della Scuola.

L'anno 2000 è stato dichiarato dall'UNESCO, ANNO MONDIALE DELLA MATEMATICA, ma è poco risaputo. L'informazione sulle iniziative delle organizzazioni mondiali non viene, in generale, facilmente trasmessa al grande pubblico, a maggior ragione figurarsi, se ad essere celebrata è una disciplina considerata da molti difficile e poco utile. Per la circostanza

celebrativa, le emissioni filateliche italiane, nel programma del 2000, hanno inserito un francobollo dedicato a tale evento.

Nel simbolo ufficiale è possibile individuare sullo sfondo di un frattale il nastro di Moebius, figura geometrica tra le più affascinanti, e una sfera inscritta in un cilindro che, a dire di Cicerone, era riprodotta sulla tomba di Archimede. Tale accostamento vuole mettere in risalto la continuità fra il passato e il futuro della Matematica.

È senza dubbio vero che non è sempre facile ottenere, in così poco spazio, un messaggio chiaro e convincente, ma anche un'emissione filatelica può risultare un buon veicolo pubblicitario e di divulgazione. L'esigenza di individuare messaggi accattivanti relativi alla Matematica ha spinto l'E.M.S. (European Mathematical Society) a indire, nel 1999, un concorso per la realizzazione di poster sulla Matematica. Manifesti e poster devono rispondere allo stesso scopo di attrarre l'attenzione del pubblico in poco tempo e poco spazio.



5 Matematica stimolante: la crittografia

L'introduzione della crittografia può rappresentare un modo stimolante per presentare e consolidare le idee in un vasto numero di discipline matematiche ed informatiche, dalla statistica al calcolo combinatorio, dall'aritmetica modulare alla probabilità, dalla linguistica alla programmazione. Con la crittografia si possono presentare in classe in modo divertente e non banale argomenti più o meno tradizionali perseguendo nuovi obiettivi e nuove metodologie nella didattica matematica e contemporaneamente potenziando le abilità logiche degli allievi, oggi, possedute in forma sempre più debole e meno consapevole. Inoltre la crittografia può stimolare le abilità degli al-

lievi nel *problem solving* e le loro capacità deduttive in una maniera che è direttamente collegata al linguaggio naturale. Infine con la crittografia si sperimenta un approccio disciplinare empirico, per così dire, in una situazione di laboratorio, nella quale il computer e la calcolatrice affiancano lo studio in modo naturale.

La crittografia, etimologicamente la scienza che studia le *scritture segrete*, è nata come branca della matematica e dell'informatica in quanto fa ampio ricorso a tecniche di teoria dei numeri e di teoria dell'informazione. E' una disciplina antichissima usata principalmente da regnanti, imperatori e nobili per scambiare messaggi segreti. In epoche meno remote hanno utilizzato la crittografia ambienti militari, corpi diplomatici, cultori di cronache, di storie e di diari personali ed amanti segreti ed inconfessabili.

Oggi la crittografia è un argomento culturale che appartiene al cittadino. In un'epoca in cui trasmettiamo via internet il numero della carta di credito per i nostri acquisti o ricarichiamo il telefonino con un codice di autenticazione, chiunque dovrebbe essere consapevole di cosa siano i sistemi di protezione tattici della sicurezza e della segretezza, come le password, e saperli distinguere da quelli strategici e professionali.

6 Matematica che potenzia creatività e fantasia: i quadrati magici

Un quadrato magico è la disposizione aritmetica di certi numeri, elementi di una tabella quadrata, disposti in modo tale che lungo qualsiasi fila, comprese le diagonali, il valore della somma sia sempre lo stesso. I quadrati magici hanno sempre affascinato per la loro particolarità, non solo numerica. L'aggettivo magico vuole qualificare caratteristiche e proprietà eccezionali dei quadrati.

In alcune iscrizioni greche e latine compare un particolare quadrato magico, non composto da numeri, ma da lettere.

Nessuno ne conosce il significato, anche se si pensa che fosse un simbolo cristiano, forse riconducibile a qualche rito o pratica magica di sette religiose. Può essere divertente tentare di capirci qualcosa, riflettendo ad esempio, sul fatto che le desinenze possono essere state troncate o alterate per rispettare la *magicità* del tutto:

S A T O R
 A R E P O
 T E N E T
 O P E R A
 R O T A S

Figura 6:

L'idea che possa essere un simbolo cristiano deriva dal fatto che con le sue lettere è possibile comporre l'iscrizione:

 P
 A
 A T O
 E
 R
 P A T E R N O S T E R
 O
 S
 A T O
 E
 R

Figura 7:

con A che sta per alfa e O che sta per omega, principio e fine.

Il quadrato magico è, quindi, una matrice $n \times n$ i cui elementi, numeri in genere da uno a n^2 , senza ripetizioni, in modo tale che la somma per riga, per colonna e per diagonale sia costante. In stretto legame con la magia, si noti che questo tipo di quadrati è diffuso in tutte le civiltà, spesso in collegamento all'astrologia. In passato, incisi su una lastra d'argento, si riteneva che proteggessero dalla peste, e tuttora vengono usati in Oriente come amuleti.

Così storicamente, Agrippa, un famoso occultista del '500, costruì quello di ordine 3, un quadrato di lato 3, ed ancora di ordine 4, . . . , fino al 9, deducendo l'imperfezione della Creazione, basata sui noti 4 Elementi: Fuoco, Terra, Aria e Acqua, dal fatto che non fosse possibile costruire un quadrato magico di 4 caselle, ossia di ordine 2. Quel povero quadrato così imperfetto divenne allora il simbolo del peccato originale. Potenza dei simboli!

Infatti non è possibile disporre i primi 4 numeri in modo che venga rispettata la regola della somma costante:

1	4	2	3
2	3	4	1

Figura 8:

Si può scoprire che esistono quadrati con una disposizione ordinata dei numeri, altri in cui, almeno in apparenza, manca ogni regolarità.

7 Matematica per gioco: le gare di matematica

L'incontro degli studenti con i dati problematici della realtà, con i fatti divenuti oggetto di studio, matematizzati, si rivela sempre stimolante, sia sotto il profilo culturale, sia sotto il profilo formativo. Tali obiettivi sono sottesi ad iniziative stimolanti, quali le gare di matematica. L'obiettivo primario, e ambizioso, è quello di coinvolgere una grande quantità di studenti e docenti in un'attività gratificante; infatti questi sono invitati a cimentarsi con problemi, domande, quesiti, al di fuori dell'insegnamento tradizionale della matematica. Tale approccio, sottoforma di un gioco, è in linea con i nuovi programmi della scuola di base, che mettono in primo piano il valore educativo della matematica quale disciplina altamente formativa e ricca di implicazioni sul piano intellettuale, culturale, scientifico e tecnologico.

Le gare di matematica, con la loro grande valenza educativa, valorizzano le doti logico-creative degli studenti, che rischiano di essere anebbate nel grigiore della routine scolastica, ed inoltre mettono in risalto i giovani talenti matematici facendo in modo che non si disperdano e vengano invece coltivati con strategie mirate allo sviluppo della creatività.

Ma affinché tale auspicio non resti un desiderio utopico, con le gare si cercherà di far accostare gli studenti alla matematica in modo nuovo per le molteplici implicazioni cognitive ed operative che essa fornisce in ogni ambito culturale, quale veicolo privilegiato di sviluppo intellettuale in generale e logico-creativo in particolare e quale insostituibile linguaggio nella complessa civiltà scientifica e tecnologica che pervade ogni aspetto della nostra vita.

Infatti, la tipologia dei problemi che vengono proposti presenta la matematica in una forma accattivante, come campo di sfida e, soprattutto, come fonte di divertimento intellettuale, alla ricerca di soluzioni e di dimostrazioni difficili da conquistare. Gli unici requisiti necessari per poter partecipare sono l'intuizione e la fantasia.

8 Matematica vivace con i numeri palindromi

Un argomento vivace ed interessante da proporre ai nostri studenti, al di fuori dei programmi tradizionali, è quello dei numeri palindromi, che sono, per definizione, tutti quei numeri che sono uguali se letti da sinistra oppure da destra. Ecco alcune curiosità su questi numeri.

La data 20/02/2002, è una data “super palindroma”! in un anno palindromo! Il 20 Febbraio 2002 è una data doppiamente palindroma, infatti già l’anno 2002 è palindromo in se’, ed in più se aggiungiamo giorno e mese otteniamo il numero 20022002, anch’esso palindromo. Si tratta quindi davvero di una giornata “super palindroma”!

L’evento in sé è decisamente raro, infatti bastano pochi minuti di riflessione per vedere che l’ultima volta che ci è capitata la stessa cosa è stato nel lontano 11 Novembre del 1111 (11/11/1111), e la prossima volta succederà il 21 Dicembre 2112 (21/12/2112), fra più di 110 anni! Per formare un numero palindromo si può iniziare scrivendo in fila a partire da 1 un numero pari di numeri consecutivi, ad esempio 123456 e poi ritornando nuovamente a 1 si compone 12345654321, che ovviamente è palindromo, ed in particolare è divisibile per 11, numero anch’esso palindromo. Il quoziente della divisione $12345654321 : 123456$ è 1122332211. Ora 1122332211 diviso 11 fa 102030201 che è ancora palindromo, ed in cui fra ogni cifra non nulla si è interposto uno zero. Tra l’altro, i numeri 121, 12321, ... sono le potenze successive di 11, infatti $121 = 11^2$, $12321 = 11^3$ e così via. I ricercatori pazzi si sono poi tremendamente divertiti a trovare i più grandi numeri quadrati, cubici, ... che siano dei palindromi. Finora ad esempio si ha che il più grande quadrato palindromo è:

$$4211672540455378958718869999688178598735540452761124$$

un simpatico numero di 52 cifre, mentre il più grande cubo palindromo è

$$10662526601 = 2201^3.$$

Esiste una congettura tuttora non dimostrata riguardante proprio i numeri palindromi. A tal riguardo si può chiedere: “Prendi un numero, inverti le sue cifre e somma il numero che ottieni a quello iniziale. Se il risultato non è un numero palindromo, ripeti il procedimento”. E’ vero che in questo modo partendo da qualunque numero prima o poi si ottiene sempre un numero palindromo.

Per esempio, si prenda il numero 87, allora si avrà:

$$87 + 78 = 165$$

e poi

$$165 + 561 = 726$$

e continuando il procedimento si avrà

$$726 + 627 = 1353$$

ed al passo successivo si otterrà

$$1353 + 3531 = 4884.$$

In soli 4 passaggi abbiamo ottenuto il numero palindromo 4884 a partire dal numero originario 87. Se si avrà la voglia di provare ad applicare il procedimento ci si accorgerà ben presto che la maggior parte dei numeri convergono effettivamente verso un numero palindromo in pochissimi passaggi, quindi si potrebbe avanzare l'ipotesi che ciò accada in un numero finito di iterazioni per qualsiasi numero di partenza scelto. Ebbene, sembra essere così per praticamente tutti i numeri, tranne che per pochissimi di essi. Il più piccolo numero che si "ostina" a non diventare palindromo è 196, e per questo il problema in questione è anche noto come problema del 196. Sono state infatti calcolate al computer più di 40 milioni di iterazioni del procedimento senza riuscire ad ottenere un numero palindromo! Sembra proprio che il 196 sia un "numero maledetto" per i palindromi. L'enigma resta tuttora aperto, quindi, e nessun tentativo di dimostrazione matematica della possibilità (o impossibilità) che la congettura sia vera ha avuto successo. Forse solo un'intuizione geniale oppure computer più potenti sapranno dirci se la congettura è vera o falsa... Adesso si anticipa qualche semplice curiosità sul prossimo anno palindromo 2112, anche perché noi non ci saremo per poterne parlare! E' possibile scrivere 2112 come prodotto di fattori numerici: $2112 = 32 \times 66$ allora possiamo dire che 32 è un divisore di 2112, ma in particolare si ha: $2112 = 32^2 + 32^1 + 32^1 + 32^2$.

2112 è somma di potenze che hanno per base 32 e per esponenti le cifre del numero stesso. Se ora passiamo all'altro numero 66 sempre divisore di 2112, otteniamo che: $2112 = 66^2/2 - 66$.

Concludiamo con un'ultima curiosità su questo numero: $2112 = 21 \times 12$, ossia il numero ha tra i suoi divisori i numeri che si ottengono separando le prime due cifre dalle seconde due.

9 Conclusioni

I pochi esempi forniti bastano, a nostro modesto avviso, per provare che:

- Il valore della matematica quale disciplina altamente formativa è ricca di implicazioni sul piano intellettuale, culturale, economico e tecnologico.
- Al di là dello spirito innovativo e dell'occasione di incontro e di scambio tra studenti e docenti, la matematica può valorizzare l'intelligenza dei nostri studenti migliori e nel contempo, recuperare quei ragazzi che ancora non avessero avvertito quel particolare interesse per gli studi scientifici, offrendo loro opportunità di cimentarsi in un accostamento diverso alla matematica, più nuovo e motivante anche al fine di perseguire gratificazioni in un impegno mentale che richiede rigore logico, forte intuizione e fervida creatività.