CAPITOLO 3

IL TEOREMA DI AMITSUR-LEVITZKI

Il Teorema di Amitsur-Levitzki è uno dei più importanti risultati riguardanti le identità di algebre di matrici e di esso sono state date quattro diverse dimostrazioni. L'originale del 1950, dovuta ad S. A. Amitsur e J. Levitzki, è di tipo combinatorio ed è stata successivamente modificata da Swann utilizzando la teoria dei grafi.
Nel 1958, B. Kostant [12] ha dato una dimostrazione basata sulla teoria delle *identità traccia* e sulla teoria di Frobenius riguardante le rappresentazioni dei gruppi simmetrici e alternanti.
La dimostrazione di Y. P. Razmyslov [18] del 1974 è basata, invece, sulla multilinearizzazione del Teorema di Hamilton-Caley.
La dimostrazione che noi presenteremo è quella del 1976 di S. Rosset [19]: è la più breve ed ingegnosa e fa uso del concetto di *algebra esterna*.

3.1 Teorema. *(Teorema di Amitsur-Levitzki [4])*
Sia $n \in \mathbb{N}$.

(1) Il grado minimo delle identità polinomiali proprie di $M_n(C)$ *è* $2n$.

(2) Il polinomio standard $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ *è un'identità polinomiale per* $M_n(C)$.

Vediamo subito la dimostrazione della prima parte del teorema:

Dimostrazione. (di **(3.1(1))**)
Siano $t \in \mathbb{N}$ e $f \in C\langle X\rangle$ un'identità polinomiale per $M_n(C)$ che possiamo supporre propria e multilineare di grado $t \leq 2n-1$. Allora, per ogni $\pi \in \mathcal{S}_t$,

esiste $\alpha_\pi \in C$ tale che:

$$f = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_t} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(t)}$$

e supponiamo che $\alpha_{id_{\underline{t}\rfloor}} M_n(C) \neq 0$.
Consideriamo l'insieme delle matrici elementari $E = \{E_{ij} \mid i, j \in \underline{n}\rfloor\}$ e, per ogni $k \in \underline{n}\rfloor$, definiamo:

$$T_k := \begin{cases} E_{\frac{k+1}{2}\,\frac{k+1}{2}} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ E_{\frac{k}{2}\,\frac{k+2}{2}} & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

cioè $T_1 := E_{11}$, $T_2 := E_{12}$, $T_3 := E_{22}$, $T_4 := E_{23}$, ecc.. Osserviamo che l'insieme $\{T_k \mid k \in \underline{n}\rfloor\}$ ha cardinalità $2n-1$.
Per ogni $\pi \in \mathcal{S}_t$, poniamo $T_\pi := T_{\pi(1)} T_{\pi(2)} \dots T_{\pi(t)}$ e sia $\pi \in \mathcal{S}_t$ tale che $T_\pi \neq 0$. Per ogni $k \in \underline{t}\rfloor$, poniamo $E_{i_k j_k} := T_{\pi(k)}$ e sia $k \in \underline{t}\rfloor$ tale che $T_{\pi(k)} = E_{11} = T_1$. Allora:

$$\begin{aligned} T_\pi &= T_{\pi(1)} T_{\pi(2)} \dots T_{\pi(k-1)} T_{\pi(k)} T_{\pi(k+1)} \dots T_{\pi(t)} = \\ &= T_{\pi(1)} T_{\pi(2)} \dots E_{i_{k-1}\, j_{k-1}} E_{11} E_{i_{k+1}\, j_{k+1}} \dots T_{\pi(t)}. \end{aligned}$$

Ma $E_{i_{k-1}\, j_{k-1}} E_{11} E_{i_{k+1}\, j_{k+1}} \neq 0$ se e solo se $j_{k-1} = 1$ e $i_{k+1} = 1$, cioè se e solo se

$$T_{\pi(k+1)} = E_{i_{k+1}\, j_{k+1}} = E_{12} = T_2$$

e

$$T_{\pi(k-1)} = E_{i_{k-1}\, j_{k-1}} = E_{11} = T_1 = T_{\pi(k)}.$$

Pertanto, poiché $T_\pi \neq 0$, si deve avere $T_1 = T_{\pi(1)}$ e $T_2 = T_{\pi(2)}$, cioè $\pi(1) = 1$ e $\pi(2) = 2$.
Sia, ora, $z \in \underline{t}\rfloor$ tale che $T_{\pi(z)} = E_{22} = T_3$. Essendo $T_\pi \neq 0$, deve risultare:

$$0 \neq T_{\pi(z-1)} T_{\pi(z)} T_{\pi(z+1)} = E_{i_{z-1}\, j_{z-1}} E_{22} E_{i_{z+1}\, j_{z+1}}$$

e ciò si verifica se e solo se $j_{z-1} = 2$ e $i_{z+1} = 2$, cioè se e solo se

$$T_{\pi(z-1)} = E_{i_{z-1}\, j_{z-1}} = E_{22} = T_2$$

e

$$T_{\pi(z+1)} = E_{i_{z+1}\, j_{z+1}} = E_{23} = T_4.$$

Segue che $\pi(z-1) = 2 = \pi(2)$ e quindi $z = 3$. Pertanto $\pi(3) = 3$ e $\pi(4) = 4$.
Procedendo in questo modo, è evidente che $T_\pi \neq 0$ se e solo se $\pi = id_{\underline{t}\rfloor}$ e quindi:

$$f(T_1, T_2, \dots, T_t) = \alpha_{id_{\underline{t}\rfloor}} T_1 \dots T_t = \begin{cases} \alpha_{id_{\underline{t}\rfloor}} E_{1\,\frac{t+1}{2}} & \text{se } t \text{ è dispari} \\ \alpha_{id_{\underline{t}\rfloor}} E_{1\,\frac{t+2}{2}} & \text{se } t \text{ è pari} \end{cases}$$

In entrambi i casi risulta $f(T_1, T_2, \dots, T_t) \neq 0$ che è impossibile perchè avevamo supposto che f fosse è un'identità di $M_n(C)$. Pertanto f non può essere un'identità di $M_n(C)$.

□

Per la dimostrazione della seconda parte del teorema abbiamo bisogno di fare alcune premesse.

3.2 Lemma. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in C\langle X\rangle$ un'identità polinomiale multilineare per una C-algebra A. Se B è una C-algebra commutativa, allora f è un'identità polinomiale del prodotto tensoriale $A \bigotimes_C B$.*

Dimostrazione. Da **(2.13)** segue che, per ogni $\pi \in \mathcal{S}_n$, esiste $\alpha_\pi \in C$ tale che

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)}.$$

Se $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono insiemi di generatori rispettivamente per A e B come C-moduli, allora $\mathcal{B}'' := \{a \otimes b \,|\, a \in \mathcal{B}, b \in \mathcal{B}'\}$ è un insieme di generatori per $A \bigotimes_C B$ come C-modulo.
Da **(2.32)** segue che, per dimostrare che f è un'identità polinomiale per $A \bigotimes_C B$, basta verificare che f si annulla per ogni valutazione delle sue indeterminate sugli elementi di $\mathcal{B}''$. Pertanto, dalla commutatività di B, segue che, per ogni $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{B}'$,

$$\begin{aligned} f(a_1 \otimes b_1, \ldots, a_n \otimes b_n) &= \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \alpha_\pi (a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(n)} \otimes b_{\pi(1)} \ldots b_{\pi(n)}) = \\ &= \left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \alpha_\pi a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(n)} \right) \otimes b_1 \ldots b_n = \\ &= f(a_1, \ldots, a_n) \otimes b_1 \ldots b_n = 0 \otimes b_1 \ldots b_n = 0 \end{aligned}$$

□

Pertanto le identità polinomiali multilineari si trasportano per tensorizzazione con algebre commutative.

3.3 Definizione. Siano K un campo, $n \in \mathbb{N}$ e sia $K[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi commutativi su K nelle indeterminate indipendenti $x_1, \ldots, x_n$. Una funzione $f(x_1, \ldots, x_n)$ si dice *funzione simmetrica* se

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n \qquad f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Per ogni $j \in \underline{n}|$ la *k-sima funzione elementare simmetrica* di $x_1, \ldots, x_n$ è:

$$e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

mentre la k-sima *funzione simmetrica potenza* di $x_1, \ldots, x_n$ è

$$p_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k.$$

Le *formule di Newton* forniscono un legame fra le funzioni simmetriche elementari e le funzioni simmetriche potenza:

3.4 Lemma. ***(Formule di Newton)*** *Sia $n \in \mathbb{N}$.*
(1) $\forall\, k \in \underline{n}\rfloor \qquad p_k - p_{k-1}e_1 + p_{k-2}e_2 + \ldots + (-1)^k k e_k = 0$
(2) $\forall\, k \in \mathbb{N} - \underline{n}\rfloor \qquad p_k - p_{k-1}e_1 + p_{k-2}e_2 + \ldots + (-1)^n p_{k-n}e_n = 0$

Per dimostrare tali formule è utile introdurre la seguente notazione: se $n, h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{N}_0$ e $x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$, allora $S(x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n})$ indica la somma di tutti i monomi di $K[x_1, \ldots, x_n]$ ottenuti a partire da $x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$ sotto l'azione naturale del gruppo simmetrico $\mathcal{S}_n$ sulle indeterminate $x_1, \ldots x_n$.

Dimostrazione. **(1)** In riferimento alla notazione introdotta, si ha:
$p_{k-1}e_1 = p_k + S(x_1^{k-1}x_2)$
$p_{k-2}e_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3)$
$\vdots$
$p_{k-i}e_i = S(x_1^{k-i+1}x_2 \ldots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2 \ldots x_{i+1}) \qquad \forall\, i \in \underline{k-2}\rfloor$
$\vdots$
$p_1e_{k-1} = S(x_1^2x_2 \ldots x_{k-1}) + ke_k.$
Pertanto, facendo la somma membro a membro a segni alterni, si ottiene la prima formula.
(2) Si considerano le seguenti uguaglianze:
$p_{k-1}e_1 = p_k + S(x_1^{k-1}x_2)$
$p_{k-2}e_2 = S(x_1^{k-1}x_2) + S(x_1^{k-2}x_2x_3)$
$\vdots$
$p_{k-i}e_i = S(x_1^{k-i+1}x_2 \ldots x_i) + S(x_1^{k-i}x_2 \ldots x_{i+1}) \qquad \forall\, i \in \underline{k-2}\rfloor$
$\vdots$
$p_{k-n}e_n = S(x_1^{k-n+1}x_2 \ldots x_n)$
e facendo, come prima, la somma membro a membro a segni alterni si ottiene la seconda formula.

□

3.5 Proposizione. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $A \in M_n(\mathbb{Q})$. Siano $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ gli autovalori (senza molteplicità) di A e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tali che il seguente polinomio*

$$p_A(t) := t^n + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \alpha_i t^{n-i} \in \mathbb{Q}[t]$$

sia il polinomio caratteristico di A. Allora, per ogni $k \in \underline{n}\rfloor$, α_k è un polinomio razionale in $tr(A^i)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e soddisfa la seguente formula:

$$k\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \alpha_{k-i} tr(A^i).$$

Dimostrazione. In generale vale:

$$\forall\, k \in \underline{n}\rfloor \qquad \alpha_k = e_k(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

A è simile in $\mathbb{C}$ ad una matrice triangolare superiore $B \in M_n(\mathbb{C})$ avente sulla diagonale principale gli autovalori di A e quindi, se I_n è la matrice identità di $M_n(\mathbb{Q})$, si ha

$$p_A(t) = -det(-B + tI_n) = \prod_{i=1}^{n}(t - \beta_i).$$

Poiché la traccia è un invariante per matrici simili, segue

$$tr(A^k) = \beta_1^k + \ldots + \beta_n^k = p_k(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Da **(3.4(1))** segue subito che

$$k\alpha_k = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\alpha_{k-i}tr(A^i).$$

□

3.6 Proposizione. *Siano A una $\mathbb{Q}$-algebra commutativa unitaria e $n \in \mathbb{N}$. Se $X \in M_n(A)$ è tale che $tr(X^i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, allora $X^n = 0$.*

Dimostrazione. Sia $X = (x_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M_n(A)$ e, per ogni $i, j \in \underline{n}|$, sia t_{ij} una indeterminata commutativa. L'anello dei polinomi

$$T := \mathbb{Q}[t_{11}, \ldots, t_{1n}, t_{21}, \ldots, t_{2n}, \ldots, t_{nn}]$$

è un dominio d'integrità contenuto nel suo campo dei quozienti

$$K := \mathbb{Q}(t_{11}, \ldots, t_{1n}, t_{21}, \ldots, t_{2n}, \ldots, t_{nn}).$$

Sia $U \in M_n(K)$ la *matrice generica*, cioè sia $U := (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$. Poiché T è un'algebra libera, per definire un omomorfismo basta definire le immagini delle indeterminate t_{ij}. Consideriamo, allora, il seguente omomorfismo:

$$g : T \to A, \qquad t_{ij} \mapsto x_{ij}.$$

Esso si estende in modo unico agli anelli di matrici in questo modo:

$$\widetilde{g} : M_n(T) \to M_n(A), \qquad U \mapsto X.$$

Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ tali che il seguente polinomio

$$p_U(t) = t^n + \sum_{i=1}^{t}(-1)^i\alpha_i t^{n-i} \in K[t]$$

sia il polinomio caratteristico di U. Allora per il teorema di Hamilton-Caley, $p_U(U) = 0$, cioè

$$U^n - \alpha_1 U^{n-1} + \alpha_2 U^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}U + (-1)^n\alpha_n = 0.$$

Per (**3.5**), per ogni $k \in \underline{n}\rfloor$, α_k è un polinomio a coefficienti razionali nelle tracce di U^i con $i \in \mathbb{N}$ e, poiché

$$\forall i \in \mathbb{N} \qquad g(tr(U^i)) = tr(X^i),$$

dalle ipotesi su X segue che $g(\alpha_k) = 0$. Pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \widetilde{g}(U^n - \alpha_1 U^{n-1} + \alpha_2 U^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}U + (-1)^n \alpha_n) = \\ &= \widetilde{g}(U^n) - g(\alpha_1)\widetilde{g}(U^{n-1}) + g(\alpha_2)\widetilde{g}(U^{n-2}) + \ldots + \\ &\quad +(-1)^{n-1}g(\alpha_{n-1})\widetilde{g}(U) + (-1)^n g(\alpha_n) = X^n + 0 = X^n. \end{aligned}$$

□

Fondamentale per la dimostrazione del teorema di Levitzki è il concetto di algebra esterna:

3.7 Definizione. Siano $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un insieme di indeterminate non commutative, F un campo tale che $char(F) \neq 2$ e sia I l'ideale di $F\langle X \rangle$ generato da tutti i polinomi del tipo $x_i x_j + x_j x_i \in F\langle X \rangle$ con $i, j \in \mathbb{N}$. Allora il quoziente $E := F\langle X \rangle / I$ si dice *algebra esterna su F generata da X* (o *algebra di Grassmann*).

Segue subito che una base di $F\langle X \rangle / I$ è costituita dalla parola vuota 1 e da tutti i possibili monomi del tipo $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ con $n, i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ tali che $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$.
Vediamo, ora, un altro modo in cui si può definire l'algebra esterna.

3.8 Definizione. Sia V un C-bimodulo. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce la *potenza tensoriale* $V^{\otimes n}$ induttivamente nel seguente modo:

$$V^{\otimes 0} := C$$

$$V^{\otimes 1} := V$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad V^{\otimes(n+1)} = V \bigotimes_C V^{\otimes n}.$$

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $V^{\otimes n}$ è un C-bimodulo.
Posto

$$T_C(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes n},$$

si dice che $T_C(V)$ è l'*algebra tensoriale* di V e in essa il prodotto è definito per giustapposizione.

Si dimostra che se X è un insieme, F un campo tale che $char(F) \neq 2$ e V è uno spazio vettoriale su F con base $\mathcal{B} = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, allora

$$T_F(V) \cong F\langle X \rangle,$$

dove X è equipotente a V (l'isomorfismo è quello che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, ad x_i associa v_i). Pertanto l'algebra esterna E si può ottenere come quoziente di $T_F(V)$ con l'ideale I di $T_F(V)$ generato da tutti gli elementi del tipo $v \otimes w + w \otimes v$ al variare di $v, w \in V$.
L'algebra esterna è un esempio di algebra $\mathbb{Z}_2$-graduata. Più in generale si ha la seguente:

3.9 Definizione. Sia S un monoide. Una C-algebra R è *graduata sopra S* se, per ogni $s \in S$, esiste un C-sottomodulo R_s di R tale che

$$R = \bigoplus_{s \in S} R_s$$

e

$$\forall\, s_1, s_2 \in S \qquad R_{s_1} R_{s_2} \subseteq R_{s_1 s_2}.$$

Come detto in precedenza, l'algebra esterna E è una *superalgebra*, cioè è un'algebra graduata sopra $\mathbb{Z}_2$. Infatti, posti

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \qquad e_i := x_i$$

$$E_0 := span_F \langle 1, e_{i_1} \dots e_{i_{2m}} \,|\, m \in \mathbb{N} \rangle$$

$$E_1 := span_F \left\langle e_{i_1} \dots e_{i_{2m+1}} \,|\, m \in \mathbb{N} \right\rangle$$

si ha che $E_0 E_1 \subseteq E_1$, $E_1 E_0 \subseteq E_1$ e $E = E_0 \bigoplus E_1$.

L'importanza dell'algebra esterna nella teoria delle PI-algebre è rivelata dal seguente:

3.10 Teorema. *(Teorema di Kemer [11])*
Sia F un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0. Se A è una PI-algebra su F, allora esiste una superalgebra $B = B_0 \bigoplus B_1$ di dimensione finita su F tale che, posto $G(B) := (B_0 \bigotimes_F E_0) \bigoplus (B_1 \bigotimes_F E_1)$, si ha

$$T(A) = T(G(B)).$$

Ritorniamo alla dimostrazione del teorema di Amitsur-Levitzki:

3.11 Lemma. *Sia F un campo tale che $char(F) = 0$ e sia A una F-algebra. Allora, per ogni $n, r \in \mathbb{N}$ e per ogni $a_1, \dots, a_{2r} \in M_n(A)$, si ha*

$$tr(S_{2r}(a_1, \dots, a_{2r})) = 0.$$

Dimostrazione. Se A_{2r} è il gruppo alterno di grado $2r$ allora, per ogni permutazione dispari $\sigma \in \mathcal{S}_{2r}$, risulta

$$\mathcal{S}_{2r} = A_{2r} \cup A_{2r}\sigma = A_{2r} \cup A_{2r}\sigma^{-1}.$$

In particolare se $\sigma := (1 \quad 2 \ldots 2r-1 \quad 2r) \in \mathcal{S}_{2r} - A_{2r}$ allora, per ogni $\pi \in \mathcal{S}_{2r}$, vale:

$$\begin{aligned} tr(a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(2r-1)} a_{\pi(2r)}) &= tr(a_{\pi(2r)} a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(2r-1)}) = \\ &= tr(a_{\pi\sigma^{-1}(1)} a_{\pi\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{\pi\sigma^{-1}(2r)}) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} tr \quad & (S_{2r}(a_1, \ldots, a_{2r})) = tr\left(\sum_{\pi \in \mathcal{S}_{2r}} (-1)^{\pi} a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(2r)} \right) = \\ = \quad & tr\left(\sum_{\pi \in A_{2r}} a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(2r)} + \sum_{\pi \in A_{2r}} (-1) a_{\pi\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{\pi\sigma^{-1}(2r)} \right) = \\ = \quad & \sum_{\pi \in A_{2r}} tr(a_{\pi(1)} \ldots a_{\pi(2r)}) - \sum_{\pi \in A_{2r}} tr(a_{\pi\sigma^{-1}(1)} \ldots a_{\pi\sigma^{-1}(2r)}) = 0. \end{aligned}$$

□

Dimostrazione di (3.1(2)).
Se proviamo che il polinomio standard $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ è un'identità polinomiale per $M_n(\mathbb{Q})$, poiché $M_n(\mathbb{Z}) \subseteq M_n(\mathbb{Q})$, esso sarà un'identità polinomiale anche per $M_n(\mathbb{Z})$. Inoltre, essendo

$$M_n(C) \cong M_n(\mathbb{Z}) \bigotimes_{\mathbb{Z}} C,$$

per **(3.2)** si avrà che $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ è un'identità polinomiale per $M_n(C)$. Proviamo, pertanto, che $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ è identità polinomiale per $M_n(\mathbb{Q})$ e sia E l'algebra esterna su $\mathbb{Q}$. Allora

$$M_n(E) \cong M_n(\mathbb{Q}) \bigotimes_{\mathbb{Q}} E.$$

Siano $a_1, \ldots, a_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$ e siano $e_1, \ldots, e_{2n} \in E$ i generatori di E. Posto $a := a_1 e_1 + \ldots + a_{2n} e_{2n}$, si ha che $a \in M_n(E)$ e

$$a^2 = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i e_i a_j e_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (a_i a_j - a_j a_i) e_i e_j.$$

Allora, posto $b := a^2$, segue che $b \in M_n(E_0)$ e, per ogni $r \in \mathbb{N}$, vale:

$$\begin{aligned} b^r \quad &= \quad a^{2r} = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_{2r} = 1 \\ i_j \neq i_k \ \forall j \neq k}}^{n} a_{i_1} \ldots a_{i_{2r}} e_{i_1} \ldots e_{i_{2r}} = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_{2r} \leq n} S_{2r}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{2r}}) e_{j_1} \ldots e_{j_{2r}}. \end{aligned}$$

Per **(3.11)** si ha:

$$tr(b^r) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_{2r} \le n} tr(S_{2r}(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{2r}})e_{j_1} \ldots e_{j_{2r}}) = 0.$$

Dalla commutatività di E_0 e da **(3.6)** segue che $b^n = 0$ e quindi

$$0 = b^n = S_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n})e_1 \ldots e_{2n}.$$

Poiché $M_n(E) \cong M_n(\mathbb{Q}) \bigotimes_{\mathbb{Q}} E$, $M_n(E)$ è un $M_n(\mathbb{Q})$-modulo libero con base $\{\prod e_{j_1} \ldots e_{j_{2r}} \,|\, 1 \le j_1 < \ldots < j_{2r} \le n\}$ e quindi $S_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n}) = 0$.
Dall'arbitrarietà di $a_1, \ldots, a_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$ segue che $S_{2n}(x_1, \ldots, x_{2n})$ è una identità polinomiale per $M_n(\mathbb{Q})$.

$\square$