CAPITOLO 10

Reti di ordine q^2 e di grado $q+1$ che ammettono $PSL(4,q)_N$; una caratterizzazione delle reti derivabili

Nel Capitolo 8 abbiamo studiato la corrispondenza tra reti derivabili e piani proiettivi di dimensione tre. Abbiamo visto inoltre che il gruppo delle collineazioni della rete è isomorfo a $PSL(4,q)_N$ dove N é una retta dello spazio proiettivo.
In questo Capitolo, studieremo se l'esistenza del gruppo isomorfo a $PSL(4,q)_N$ comporta l'esistenza di una struttura derivabile sulla rete.
R.H. Bruck considera il caso in cui la rete di ordine n e grado k può essere estesa ad un piano affine (si veda Ostrom [**117**]). Se $n > (((n+1)-k)-1)^2$, Bruck dimostra che esiste al piú un piano che estende la rete. Se $n = (((n+1)-k)-1)^2$, Ostrom dimostra che ci sono al piú due piani che estendono la rete [**117**].
Per studiare le reti finite si ricorre spesso alla costruzione di uno spazio vettoriale che contenga la rete. Senza tale spazio vettoriale sarebbe difficile studiare i gruppi di collineazioni che operano sulla rete. Per esempio, Ch. Hering [**41**] ha considerato gruppi di elazione di reti contenute in uno spazio vettoriale.

In questo Capitolo, assumeremo solo che la rete ammetta un gruppo di collineazioni ismorfo a $PSL(4,q)_N$.

Il prossimo risultato sará usato spesso in seguito:

Proposizione 10.1. *Sia R una rete di ordine q^s e di grado $q+1$, $q \geq 2$. Sia G un gruppo non-banale di collineazioni di R che fissa ogni punto della retta all'infinito.*

(1) Se G fissa almeno due punti affini P, Q, con $P \neq Q$, allora G fissa almeno q^2 punti.

(2) Se G fissa esattamente t punti su qualche retta, allora G fissa t punti su ogni retta che G-invariante e il numero totale di punti fissati è t^2. Inoltre, G fissa t rette in ogni classe di parallelismo. Cioé G fissa esattamente $t(q+1)$ rette che sono fissate.

(3) Se $|Fix(G)| = q^2$, allora $Fix(G)$ è uno sottopiano affine di ordine q.

(4) Se G fissa t punti su qualche retta, allora $q \leq t \leq q^{s-1}$.

(5) Se $s = 2$ e G fissa almeno due punti affini, allora G fissa ogni punto di uno sottopiano di Baer.

Cenni della dimostrazione:

Dimostriamo la (1): supponiamo che G fissi P, Q con $P \neq Q$. Si consideri $\alpha_o Q$ in modo tale che P non sia un punto di $\alpha_o Q$. Allora, per $\beta \neq \alpha_o$, βP e $\alpha_o Q$ hanno un punto in comune. Quindi, G fissa almeno q punti su una qualche retta. Analogamente ogni retta fissata contiene almeno q punti fissati.
La (2) può essere ottenuta calcolando il numero di bandiere.
In Dembowski [**24**] (p. 138 duale di 3(c)), vengono fornite delle condizioni che implicano che una struttura finita di punti e rette deve essere un piano proiettivo. Se $t = q$, si puo usare Dembowski per costruire un sottopiano di Baer ed ottenere la (3).
Dimostriamo la (4): ogni punto di una retta di $Fix(G)$ che non giace in $Fix(G)$ non puó giacere su alcuna altra retta di $Fix(G)$. Allora, ci sono $t(q+1)(q^s - t)$ punti che non sono in $Fix(G)$ ma che sono su rette di $Fix(G)$. Ogni punto, naturalmente, è su una retta fissata e quindi ci sono esattamente $t(q+1)(q^s - t) + t^2$ punti su rette di $Fis(G)$. Questo numero di punti deve essere minore o uguale a q^{2s} che é il numero totale dei punti. Quindi $t(q+1)(q^s - t) + t^2 \leq q^{2s}$. Cioé $t^2 - t(q^s + q^{s-1}) + q^{2s-1} \geq 0$ e quindi $(t - q^s)(t - q^{s-1}) \geq 0$. Chiaramente, $t - q^s < 0$ perché G è non-banale. Pertanto $t \leq q^{s-1}$. Questo dimostra la (4).
Da (4) segue quindi la (5). Infatti, se $s = 2$ allora $q \leq t \leq q^{2s-1}$ e quindi $t = q$.

Un risultato simile al (10.4) può essere ottenuto anche per reti arbitrarie di grado $q+1$ e ordine q^s che ammettono un opportuno gruppo di collineazioni, come ad esempio $SL(s, q)$. In questo caso per $s = 2$ é utile il seguente risultato:

Teorema 10.2. (Galois).

Sia $m \neq 1$ il grado della rapresentazione non-banale di $PSL(2, q)$ come gruppo transitivo di permutazioni. Allora, $m \geq q + 1$ tranne nei seguenti casi:

(1) $q = 2$ e $m = 2$

(2) $q = 3$ e $m = 3$

(3) $q = 5$ e $m = 5$

(4) $q = 7$ e $m = 7$

(5) $q = 9$ e $m = 6$

(6) $q = 11$ e $m = 11$.

Usando (10.2), è facile provare:

Proposizione 10.3. *Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2 che ammette $G \cong SL(2, q)$ come un gruppo di collineazione. Allora si ha uno dei seguenti casi: G agisce transitivamente su R_∞ (i punti all'infinito), G fissa ogni punto di R_∞, oppure G induce su R_∞ un gruppo isomorfo a $PSL(2, q)$ e si verifica uno dei casi eccezionali (1)–(6).*

In $PSL(4, q)_N$, ci sono due gruppi G_1 e G_2 isomorfi a $SL(2, q)$ tali che G_1G_2 è un prodotto centrale dove $G_1 \cap G_2 = Z$ é il centro di G_1 e di G_2. Quindi, $|Z| = 1$ o 2 a seconda che q sia pari o dispari, rispettivamente.

Usando (10.1) e (10.3), possiamo provare:

Teorema 10.4. (Johnson [**78**]).

(1) Sia R una rete di grado $q + 1$ e ordine q^2 che ammetta un gruppo di collineazioni H isomorfo a $SL(2, q)$ che fissa ogni punto di R_∞ e un punto affine. Allora, ci sono $q + 1$ sottopiani di Baer contenenti P, che coprono le rette che sono incidenti con P e fissati dai p-sottogruppi di Sylow di H, dove $p^r = q$. Inoltre, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(2) R è derivabile.

(3) Per ogni punto Q di R, la rete R ammette un gruppo di collineazione isomorfo a $SL(2,q)$ che fissa ogni punto di R_∞ e Q.

(4) R ammette un gruppo di collineazione G che agisce transitivamente sui punti affini e il cui stabilizzatore G_T contiene un sottogruppo che è isomorfo a $SL(2,q)$ che fissa ogni punto di R_∞.

Cenni della dimostrazione:

Sia S un p-sottogruppo di Sylow. Poiché S fissa P, allora S permuta i q^4-1 punti rimanenti. Quindi, S deve fissare un'altro punto affine T. Per (10.1), S deve fissare ogni punto di un sottopiano di Baer. Se due sottopiani di Baer che corrispondono a due p- sottogruppi di Sylow hanno almeno due punti in comune, allora H fissa ogni punto di un sottopiano di Baer di un'altra applicazione di (10.1). Inoltre, H deve agire semi-regolarmente sui $q(q-1)$ punti di una retta che non sono in $Fix(H)$. Ma allora l'ordine di H è $q(q^2-1)$ e questo non è possible. Questo prova la (1).
Le affermazioni rimanenti possono essere provate usando le stesse tecniche.

Teorema 10.5. (Johnson [**78**]).

Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2 che ammette un prodotto centrale G_1G_2 come gruppo di collineazioni con G_1 e G_2 isomorfi a $SL(2,q)$. Allora:

(1) G_1G_2 fissa un punto affine P.

(2) G_1 opera transitivamente su R e G_2 fissa ogni punto di R, o viceversa.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(3) R è derivabile.

(4) R ammette almeno q^4 gruppi di collineazioni prodotti centrali di due copie di $SL(2,q)$.

(5) R ammette un gruppo di collineazioni che agisce transitivamente sui punti affini ed ammette un gruppo di collineazioni ognuno dei quali é prodotto centrale di due copie di $SL(2,q)$.

Per applicare (10.5), si deve provare che il gruppo $PSL(4,q)_N$ contiene un sottogruppo T di ordine q^4 che agisce transitivamente sui punti affini. Diamo un breve cenno di questa dimostrazione: usando (10.5), si ha che G_1 agisce transitivamente su R_∞. Il gruppo T è normale e ogni p-sottogruppo di G fissa qualche punto di R_∞. Allora T fissa ogni punto di R_∞. Assumiamo che T non agisca transitivamente sui punti affini. Allora esiste un elemento non-banale g in T che fissa un punto affine. Per questioni di ordine, g deve fissare un ulteriore punto affine. Quindi, per (10.1), g deve fissare ogni punto di un sottopiano di Baer. Poiché T è abeliano elementare, T deve fissare Fix(g). Allora Fix(g) contiene q^2 punti. Quindi esiste un sottogruppo T* di T di ordine almeno q^2 che fissa un punto di Fix(g). Poiché l'ordine di T^* é p^s, allora T^* fissa almeno due punti affini. Quindi T^* fissa ogni punto di un sottopiano di Baer. Pertanto $p^s > q^2$ deve dividere $q(q-1)$. Assurdo.

Allora, abbiamo:

Teorema 10.6. (Johnson [**78**]).

Sia R una rete di grado $q+1$ e ordine q^2. Allora, R è una rete derivabile se e solo se R ammette un gruppo di collineazioni che è isomorfo a $PSL(4,q)_N$.