

# POLINOMI CENTRALI PER ALGEBRE DI MATRICI

---

Il concetto di polinomio centrale ha svolto un ruolo cruciale nello sviluppo della teoria delle PI-algebre. Inizialmente l'interesse verso questi polinomi era dettato esclusivamente dalla curiosità in quanto si cercava una risposta al seguente problema posto da Kaplansky nel 1956: esistono polinomi centrali per  $M_n(C)$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ? La risposta affermativa a tale quesito fu data nel 1972 da Formanek e nel 1973 da Razmyslov che costruirono i primi polinomi centrali usando due differenti metodi.

Ben presto fu chiaro che l'uso dei polinomi centrali permetteva una diretta applicazione delle tecniche standard della teoria degli anelli commutativi. Allora l'intera esposizione della teoria delle PI-algebre fu rivoluzionata e i polinomi centrali rivestirono in essa un ruolo dominante.

D'ora in poi denoteremo con  $F$  un campo.

**5.1 Definizione.** Siano  $n \in \mathbb{N}$  e  $f \in F\langle X \rangle$ .  $f$  si dice *polinomio centrale* per  $M_n(F)$  se e solo se

- (1)  $f(M_n(F)) \subseteq Z(M_n(F))$ ;
- (2)  $f$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ ;
- (3)  $f$  ha termine noto nullo.

La condizione (3) serve per escludere i casi banali.

**5.2 Esempio.** Il seguente polinomio:

$$g := [x_1, x_2]^2 \in F\langle x_1, x_2 \rangle$$

è centrale per  $M_2(F)$ . Infatti, siano  $A_1, A_2 \in M_2(F)$  e sia

$$f(\lambda) := \lambda^2 - \text{tr}([A_1, A_2])\lambda + \det([A_1, A_2])$$

il polinomio caratteristico di  $[A_1, A_2]$ . Poiché  $tr([A_1, A_2]) = 0$  si ha che  $f(\lambda) = \lambda^2 + det([A_1, A_2])$ . Dal teorema di Hamilton-Cayley segue che:

$$0 = f([A_1, A_2]) = [A_1, A_2]^2 + det([A_1, A_2])I_2$$

e quindi:

$$[A_1, A_2]^2 = -det([A_1, A_2])I_2 \in Z(M_2(F)).$$

Pertanto  $g(M_2(F)) \subseteq Z(M_2(F))$ .

Inoltre  $g$  non è un'identità polinomiale perché, se consideriamo le matrici elementari  $e_{11}, e_{12}, e_{21}$ , vale:

$$\begin{aligned} g(e_{11}, e_{12} + e_{21}) &= [e_{11}, e_{12} + e_{21}]^2 = \\ &= (e_{11}e_{12} + e_{11}e_{21} - e_{12}e_{11} - e_{21}e_{11})^2 = \\ &= (e_{12} - e_{21})^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Vale la seguente caratterizzazione:

**5.3 Proposizione.** Siano  $m \in \mathbb{N}$  e  $f(x_1, \dots, x_m) \in F\langle X \rangle$ .  $f$  è centrale per  $M_n(F)$  se e solo se  $f$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$  ma  $[x_{m+1}, f]$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

**5.4 Proposizione.** Siano  $f \in C\langle X \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $t \in \underline{n-1}$ . Se  $f$  è un polinomio centrale per  $M_n(C)$ , allora  $f$  è un'identità per  $M_t(C)$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi vale:

$$0 \neq f(M_n(C)) \subseteq Z(M_n(C)) = \{\alpha I_n \mid \alpha \in C\}.$$

Sia  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $f = f(x_1, \dots, x_m)$ . Se  $\varphi$  è il monomorfismo definito nella dimostrazione di (2.38), allora, per ogni  $A_1, \dots, A_m \in M_t(C)$ , esiste  $\alpha \in C$  tale che

$$f(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_m)) = \alpha I_n.$$

Per come abbiamo definito la  $\varphi$ , per ogni  $i \in \underline{m}$ , si ha  $(\varphi(A_i))E_{nn} = 0$  e quindi:

$$\alpha E_{nn} = \alpha I_n E_{nn} = f(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_m))E_{nn} = 0.$$

Segue che  $\alpha = 0$  e pertanto

$$0 = f(\varphi(A_1), \dots, \varphi(A_m)) = \varphi(f(A_1, \dots, A_m)).$$

Ma  $\varphi$  è iniettiva e quindi  $f(A_1, \dots, A_m) = 0$ , cioè  $f$  è un'identità di  $M_t(C)$ . □

Vediamo, ora, la costruzione di polinomio centrale dovuta a Razmyslov. Essa è legata ai concetti di identità polinomiale debole e di trasformata di Razmyslov.

**5.5 Definizione.** Siano  $n, m \in \mathbb{N}$  e  $f(x_1, \dots, x_m) \in F\langle X \rangle$ .  $f$  è un'identità polinomiale debole per  $M_n(F)$  se, per ogni  $a_1, \dots, a_m \in M_n(F)$  tali che  $\text{tr}(a_1) = \dots = \text{tr}(a_m) = 0$  si ha  $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ .

Se  $t \in \underline{m}$ ,  $f$  si dice identità polinomiale debole nelle lettere  $x_1, \dots, x_t$  se per ogni  $a_1, \dots, a_m \in M_n(F)$  tali che  $\text{tr}(a_1) = \dots = \text{tr}(a_t) = 0$  si ha  $f(a_1, \dots, a_m) = 0$ .

$f$  è un'identità polinomiale debole in senso stretto per  $M_n(F)$  se  $f$  è una identità polinomiale debole per  $M_n(F)$  ma non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

**5.6 Esempio.** Il seguente polinomio:

$$f := [x_1^2, x_2] \in F\langle X \rangle$$

è un'identità polinomiale debole in senso stretto in  $x_1$  per  $M_2(F)$ .

Ovviamente ogni identità polinomiale è un'identità polinomiale debole.

**5.7 Definizione.** Sia  $j \in \mathbb{N}$  e sia  $f \in F\langle X \rangle$  un polinomio lineare nella lettera  $x_j$ . Allora esistono  $m \in \mathbb{N}$  e, per ogni  $i \in \underline{m}$ , esistono  $g_i, h_i \in F\langle X \rangle$  tali che  $\text{deg}^j(g_i) = \text{deg}^j(h_i) = 0$  e

$$f = \sum_{i=1}^m g_i x_j h_i.$$

Si dice *trasformata di Razmyslov* di  $f$  rispetto a  $x_j$  il seguente polinomio:

$$f^* = \sum_{i=1}^m h_i x_j g_i.$$

Ovviamente  $(f^*)^* = f$ .

**5.8 Proposizione.** Siano  $n, j, t \in \mathbb{N}$  e sia  $f(x_1, \dots, x_t) \in F\langle X \rangle$  un polinomio lineare nella lettera  $x_j$ . Allora  $f$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$  se e solo se la trasformata di Razmyslov  $f^*$  di  $f$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

*Dimostrazione.* La seguente applicazione

$$\varphi : M_n(F) \times M_n(F) \rightarrow F, \quad (a, b) \mapsto \text{tr}(ab)$$

è simmetrica, bilineare e non degenera, cioè se  $a \in M_n(F)$  allora

$$\text{tr}(ab) = 0 \quad \forall b \in M_n(F) \quad \Leftrightarrow a = 0.$$

Sia  $m \in \mathbb{N}$  e, per ogni  $i \in \underline{m}$ , siano  $g_i, h_i \in F\langle X \rangle$  tali che  $\text{deg}^j(g_i) = 0$ ,  $\text{deg}^j(h_i) = 0$  e  $f = \sum_{i=1}^m g_i x_j h_i$ .

Per ogni  $u_1, \dots, u_t \in M_n(F)$  poniamo

$$\bar{f} := f(u_1, \dots, u_t)$$

$$\forall i \in \underline{m} \quad \bar{g}_i := g_i(u_1, \dots, u_t), \bar{h}_i := h_i(u_1, \dots, u_t).$$

Segue che  $f$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$  se e solo se, per ogni  $u_1, \dots, u_t \in M_n(F)$ ,  $\bar{f} = 0$  e quindi se e solo se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{g}_i u_j \bar{h}_i = 0 &\Leftrightarrow \forall v \in M_n(F) \quad \text{tr} \left( \sum_{i=1}^m \bar{g}_i u_j \bar{h}_i v \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall v \in M_n(F) \quad \text{tr} \left( \sum_{i=1}^m \bar{h}_i v \bar{g}_i u_j \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall v \in M_n(F) \quad \varphi \left( \left( \sum_{i=1}^m \bar{h}_i v \bar{g}_i \right) u_j \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall v \in M_n(F) \quad \sum_{i=1}^m \bar{h}_i v \bar{g}_i = 0. \end{aligned}$$

Pertanto  $f$  è identità polinomiale per  $M_n(F)$  se e solo se  $f^* = \sum_{i=1}^m h_i x_j g_i$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ . □

**5.9 Proposizione.** *Siano  $n, t \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \underline{t}$  e sia  $f(x_1, \dots, x_t) \in F \langle X \rangle$  un polinomio lineare in  $x_j$  e omogeneo. Allora  $f$  è un'identità polinomiale debole in senso stretto in  $x_j$  per  $M_n(F)$  se e solo se  $f^*$  è un polinomio centrale per  $M_n(F)$ .*

*Dimostrazione.* “ $\Rightarrow$ ” Sia  $m \in \mathbb{N}$  e, per ogni  $i \in \underline{m}$ , siano  $g_i, h_i \in F \langle X \rangle$  tali che  $\deg^j(g_i) = \deg^j(h_i) = 0$  e  $f = \sum_{i=1}^m g_i x_j h_i$ .

Poniamo

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_t, x_{t+1}) &:= f(x_1, \dots, x_{j-1}, [x_j, x_{t+1}], x_{j+1}, \dots, x_t) = \\ &= \sum_{i=1}^m g_i(x_1, \dots, x_t) [x_j, x_{t+1}] h_i(x_1, \dots, x_t) = \\ &= \sum_{i=1}^m g_i(x_1, \dots, x_t) x_j x_{t+1} h_i(x_1, \dots, x_t) + \\ &\quad - \sum_{i=1}^m g_i(x_1, \dots, x_t) x_{t+1} x_j h_i(x_1, \dots, x_t). \end{aligned}$$

Per ogni  $a, b \in M_n(F)$ ,  $[a, b]$  è una matrice a traccia nulla e quindi  $p$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ . Calcoliamo la trasformata di Razmyslov



di  $p$  rispetto a  $x_j$ :

$$\begin{aligned} p^* &= \sum_{i=1}^m x_{t+1} h_i(x_1, \dots, x_t) x_j g_i(x_1, \dots, x_t) + \\ &\quad - \sum_{i=1}^m h_i(x_1, \dots, x_t) x_j g_i(x_1, \dots, x_t) x_{t+1} = \\ &= x_{t+1} f^* - f^* x_{t+1} = [x_{t+1}, f^*]. \end{aligned}$$

Da (5.8) segue che  $p^*$  è identità polinomiale per  $M_n(F)$  e quindi  $[x_{t+1}, f^*]$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ . Inoltre se  $f^*$  fosse un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ , allora, per (5.8), anche  $f$  lo sarebbe perchè  $(f^*)^* = f$ . Ma ciò è impossibile per ipotesi e quindi  $f^*$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ . Da (5.3) segue che  $f^*$  è centrale per  $M_n(F)$ .

“ $\Leftarrow$ ” Analogamente. □

Dalla proposizione precedente si evince che per costruire polinomi centrali è sufficiente determinare delle identità polinomiali deboli in senso stretto. Per far ciò in genere si ricorre al polinomio di Capelli:

**5.10 Definizione.** Per ogni  $m \in \mathbb{N}$ , il seguente polinomio

$$C_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{m+1}) := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} (-1)^\pi y_1 x_{\pi(1)} y_2 x_{\pi(2)} \cdots y_m x_{\pi(m)} y_{m+1}$$

si dice *m-esimo polinomio di Capelli*.

Ovviamente, per ogni  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(C_m) = 2m + 1$  e  $C_m$  è un polinomio multilineare. Inoltre si dimostra che  $C_m$  è alternante in  $x_1, \dots, x_m$  e da ciò e da (2.32) segue:

**5.11 Proposizione.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il polinomio di Capelli  $C_{n^2+1}$  è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

Dimostriamo, invece, che vale il seguente risultato:

**5.12 Proposizione.** Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , il polinomio di Capelli  $C_{n^2}$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $R := \{e_{ij} \mid i, j \in \underline{n}\}$  l'insieme delle matrici elementari e siano  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $i, j_1, i_1, \dots, j_m, i_m \in \underline{n}$ ,  $a_1, \dots, a_m \in M_n(F)$ . Allora:

$$\begin{aligned} C_m(a_1, \dots, a_m, e_{ii_1}, e_{j_1 i_2}, e_{j_2 i_3}, \dots, e_{j_{m-1} i_m}, e_{j_m i}) &= \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} (-1)^\pi e_{ii_1} a_{\pi(1)} e_{j_1 i_2} a_{\pi(2)} \cdots a_{\pi(m-1)} e_{j_{m-1} i_m} a_{\pi(m)} e_{j_m i}. \end{aligned}$$

Per ogni  $k \in \underline{m}$ , sia  $a_{i_k j_k}^{\pi(k)}$  l'elemento di posto  $(i_k, j_k)$  della matrice  $a_{\pi(k)}$ . Allora:

$$\begin{aligned} C_m(a_1, \dots, a_m, e_{i_1 i_1}, e_{j_1 i_2}, e_{j_2 i_3}, \dots, e_{j_{m-1} i_m}, e_{j_m i}) &= \\ &= \left( \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} (-1)^\pi a_{i_1 j_1}^{\pi(1)} a_{i_2 j_2}^{\pi(2)} \dots a_{i_m j_m}^{\pi(m)} \right) e_{ii}. \end{aligned}$$

Sia  $b = (b_{hk}) \in M_m(F)$  tale che

$$\forall h, k \in \underline{m} \quad b_{hk} := a_{i_k j_k}^h.$$

Allora:

$$C_m(a_1, \dots, a_m, e_{i_1 i_1}, e_{j_1 i_2}, e_{j_2 i_3}, \dots, e_{j_{m-1} i_m}, e_{j_m i}) = \det(b) e_{ii}.$$

In particolare, se  $m := n^2$ , per ogni  $h \in \underline{m}$  basta porre  $a_h := e_{i_h j_h}$  e si ottiene  $\det(b) = 1$ . Pertanto

$$C_{n^2}(a_1, \dots, a_m, e_{i_1 i_1}, e_{j_1 i_2}, e_{j_2 i_3}, \dots, e_{j_{m-1} i_m}, e_{j_m i}) = e_{ii} \neq 0$$

e quindi  $C_{n^2}$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ . □

Vediamo, ora, come si costruisce un polinomio centrale usando il metodo di Razmyslov.

Consideriamo lo spazio  $sl_n(F)$  delle matrici di ordine  $n$  a traccia nulla. Si ha che  $\dim_F sl_n(F) = n^2 - 1$  e una base canonica di  $sl_n(F)$  su  $F$  è la seguente:

$$B = \{e_{ij} \mid i, j \in \underline{n}, i \neq j\} \cup \{e_{11} - e_{ii} \mid i \in \underline{n} - \{1\}\},$$

dove, per ogni  $i, j \in \underline{n}$ ,  $e_{ij}$  è una matrice elementare.

Pertanto  $C_{n^2}(x_1, \dots, x_{n^2}, y_1, \dots, y_{n^2+1})$  si annulla per ogni valutazione delle lettere  $x_1, \dots, x_{n^2}$  con matrici a traccia nulla e quindi è identità polinomiale debole per  $M_n(F)$  in  $x_1, \dots, x_{n^2}$ . Allora, considerate altre lettere  $z_1, \dots, z_{2(n^2-1)}$  e posto

$$f := C_{n^2}(x_1, [z_1, z_2], \dots, [z_{2(n^2-1)-1}, z_{2(n^2-1)}], y_1, \dots, y_{n^2+1}),$$

si ha che  $f$  è multilineare ed è un'identità polinomiale debole in  $x_1$ .

Facciamo vedere che  $f$  non è un'identità polinomiale per  $M_n(F)$ .

Osserviamo che

$$\forall i, j \in \underline{n}, i \neq j \quad e_{ij} = [e_{ii}, e_{ij}]$$

$$\forall i \in \underline{n} - \{1\} \quad e_{11} - e_{ii} = [e_{1i}, e_{i1}].$$

Allora, se  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1} \in M_n(F)$  e  $a_1, \dots, a_{n^2-1}$  sono gli elementi di  $B$ , poniamo

$$\bar{f} := C_{n^2}(e_{11}, a_1, \dots, a_{n^2-1}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1}).$$

Siano  $j \in \underline{n^2 - 1}$  e  $i \in \underline{n} - \{1\}$  tali che  $a_j := e_{11} - e_{ii}$ . Poiché il polinomio di Capelli è alternante rispetto alle prime  $n^2$  lettere, si ha:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= C_{n^2}(e_{11}, a_1, \dots, a_{j-1}, e_{11} - e_{ii}, a_{j+1}, \dots, a_{n^2-1}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1}) = \\ &= -C_{n^2}(e_{11}, a_1, \dots, a_{j-1}, e_{ii}, a_{j+1}, \dots, a_{n^2-1}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1}). \end{aligned}$$

Segue che esistono  $(i_1, j_1), \dots, (i_{n^2-1}, j_{n^2-1}) \in (\underline{n})^2 - (1, 1)$  tali che

$$\bar{f} = (-1)^{n-1} C_{n^2}(e_{11}, e_{i_1 j_1}, e_{i_2 j_2}, \dots, e_{j_{n^2-1} i_{n^2-1}}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1}).$$

Come nella dimostrazione di (5.12), è possibile scegliere  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n^2+1}$  tra le matrici elementari in modo tale che quest'ultima valutazione sia non nulla. Pertanto  $f$  è un'identità polinomiale debole in senso stretto per  $M_n(F)$  in  $x_1$  e così, per (5.9),  $f^*$  è un polinomio centrale per  $M_n(F)$ .

Si noti che il polinomio ottenuto risulta centrale in  $M_n(F)$  qualunque sia il campo  $F$ .