APPENDICE B

Stime di Schauder e disuguaglianza di Harnack

Consideriamo l'operatore

$$Lu(t,x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x) D_{x_i x_j} u + \sum_{i=1}^{N} b_i(t,x) D_{x_i} u + c(t,x)u, \tag{B.5}$$

e supponiamo che i coefficienti a_{ij}, b_i, c siano funzioni a valori reali definite in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Assumiamo che

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(t,x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \tag{B.6}$$

per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$ e per qualche costante $\lambda > 0$.

B.1. Stime di Schauder interne

Assumiamo, oltre a (B.5), (B.6), che $a_{ij}, b_i, c \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$, per qualche $\alpha \in (0,1)$, dove $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ se e solo se ϕ è limitata e soddisfa

$$[\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} := \sup_{\substack{(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \\ (t_1,x_1) \neq (t_2,x_2)}} \frac{|\phi(t_1,x_1) - \phi(t_2,x_2)|}{(|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2})^\alpha} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo $\|\phi\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} = \|\phi\|_\infty + [\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha}$. Sia $M > 0$ tale che

$$\|a_{ij}\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \|b_i\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \|c\|_{\frac{\alpha}{2},\alpha} \leq M,$$

per ogni $i, j = 1, \dots, N$.
Diremo che $\phi \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$ se e solo se ϕ ammette derivate parziali rispetto a t fino al primo ordine e rispetto a x fino al secondo ordine, tutte limitate e inoltre

$$[\phi]_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} := [\phi_t]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} + \sum_{i,j=1}^{N} [D_{x_i x_j}\phi]_{\frac{\alpha}{2},\alpha} < +\infty.$$

In tal caso, poniamo

$$\|\phi\|_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha} = \|\phi\|_\infty + \|\phi_t\|_\infty + \|\nabla_x\phi\|_\infty + \|D^2_x\phi\|_\infty + [\phi]_{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}.$$

L' interpretazione degli spazi di Hölder parabolici $\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q)$, $\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q)$, con $Q \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, e delle relative norme è quella usuale. Una volta stabilite le notazioni, possiamo enunciare le stime di Schauder interne (si vedano ad esempio [**15**, Capitolo 3, Sezione 2], [**20**, Teorema 8.11.1]).

Teorema B.1. *Siano $Q_1 \subset Q_2$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$. Allora esiste una costante $C > 0$ che dipende solo da $N, \alpha, \lambda, M, Q_1, Q_2$ tale che per ogni $u \in \mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_2)$ risulta*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_1)} \le C(\|u_t - Lu\|_{\mathcal{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_2)} + \|u\|_{L^\infty(Q_2)}) \qquad \text{(B.1)}$$

B.2. Disuguaglianza di Harnack parabolica

In questa sezione assumiamo che i coefficienti dell'operatore L siano funzioni misurabili tali che

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \lambda|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \lambda^{-1}|\xi|^2,$$

e

$$|b(t,x)| \le \lambda^{-1}, \quad 0 \le c(t,x) \le \lambda^{-1},$$

dove $b(t,x) = \big(b_1(t,x)\ldots,b_N(t,x)\big)$ e $\lambda \in]0,1]$. Se $\theta, R > 0$, poniamo

$$Q(\theta,R) = (0,\theta R^2)\times\left\{x\in\mathbb{R}^N\,:\,|x|<R\right\}.$$

Indichiamo infine con $W^{1,2}_{N+1}(Q(\theta,R))$ lo spazio delle funzioni $u = u(t,x)$ che appartengono a $L^{N+1}(Q(\theta,R))$ insieme alle derivate deboli Du, D^2u, u_t. La seguente versione della disuguaglianza di Harnack si trova in [**21**, Teorema 1.1].

Teorema B.2. *Siano $\theta > 1, R \le 2$, $u \in W^{1,2}_{N+1}(Q(\theta,R))$, $u \ge 0$ e $u_t = Lu$ q.o. in $Q(\theta,R)$. Allora esiste una costante $C > 0$, dipendente solo da θ, λ e N tale che*

$$u(R^2,0) \le C\,u(\theta R^2,x), \quad |x| \le \frac{1}{2}R.$$

Inoltre, la costante C resta limitata dal basso e dall'alto se $(1-\theta)^{-1}$ e λ^{-1} variano entro intervalli limitati.