

N.d.R.

Riteniamo utile riportare questa aggiunta (scritta per questo Quaderno) per cercare di rendere più completa la panoramica degli interessi di De Giorgi, che ha sempre auspicato la collaborazione di matematici di diversa estrazione, in particolare analisti e geometri.

2.2 (ADDENDUM)

G. De Cecco, G. Palmieri

Spazi quasi-riemanniani e quasi-finsleriani

Nella seconda metà degli anni 80 stavamo occupandoci di questioni inerenti alle varietà di Lipschitz, varietà topologiche i cui cambiamenti di carte sono funzioni (localmente) lipschitziane. In particolare cercavamo una buona definizione di distanza intrinseca sulle varietà LIP

Sollecitato da nostre domande, De Giorgi fece alcune proposte molto interessanti e formulò parecchie congetture (riportate in [90],[95],[103],[114]). Come al solito lasciava poi all' iniziativa autonoma il compito di sviluppare le idee esposte.

In [90] si propone, nel caso di aperti di \mathbf{R}^n , una definizione di distanza quasi-riemanniana e quasi-finsleriana. Fondamentale per individuarne il tipo è lo studio della funzione

$$\varphi(x, y) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\delta(x, x + ty)}{|t|}$$

che per quasi ogni x risulta una norma.

Sono poi formulate congetture “la cui soluzione, positiva o negativa — secondo De Giorgi — individuerrebbe un quadro generale in cui inserire le ricerche sulla estensione alle varietà LIP dei risultati classici sulle varietà riemanniane o finsleriane”.

In [95], insieme ad altre questioni sulle varietà analitiche e sui fondamenti della Matematica, si propone un'altra definizione di spazio metrico quasi-riemanniano (M, σ, g) , uno spazio che abbia contemporaneamente una struttura *metrica* data da una distanza geodetica σ e una *riemanniana* data da una forma bilineare simmetrica g di tipo ellittico e tale che le due strutture verifichino quasi ovunque alcune condizioni di compatibilità. Le varietà riemanniane (M, g) sono anche quasi-riemanniane se σ è l' usuale distanza intrinseca indotta da g . Se (M, g) è una LIP varietà riemanniana, la distanza “integrale” proposta, equivalente a

$$\tilde{\delta}(x, y)^{-1} = \inf \{ \|df\|_{L_\infty}; \quad f : M \rightarrow \mathbf{R} \quad LIP, f(x) = 0, f(y) = 1 \}$$

coincide con quella geometrica introdotta dagli autori, utilizzando l'integrale di lunghezza ¹.

In [103] è proposta una costruzione di distanza a partire da una funzione $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ tale che

$$\varphi(x, ty) = t\varphi(x, y) \quad t > 0; \quad 0 < p|y| \leq \varphi(x, y) \leq q|y| < +\infty, \quad \forall y \in \mathbf{R}^n.$$

Allora l'insieme delle distanze δ su \mathbf{R}^n , equivalenti a quella euclidea e verificanti

$$(*) \quad \limsup_{y \rightarrow x} \frac{\delta(x, y)}{\varphi(x, y - x)} \leq 1$$

è dotato di massimo, $\tilde{\delta}$. La misura di Hausdorff relativa a $\tilde{\delta}$ è legata a φ nel caso che nella (*) valga l'uguaglianza. Posto

$$\det\varphi(x, \cdot) = \mathcal{H}(\{y; |y| \leq 1\}) / \mathcal{H}(\{y; \varphi(x, y) \leq 1\})$$

(essendo \mathcal{H} la misura di Lebesgue) risulta

$$\mathcal{H}_{\tilde{\delta}}^n(E) = \int_E \det\varphi(x, \cdot) dx$$

dove l'integrale è quello superiore di Lebesgue.

Si osservi che se $\varphi(x, y) = \|(Ax)y\|$, dove A è una matrice quadrata, allora $\det\varphi(x, \cdot) = |\det A|$.

De Giorgi aggiunge che, volendo estendere le precedenti considerazioni a spazi di tipo più generale, è desiderabile trovare una definizione più intrinseca di (*) che usi solo funzioni positive di due variabili senza far intervenire la topologia dello spazio ambiente. Risultati in questa direzione sono stati ottenuti anche da S. Venturini.

L'obiettivo, a lunga scadenza, è quello di fare calcolo delle variazioni su varietà LIP ed in particolare su poliedri ².

In [114] l'ambiente diventa ancora più generale; si considerano infatti spazi metrici generalizzati (S, σ) , dove S è un insieme e $\sigma : S \times S \rightarrow \mathbf{R}^+$ è un'applicazione soggetta all'unica condizione $\sigma(x, x) = 0$. Generalizzazioni di spazi metrici sono stati considerati anche da Busemann, Menger, Carathéodory, Alexandrow e recentemente da Gromov.

¹cfr. Math. Z. 207 (1991), 223-243; Math. Z. 218 (1995), 223-237.

²J. EELLS, B. FUGLENDE, *Harmonic maps between Riemannian Polyhedra*, Cambridge Univ. Press, 2001.