Capitolo 4

Teoremi di estensione per funzionali lineari, lineari limitati e conseguenze

I teoremi di estensione per funzionali lineari presentati in questo capitolo, nonostante le dimostrazioni siano non costruttive, sono importanti per la varietà delle molteplici applicazioni (cfr., ad esempio, una delle più importanti applicazioni: il Teorema 4.2.1 di separazione di insiemi convessi).

4.1 Teoremi di Hahn-Banach (forma analitica)

Allo scopo di dimostrare i fondamentali Teoremi di Banach, richiamiamo, per convenienza del lettore, il Lemma di Zorn.

Definizione 4.1.1. Un insieme $\mathcal{F}$ si dice *parzialmente ordinato* se, per qualche $x, y \in \mathcal{F}$, è definita una relazione binaria $x \preceq y$ ("x precede y") che soddisfi, per ogni $x, y, z \in \mathcal{F}$, le seguenti proprietà:

1. $x \preceq x$;
2. $x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$;
3. $x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

Sia $\mathcal{F}$ un insieme parzialmente ordinato; un suo sottoinsieme $\mathcal{F}_0$ si dice *totalmente ordinato* se per ogni x, $y \in \mathcal{F}_0$ si ha

$$x \preceq y \ \text{ o } \ y \preceq x.$$

Un elemento $c \in \mathcal{F}$ si dice un *maggiorante* per $\mathcal{F}_0$ se

$$x \preceq c \ \ \forall x \in \mathcal{F}_0.$$

Infine, si dice che $m \in \mathcal{F}$ è un *elemento massimale* per $\mathcal{F}$ se

$$\forall x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } m \preceq x \Rightarrow m = x$$

(cioè, $m \in \mathcal{F}$ è elemento massimale per $\mathcal{F}$ se *non esiste* alcun elemento $x \in \mathcal{F}$ tale che $m \preceq x$, tranne che per $x = m$).

Lemma 4.1.2 (di Zorn). *Se, in un insieme parzialmente ordinato $\mathcal{F}$, ogni sottoinsieme totalmente ordinato $\mathcal{F}_0$ ha un maggiorante (in $\mathcal{F}$), allora esiste (in $\mathcal{F}$) un elemento massimale.*

Teorema 4.1.3 (di Hahn-Banach. Estensione per funzionali lineari reali). *Sia X uno spazio vettoriale* ***reale****, $p : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

1. *$p(tx) = tp(x)$, $\forall x \in X$ e $\forall t \geq 0$ (p è positivamente 1-omogenea)*
2. *$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$ (p è sublineare).*

Sia V un sottospazio vettoriale di X e $f : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che

$$f(x) \leq p(x) \quad \text{per ogni } x \in V. \tag{4.1}$$

Allora esiste un funzionale lineare $F : X \to \mathbb{R}$ che estende f, cioè tale che

$$F(x) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in V$$

e

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x) \quad \text{per ogni } x \in X. \tag{4.2}$$

Dimostrazione.

1. Se $V = X$, osservato che $f(x) = -f(-x) \geq -p(-x)$, la conclusione è ovvia.

Se $V \subsetneq X$, sia $x_0 \in X \setminus V$ e consideriamo il seguente sottospazio di X

$$V_0 = \operatorname{span}\{V, x_0\} = \{x + tx_0 : x \in V, t \in \mathbb{R}\}. \tag{4.3}$$

Osserviamo che $V \subsetneq V_0$ ($x_0 \in V_0 \setminus V$), e per ogni $x, y \in V$ si ha per (4.1)

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_0) + p(x_0 + y). \tag{4.4}$$

Perciò

$$f(x) - p(x - x_0) \leq p(x_0 + y) - f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in V. \tag{4.5}$$

Sia $\beta := \sup_{x \in V} \{f(x) - p(x - x_0)\}$, allora

$$f(x) - p(x - x_0) \leq \beta \leq p(x_0 + y) - f(y) \quad \text{per ogni } x, y \in V. \tag{4.6}$$

2. Ora, estendiamo f ad un funzionale definito sul sottospazio V_0 in questo modo:
$$f(x + tx_0) := f(x) + \beta t, \quad x \in V, t \in \mathbb{R}.$$
Proviamo che anche l'estensione soddisfa
$$f(x + tx_0) \leq p(x + tx_0) \text{ per ogni } x \in V, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$
Se $t = 0$, allora (4.7) è l'ipotesi iniziale (4.1). Se $t > 0$, sostituendo sia x che y in (4.6) con $\frac{x}{t}$ e moltiplicando per t, si ha
$$t\left[f\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(\frac{x}{t} - x_0\right)\right] \leq \beta t \leq t\left[p\left(x_0 + \frac{x}{t}\right) - f\left(\frac{x}{t}\right)\right],$$
cioè
$$f(x) - p(x - tx_0) \leq \beta t \leq p(x + tx_0) - f(x). \tag{4.8}$$
Allora, per $x \in V$ e $t \geq 0$ si ha
$$f(x - tx_0) = f(x) - \beta t \leq p(x - tx_0)$$
e
$$f(x + tx_0) = f(x) + \beta t \leq p(x + tx_0),$$
dove le due disuguaglianze seguono, rispettivamente, dalle limitazioni a sinistra e a destra in (4.8), provando così la (4.7).

3. I precedenti due passi mostrano che ogni funzionale lineare f definito su un sottospazio proprio $V \subsetneq X$ si può estendere ad un sottospazio più grande, dove la disuguaglianza (4.1) risulta ancora soddisfatta.

Per completare la dimostrazione, useremo il Lemma di Zorn.

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le coppie (W, ϕ), dove W è un sottospazio vettoriale di X tale che $V \subseteq W$ e $\phi : W \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare che estende f e tale che $\phi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in W$.

Chiaramente $\mathcal{F} \neq \emptyset$ perché $f \in \mathcal{F}$.

Definiamo ora su $\mathcal{F}$ una relazione d'ordine parziale, ponendo
$$(W, \phi) \preceq \left(\tilde{W}, \tilde{\phi}\right) \Leftrightarrow W \subseteq \tilde{W} \text{ e } \tilde{\phi}_{|W} = \phi.$$

Ora, per ogni sottofamiglia $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ totalmente ordinata, esiste (in $\mathcal{F}$) un maggiorante (basta prendere il funzionale F^* definito sul sottospazio vettoriale di X generato da $\bigcup_{F_0 \in \mathcal{F}_0} D(F_0)$ tale che $F^*(x) = F_0(x)$ se $x \in D(F_0)$).

Allora, dal Lemma di Zorn, segue l'esistenza di un elemento massimale per $\mathcal{F}$, sia esso (W^{max}, F).

Proviamo che $W^{max} = X$. Se per assurdo $W^{max} \subsetneq X$, dai passi 1 e 2 il funzionale lineare F si potrebbe estendere ad un sottospazio più ampio, contraddicendo così l'assunzione di massimalità.

Quindi $W^{max} = X$ e $F : X \to \mathbb{R}$ è un funzionale lineare tale che

$$F(x) \leq p(x) \quad \text{per ogni } x \in X.$$

Per la linearità di F, si ha infine

$$-p(-x) \leq -F(-x) = F(x).$$

$\square$

Il precedente Teorema ha una naturale applicazione nel caso in cui $p(\cdot)$ è una norma.

Teorema 4.1.4 (di estensione per funzionali lineari e limitati su $\mathbb{K}$). *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio normato sul campo $\mathbb{K}$. Sia $V \subseteq X$ un sottospazio di X e $f : V \to \mathbb{K}$ un funzionale lineare e limitato (i.e. $f \in V_{\mathbb{K}}^*$), allora f si può estendere ad un funzionale lineare e limitato $F : X \to \mathbb{K}$ (i.e. $F \in X_{\mathbb{K}}^*$)*[1] *avente la stessa norma, cioè*

$$\|F\|_{X_{\mathbb{K}}^*} := \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in X} |F(x)| = \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in V} |f(x)| := \|f\|_{V_{\mathbb{K}}^*}. \tag{4.9}$$

Dimostrazione.

1. Assumiamo dapprima che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definiamo $p(x) := \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$ per ogni $x \in X$; allora la tesi segue dal Teorema precedente, infatti

$$-\|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X \leq F(x) \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$$

e quindi

$$|F(x)| \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*} \cdot \|x\|_X$$

per ogni $x \in X$, da cui

$$\|F\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \sup_{\|x\|_X \leq 1, x \in X} |F(x)| \leq \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*}$$

e quindi

$$\|F\|_{X_{\mathbb{R}}^*} = \|f\|_{V_{\mathbb{R}}^*}.$$

[1] Denotiamo con $X_{\mathbb{K}}^*$, $V_{\mathbb{K}}^*$ gli spazi duali di X e V riguardati come spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.

2. Consideriamo ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il funzionale $F : X \to \mathbb{C}$ sarà ottenuto costruendo separatamente la sua parte reale e la sua parte immaginaria.

Dato $x \in V$, sia $u(x) = \Re f(x)$. Allora u è un funzionale reale, lineare su V con norma

$$\|u\|_{V^*_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}},$$

pertanto, in virtù del passo 1, u ha un'estensione $U : X \to \mathbb{R}$ con norma

$$\|U\|_{X^*_{\mathbb{R}}} \leq \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}}.$$

Proviamo che il funzionale

$$\boxed{F(x) = U(x) - iU(ix) \quad (x \in X)}$$

verifica la tesi.

Infatti, per $x \in V$, osservato che da

$$f(ix) = if(x) = i\Re f(x) - \Im f(x)$$

segue

$$\Re f(ix) = -\Im f(x),$$

si ha

$$F(x) = \Re f(x) - i\Re f(ix) = \Re f(x) + i\Im f(x) = f(x).$$

Inoltre, sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $|\alpha| = 1$ e $\alpha F(x) = |F(x)|$; allora

$$|F(x)| = \alpha F(x) = U(\alpha x) \leq \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}} \cdot \|\alpha x\|_X = \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}} \cdot \|x\|_X$$

per ogni $x \in X$, da cui

$$\|F\|_{X^*_{\mathbb{C}}} \leq \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}},$$

e quindi

$$\|F\|_{X^*_{\mathbb{C}}} = \|f\|_{V^*_{\mathbb{C}}}.$$

□

Osservazione 4.1.5 (*Estensione di operatori lineari e continui*)**.** Siano X e Y due spazi di Banach e sia $V \subset X$ un sottospazio chiuso. Sia $S : V \to Y$ un operatore lineare e continuo. Ci chiediamo se sia possibile estendere S con un operatore lineare e continuo $T : X \to Y$. Osserviamo che i Teoremi 4.1.3 e successivo risolvono positivamente la questione solo se $Y = \mathbb{K}$. La risposta è in generale negativa, eccetto che in alcuni casi speciali, per esempio se $\dim Y < \infty$. In tal caso, si può scegliere una base di Y e applicare il Teorema di Hahn-Banach a ciascuna componente. Ci si può chiedere anche se esista un'estensione T di S con la stessa norma, cioè $\|T\|_{B(X;Y)} = \|S\|_{B(V;Y)}$. La risposta è affermativa solo in alcuni casi eccezionali. Per entrambe le questioni si veda il Commento 4 al Capitolo 1 in [5].

4.1.1 Alcune importanti conseguenze del Teorema di Hahn-Banach

Corollario 4.1.6. *Sia* $(X, \|\cdot\|_X)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$*. Dato* $x \in X \setminus \{0\}$*, esiste* $F_x \in X^*$ *con* $\|F_x\|_{X^*} = 1$ *tale che* $F_x(x) = \|x\|_X$*.*

Dimostrazione. Sia $V = \{\lambda x, \lambda \in \mathbb{K}\} \subset X$. Definiamo

$$\begin{aligned} f &: V \to \mathbb{K}, \\ \lambda x &\mapsto f(\lambda x) := \lambda \|x\|_X \end{aligned}$$

ed estendiamo f su X. Sia $F_x \in X^*$ il prolungamento di f. Risulta

$$\|f\|_{V^*} = 1 = \|F_x\|_{X^*}$$

e, poiché $x \in V$,

$$F_x(x) = f(x) = 1 \cdot \|x\|_X = \|x\|_X.$$

□

Il precedente Corollario prova l'esistenza di un gran numero di funzionali lineari e continui.

Corollario 4.1.7. *Se* $x_1, x_2 \in X$ *e* $x_1 \neq x_2$*, allora esiste* $F \in X^*$ *soddisfacente* $F(x_1) \neq F(x_2)$ *(cioè,* X^* *separa i punti di* X*).*

Dimostrazione. Segue dal corollario precedente applicato al vettore non nullo

$$x = x_1 - x_2 \in X.$$

□

Corollario 4.1.8. *Se* $x_0 \in X$ *è tale che* $F(x_0) = 0$ *per ogni* $F \in X^*$*, allora* $x_0 = 0$*.*

Dimostrazione. Se fosse $x_0 \neq 0$ e quindi $\|x_0\|_X > 0$, per il Corollario 4.1.6 esisterebbe $F_{x_0} \in X^*$ tale che

$$F_{x_0}(x_0) = \|x_0\|_X > 0,$$

contro l'ipotesi. □

Corollario 4.1.9. *Se* M *è un sottospazio chiuso proprio di* X *e* $x \notin M$*, allora esiste* $F_x \in X^*$ *tale che* $F_x(x) \neq 0$*, ma* $F_{|M} = O$*.*

Dimostrazione. Sia $x \notin M$ e $V := \{\lambda x + y; y \in M, \lambda \in \mathbb{K}\} \subset X$.
Definiamo il funzionale lineare $f : V \to \mathbb{K}$, $\lambda x + y \mapsto f(\lambda x + y) = \lambda$.
Poiché $\ker f = M$ e M è chiuso, f è continuo su V. Estendiamo allora f su tutto X, sia $F_x \in X^*$.
Risulta $F_x(x) \neq 0$ e $F_{|M} = O$. □

Corollario 4.1.10. *Per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ si ha*

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*}=1}} |\varphi(x)| = \max_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*}=1}} |\varphi(x)|$$

Dimostrazione. Risulta

$$\sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*}=1}} |\varphi(x)| \leq \|x\|_X .$$

Per il Corollario 4.1.6 esiste $F_x \in X^*$ t.c. $\|F_x\|_{X^*} = 1$ e $F_x(x) = \|x\|_X$.
Pertanto

$$\sup_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*}=1}} |\varphi(x)| = \max_{\substack{\varphi \in X^* \\ \|\varphi\|_{X^*}=1}} |\varphi(x)| = F_x(x) = \|x\|_X.$$

□

4.2 Le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: separazione di insiemi convessi

Il successivo Teorema (la cui dimostrazione, omessa per brevità, si basa sul teorema di estensione di Hahn-Banach) esprime una risposta positiva al problema seguente: assegnati due insiemi convessi e disgiunti A e B in uno spazio normato X, esiste un funzionale lineare e continuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$ tale che le immagini $\varphi(A)$ e $\varphi(B)$ siano disgiunte?

Teorema 4.2.1 (Separazione di insiemi convessi). *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$, e siano A e B sottoinsiemi non vuoti di X, convessi e disgiunti.*

(i) Se A è aperto, allora esiste un funzionale lineare e continuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(a) < c \leq \varphi(b) \quad per \quad ogni \quad a \in A, b \in B;$$

(ii) Se A è chiuso e B è compatto, allora esistono un funzionale lineare e continuo $\varphi : X \to \mathbb{R}$ e c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi(a) \leq c_1 < c_2 \leq \varphi(b) \quad per \quad ogni \quad a \in A, b \in B$$

Osservazione 4.2.2. Il precedente risultato di separazione di insiemi convessi continua a valere anche se X è uno spazio normato su $\mathbb{C}$; per le opportune modifiche si consulti il Paragrafo 11.4 in [5].

Corollario 4.2.3. *Sia V un sottospazio di X tale che $\overline{V} \neq X$. Allora esiste $\varphi \in X^*$, φ non identicamente nullo, tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in V$.*

Il precedente risultato, evidentemente legato al Corollario 4.1.9, porta alla successiva osservazione.

Osservazione 4.2.4. Il Corollario 4.2.3 è utile per provare che un sottospazio è denso. È sufficiente provare che *ogni funzionale lineare e continuo su X che si annulla su V deve annullarsi ovunque su X.*

4.3 Riflessività. Compattezza debole in uno spazio riflessivo. Separabilità

Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach. Il suo duale $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ ha a sua volta uno spazio duale (lo spazio dei funzionali lineari e continui su X^*) detto *biduale* di X e indicato con X^{**}, munito della norma

$$\|\xi\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\xi(\varphi)| \quad (\xi \in X^{**}).$$

Esiste una isometria lineare τ tra X e X^{**}, definita da

$$\begin{aligned} \tau : X \to \tau(X) \subseteq X^{**} \\ X \ni x \mapsto \tau(x) := \Phi_x \in X^{**} \end{aligned} \tag{4.10}$$

che agisce nel seguente modo

$$\Phi_x(\varphi) := \varphi(x)$$

per ogni $\varphi \in X^*$.

Risulta:

- Φ_x è (ovviamente) un funzionale lineare,
- Φ_x è limitato, in quanto da

  $$|\Phi_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x\|_X \quad \forall\, \varphi \in X^*,$$

  segue che

  $$\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\Phi_x(\varphi)| = \sup_{\|\varphi\|_{X^*} \leq 1} |\varphi(x)| \leq \|x\|_X.$$

D'altra parte, per il Corollario 4.1.6, fissato $x \in X$, esiste un elemento $\varphi_x \in X^*$ di norma unitaria tale che

$$\varphi_x(x) = \|x\|_X.$$

Quindi

$$\|\Phi_x\|_{X^{**}} = \|x\|_X \quad \forall\, x \in X.$$

Dunque, l'applicazione τ è una isometria lineare da X in $\tau(X) \subset X^{**}$. In particolare, $\tau(X)$ è un sottospazio chiuso di X^{**}, essendo isometrico (tramite τ) allo spazio di Banach (quindi chiuso) X. Ricordiamo che una isometria lineare è necessariamente iniettiva, ma non necessariamente suriettiva. Nel caso in cui valga la proprietà di suriettività, si dice che τ è un *isomorfismo isometrico* tra X e X^{**}.

Definizione 4.3.1 (spazio riflessivo). Uno spazio di Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ si dice *riflessivo* se la mappa canonica $\tau : X \to X^{**}$ è anche suriettiva (cioè $\tau(X) = X^{**}$).

Osservazione 4.3.2. È essenziale usare la mappa canonica $\tau : X \to X^{**}$ nella precedente definizione. R.C. James ha costruito un notevole esempio di spazio non riflessivo con la proprietà che esiste una isometria suriettiva da X su X^{**}.

Nel caso X sia riflessivo, esso può essere identificato con il suo biduale X^{**}.
Evidentemente, *ogni spazio normato riflessivo è completo* (in quanto duale di X^*).

Osserviamo che *la convergenza debole in uno spazio riflessivo X coincide con la convergenza debole* in X^{**}*, nel senso che,

$$x_n \rightharpoonup x \text{ in } X \;\Rightarrow\; \tau(x_n) \overset{*}{\rightharpoonup} \tau(x) \text{ in } X^{**}$$

e

$$\Phi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \Phi \text{ in } X^{**} \;\Rightarrow \tau^{-1}(\Phi_n) \rightharpoonup \tau^{-1}(\Phi) \text{ in } X.$$

È molto utile la seguente Proposizione.

Proposizione 4.3.3.

$$\textit{(X spazio riflessivo e M sottospazio chiuso di X)} \Rightarrow \textit{(M riflessivo)}.$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $\tau : M \to M^{**}$ è suriettiva, cioè : *per ogni* $\phi_0 \in M^{**}$ *esiste* $z \in M$ *tale che* $\tau(z) = \phi_0$, *che agisce nel seguente modo,* $\phi_0(\varphi_0) = \varphi_0(z)$ *per ogni* $\varphi_0 \in M^*$.
Ogni funzionale lineare e continuo φ su X, $\varphi \in X^*$, quando è ristretto a M, diviene un funzionale lineare e continuo su M; sia $\varphi_0 = \varphi_{|M} \in M^*$.
Poiché, per il teorema di Hahn-Banach, ogni funzionale lineare e continuo su M può essere esteso a X, l'applicazione *restrizione* $\varphi \to \varphi_0, \quad X^* \to M^*$ è *suriettiva.*
L'applicazione restrizione induce la seguente applicazione da $M^{**} \to X^{**}$: per ogni $\phi_0 \in M^{**}$ definiamo $\phi \in X^{**}$, ponendo, per ogni $\varphi \in X^*$

$$\phi(\varphi) = \phi_0(\varphi_0), \tag{4.11}$$

dove φ_0 è la restrizione di φ a M.
Poiché X è riflessivo, ϕ può essere identificato con un elemento $z \in X$:

$$\phi(\varphi) = \varphi(z);$$

allora, per (4.11) risulta

$$\varphi(z) = \phi_0(\varphi_0). \tag{4.12}$$

Proviamo che $z \in M$. Per provarlo, osserviamo che se φ si annulla su M, allora $\varphi_0 = 0$, e per (4.12), $\varphi(z) = 0$. Per il Corollario 4.2.3 e successiva Osservazione, concludiamo che $z \in \overline{M}$. Ma, poiché M è chiuso $z \in M$. Pertanto possiamo riscrivere (4.12) :

$$\varphi_0(z) = \phi_0(\varphi_0). \tag{4.13}$$

Poiché φ_0 rappresenta un arbitrario funzionale in M^*, (4.13) prova che ogni $\phi_0 \in M^{**}$ può essere identificato con qualche $z \in M$. $\square$

Esempi di spazi riflessivi sono tutti gli spazi X a dimensione finita (poiché, $dimX = dimX^* = dimX^{**}$) e gli spazi H di Hilbert (poiché, per il teorema di Riesz-Fréchet, $H = H^* = H^{**}$). Vedremo in seguito che gli spazi ℓ^p sono riflessivi per $1 < p < \infty$, **mentre non sono riflessivi** gli spazi ℓ^1, ℓ^∞, c_0 e c.
Lo spazio $C^0(K; \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$, dove K è uno spazio metrico non finito e compatto, non è riflessivo.

Dimostrazione. Sia $(a_k)_k$ una successione di elementi di K tale che $a_k \to a$ e $a_k \neq a$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Consideriamo il funzionale lineare e continuo

$$\varphi : C^0(K; \mathbb{R}, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \varphi(u) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} u(a_k).$$

Supponiamo, per assurdo, che $C^0(K;\mathbb{R},\|.\|_\infty)$ sia riflessivo. Allora il suo sottospazio chiuso

$$C_a^0 = \{u \in C^0(K;\mathbb{R},\|\cdot\|_\infty) : u(a) = 0\}$$

è anche riflessivo (Proposizione 4.3.3)). Osserviamo che

$$\|\varphi\|_{(C_a^0)^*} = \sup_{u\in \overline{B}_{C_a^0}} \varphi(u) = 1.$$

Infatti, $\sup_{u\in \overline{B}_{C_a^0}} \varphi(u) \leq 1$ in maniera immediata; d'altra parte, per il Lemma di Urysohn, per ogni $j \in \mathbb{N}$, esiste $u_j \in C_a^0$ tale che $0 \leq u_j \leq 1$ su K e $u_j(a_i) = 1$ per ogni $i = 1, 2, \cdots, j$). Allora

$$\varphi(u_j) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} u_j(a_k) \geq \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k},$$

da cui, passando all'estremo superiore,

$$\sup_{u\in \overline{B}_{C_a^0}} \varphi(u) \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \varphi(u_j) \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Pertanto $\|\varphi\|_{(C_a^0)^*} = 1$. Inoltre, in virtù della successiva Proposizione 4.3.9 (applicata a $\varphi \in (C_a^0)^*$), tale norma viene realizzata. Quindi esiste una funzione $u_\varphi \in \overline{B}_{C_a^0}$ tale che $\varphi(u_\varphi) = 1$. Di conseguenza, $u_\varphi(a_k) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ (affinché la somma della serie che definisce $\varphi(u_\varphi)$ sia uguale a 1) e $u_\varphi(a) = 0$; ciò è assurdo poiché u_φ è continua ma

$$\lim_{k\to+\infty} u_\varphi(a_k) = 1 \neq u_\varphi(a) = 0.$$

□

Una proprietà fondamentale degli spazi riflessivi è espressa dal seguente risultato.

Proposizione 4.3.4. *Sia X uno spazio di Banach.*

$$(X \ \textit{riflessivo}) \Leftrightarrow (X^* \ \textit{riflessivo}).$$

Dimostrazione. Osserviamo che la riflessività è una proprietà topologica e che una isometria lineare e suriettiva tra spazi di Banach preserva la riflessività. Dunque, se X è riflessivo lo stesso vale per X^{**}. Pertanto, è da dimostrare solo la seguente implicazione:

$$(X^* \text{ riflessivo}) \Rightarrow (X \text{ riflessivo}).$$

Sia X^* riflessivo. Se X non lo è, $\tau(X)$ è un sottospazio chiuso proprio di X^{**}.
Per il Corollario 4.1.9, esiste $\phi \in X^{***}$, $\quad \phi \neq O$ e $\phi(\varphi_x) = 0$ per ogni $\varphi_x \in \tau(X)$.
Per la riflessività di X^*, esiste $\psi \in X^*$ tale che $\phi = \phi_\psi$.
Pertanto, $0 = \phi_\psi(\varphi_x) = \varphi_x(\psi) = \psi(x) \quad$ per ogni $x \in X$. $\quad$ Quindi $\psi = O$, e, di conseguenza, $\phi = O$. Contraddizione. $\square$

Per quanto riguarda la separabilità, valgono i seguenti risultati.

Proposizione 4.3.5. *Sia X uno spazio di Banach. Allora*

$$(X^* \textit{ separabile}) \Rightarrow (X \textit{ separabile}).$$

Osservazione 4.3.6. Dalla Proposizione 4.3.5 si evince che la separabilità è una proprietà che gli spazi normati "ereditano" dai propri spazi duali.

Il viceversa della Proposizione 4.3.5 non è vero. Infatti, vedremo in seguito che $X = \ell^1$ è separabile, ma il suo duale $X^* = \ell^\infty$ non è separabile.

Tuttavia, vale il seguente risultato.

Proposizione 4.3.7.

$$(X \textit{ separabile e riflessivo}) \Rightarrow (X^* \textit{ separabile}).$$

Per la dimostrazione delle due precedenti Proposizioni 4.3.5 e 4.3.7, osserviamo preliminarmente che ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 4.3.4, dobbiamo solo dimostrare l'implicazione

$$(X^* \text{ separabile}) \Rightarrow (X \text{ separabile}).$$

Dimostrazione. Sia $(\varphi_n)_n$ una successione densa in X^*. Poiché

$$\|\varphi_n\|_{X^*} = \sup_{x \in X, \|x\|_X = 1} |\varphi_n(x)|,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in X$ con $\|x_n\|_X = 1$, tale che

$$|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\varphi_n\|_{X^*}. \tag{4.14}$$

Sia

$$M_0 := \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k, m \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{Q} \right\}$$

l'*insieme numerabile* formato dalle combinazioni lineari finite a *coefficienti razionali* degli x_n e sia

$$M := \operatorname{span} \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k, m \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

lo *spazio vettoriale* delle combinazioni lineari finite a *coefficienti reali* degli x_n. Per provare la separabilità di X, mostriamo che M_0 (numerabile) è denso in X.

Evidentemente, si ha $M \subset \overline{M_0}$. Per conseguire la tesi, dunque, basterà provare che $\overline{M} = X$. A tal fine, utilizziamo il Corollario 4.2.3 e la successiva Osservazione 4.2.4.

Sia $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in M$; in particolare, $\varphi(x_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissato $\varepsilon > 0$, selezioniamo un elemento φ_{n_0} tale che $\|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{X^*} < \varepsilon$.
Allora, poiché $\varphi(x_{n_0}) = 0$, da (4.14) si ha

$$\frac{1}{2}\|\varphi_{n_0}\|_{X^*} \leq |\varphi_{n_0}(x_{n_0})| \leq |\varphi_{n_0}(x_{n_0}) - \varphi(x_{n_0})| \leq \|\varphi_{n_0} - \varphi\|_{X^*} \cdot \|x_{n_0}\|_X \leq \varepsilon.$$

Ne segue che

$$\|\varphi\|_{X^*} \leq \|\varphi - \varphi_{n_0}\|_{X^*} + \|\varphi_{n_0}\|_{X^*} \leq 3\varepsilon,$$

e dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ concludiamo che $\varphi = 0$ su X, da cui la tesi. $\square$

Dimostriamo, ora, un teorema di compattezza debole in uno spazio riflessivo (che contiene, in particolare, il Teorema 3.3.5, relativo agli spazi di Hilbert)

Teorema 4.3.8 (**compattezza debole in uno spazio riflessivo**).
Ogni successione limitata in uno spazio riflessivo X ammette una sottosuccessione debolmente convergente in X.[2]

Dimostrazione. Per semplicità, assumiamo X separabile (ma il teorema vale anche se X non è separabile). Allora, essendo X separabile e riflessivo,

[2] L'implicazione inversa (**Teorema di Eberlein-Šmulian**, cfr. Teorema 3.19 in [5]) è anch'essa vera. Di fatto si ha la seguente caratterizzazione degli spazi riflessivi.
Uno spazio di Banach X è riflessivo se e solo se ogni successione limitata in X ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

risulta che anche X^* è separabile. Sia allora $(x_n)_n$ una successione limitata in X. Usando la mappa canonica τ, $(x_n)_n$ può essere riguardata come una successione limitata nello spazio biduale X^{**}. Pertanto, per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki 3.2.1 relativo a X^*, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k \subset X^{**}$ convergente debolmente* in X^{**}, cioè $(x_{n_k})_k \subset X$ converge debolmente in X. □

Proposizione 4.3.9. *Sia $(X, \|\cdot\|_X)$ uno spazio di Banach riflessivo. Assegnato $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$, esiste $x_\varphi \in X$ tale che*

$$\|x_\varphi\|_X = 1 \quad e \quad \|\varphi\|_{X^*} = \varphi(x_\varphi)$$

(cioè, $x_\varphi \in X$ realizza la norma di φ).

Dimostrazione. Per il Corollario 4.1.6 applicato allo spazio X^* e per l'ipotesi di riflessività su X, dato $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$ esiste $x_\varphi \in X^{**} = X$ tale che

$$\|x_\varphi\|_X = 1 \quad \text{e} \quad \|\varphi\|_{X^*} = \varphi(x_\varphi).$$

□

Osservazione 4.3.10. Viceversa, vale il seguente risultato (Teorema di **James**, cfr. Osservazione 3 nel Capitolo 1 in [5]):
Uno spazio di Banach in cui la norma di ogni elemento del duale è realizzata è riflessivo.

Studiamo, ora, dualità, separabilità e riflessività per gli spazi di successioni introdotti nelle sezioni 1.4.2, 1.4.3 e 1.4.4.

4.3.1 Dualità, separabilità e riflessività per spazi di successioni

Premessa. Posto

$$D := \{x = (x_k)_k ; x_k \in \mathbb{Q} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ x_k = 0 \text{ per } k \text{ sufficientemente grande}\},$$

risulta:

(i) D è numerabile;

(ii) D è denso in ℓ^p per $1 \le p < +\infty$;

(iii) D è denso in c_0;

(iv) L'insieme $D + \lambda(1,1,1,\ldots)$, con $\lambda \in \mathbb{Q}$, è numerabile e denso in c.

Dimostrazione. La numerabilità degli insiemi D e $D+\lambda(1,1,1,\ldots)$, con $\lambda \in \mathbb{Q}$, è ovvia.

(ii) Sia $u = (u_k)_k \in \ell^p$. Proviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $x = (x_1, \ldots, x_{\nu_\varepsilon - 1}, 0, 0, \ldots) \in D$ tali che

$$\|u - x\|_{\ell^p}^p < \varepsilon,$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k - x_k|^p < \varepsilon.$$

Poiché $\|u\|_{\ell^p} < +\infty$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{k=\nu_\varepsilon}^{+\infty} |u_k|^p < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per ogni $k = 1, \ldots, \nu_\varepsilon - 1$ esiste $x_k \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|u_k - x_k|^p < \frac{\varepsilon}{2(\nu_\varepsilon - 1)}.$$

Sia ora $x := (x_1, \ldots, x_{\nu_\varepsilon - 1}, 0, 0, \ldots) \in D$; risulta

$$\begin{aligned}
\|u - x\|_{\ell^p}^p &= \sum_{k=1}^{+\infty} |u_k - x_k|^p \\
&= \sum_{k=1}^{\nu_\varepsilon - 1} |u_k - x_k|^p + \sum_{k=\nu_\varepsilon}^{+\infty} |u_k|^p < (\nu_\varepsilon - 1)\frac{\varepsilon}{2(\nu_\varepsilon - 1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

da cui otteniamo la tesi.

(iii) Sia $u = (u_k)_k \in c_0$. Proviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $x = (x_1, \ldots, x_{\nu_\varepsilon - 1}, 0, 0, \ldots) \in D$ tali che

$$\|u - x\|_{\ell^\infty} < \varepsilon,$$

cioè

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - x_k| < \varepsilon.$$

Poiché $\lim_k u_k = 0$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|u_k| < \varepsilon$ per ogni $k \geq \nu_\varepsilon$.

Ora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per ogni $k = 1, \ldots, \nu_\varepsilon - 1$ esiste $x_k \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|u_k - x_k| < \varepsilon.$$

Sia ora $x := (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon - 1}, 0, 0, \dots) \in D$; risulta

$$\|u - x\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - x_k| = \max \left\{ \max_{k=1,\dots,\nu_\varepsilon - 1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k| \right\} < \varepsilon,$$

da cui otteniamo la tesi.

(iv) Sia $u = (u_k)_k \in c$ e sia $l := \lim_k u_k$, $l \in \mathbb{R}$. Proviamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \dots, x_{\nu_\varepsilon - 1}, 0, 0, \dots) \in D$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$ tali che $y := x + \lambda(1, \dots, 1, \dots) \in D + \lambda(1, \dots, 1, \dots)$ e

$$\|u - y\|_{\ell^\infty} < \varepsilon,$$

cioè

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - y_k| < \varepsilon.$$

Poiché $\lim_k u_k = l$, esiste $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $|u_k - l| < \varepsilon/2$ per ogni $k \geq \nu_\varepsilon$. Ora, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, per ogni $k = 1, \dots, \nu_\varepsilon - 1$ esiste $x_k \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|u_k - x_k| < \varepsilon$$

ed esiste $\lambda \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|l - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} \|u - y\|_{\ell^\infty} &= \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k - y_k| = \max \left\{ \max_{k=1,\dots,\nu_\varepsilon - 1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k - \lambda| \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{k=1,\dots,\nu_\varepsilon - 1} |u_k - x_k|, \sup_{k \geq \nu_\varepsilon} |u_k - l| + |l - \lambda| \right\} < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui otteniamo la tesi.

□

Proposizione 4.3.11 (duale di ℓ^p $(1 \leq p < +\infty)$)**.** *Sia $1 \leq p < +\infty$ e sia p' il suo esponente coniugato (cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, con $1' = +\infty$). Allora, per ogni $\varphi \in (\ell^p)^*$, esiste un'unica $u = (u_k)_k \in \ell^{p'}$ tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k \quad \forall\, x = (x_k)_k \in \ell^p.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{\ell^{p'}} = \|\varphi\|_{(\ell^p)^*}.$$

Dimostrazione. Sia

$$e^{(k)} = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{e_k^{(k)}}, 0, 0, \ldots) \in \ell^p$$

e poniamo

$$u_k := \varphi(e^{(k)}).$$

Proviamo che $u = (u_k)_k \in \ell^{p'}$ e

$$\|u\|_{\ell^{p'}} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*}. \tag{4.15}$$

Se $p = 1$, la disuguaglianza (4.15) è ovvia poiché

$$|u_k| \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)^*} \cdot \|e^{(k)}\|_{\ell^1} = \|\varphi\|_{(\ell^1)^*} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \leq \|\varphi\|_{(\ell^1)^*}.$$

Consideriamo pertanto il caso $1 < p < \infty$. Fissiamo $N \in \mathbb{N}$; allora, per ogni successione $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0 \ldots, 0, \ldots)$, si ha

$$\sum_{k=1}^{N} u_k x_k = \varphi\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e^{(k)}\right) \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*} \cdot \|x\|_{\ell^p}.$$

Scegliendo $x_k := |u_k|^{p'-2} u_k$ per ogni $k = 1, \ldots, N$, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{N} u_k |u_k|^{p'-2} u_k \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*} \left(\sum_{k=1}^{N} \left||u_k|^{p'-2} u_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*} \left[\sum_{k=1}^{N} \left(|u_k|^{p'-1}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}};$$

osservato che (poiché $p'p = p' + p$, quindi $p'p - p = p'$)

$$\sum_{k=1}^{N} \left(|u_k|^{p'-1}\right)^p = \sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'p-p} = \sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'},$$

ne segue che

$$\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*} \left(\sum_{k=1}^{N} |u_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p}}$$

e quindi

$$\left(\sum_{k=1}^{N}|u_k|^{p'}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{N}|u_k|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \|\varphi\|_{(\ell^p)^*}.$$

Per $N \to +\infty$ otteniamo che $u \in \ell^{p'}$ e (4.15) è dimostrata.
Inoltre, per ogni $x \in D$, si ha

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k$$

ed essendo D denso in ℓ^p (per ogni $1 \leq p < +\infty$) si ha $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k$ per ogni $x \in \ell^p$. Per la disuguaglianza di Hölder

$$|\varphi(x)| \leq \|u\|_{\ell^{p'}} \|x\|_{\ell^p}$$

per ogni $x \in \ell^p$ e perciò

$$\|\varphi\|_{(\ell^p)^*} \leq \|u\|_{\ell^{p'}}. \tag{4.16}$$

Da (4.15) e (4.16) segue

$$\|\varphi\|_{(\ell^p)^*} = \|u\|_{\ell^{p'}}.$$

L'unicità di $u \in \ell^{p'}$ è ovvia. □

Proposizione 4.3.12 (duale di c_0)**.** *Per ogni $\varphi \in (c_0)^*$, esiste un'unica $u = (u_k)_k \in \ell^1$ tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k \quad \forall\, x = (x_k)_k \in c_0.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{\ell^1} = \|\varphi\|_{(c_0)^*}.$$

Dimostrazione. La prova è un adattamento della dimostrazione della Proposizione 4.3.11 (con $p = \infty$ e $p' = 1$); l'ultima parte della dimostrazione vale perché D è denso in c_0. □

Proposizione 4.3.13 (duale di c)**.** *Per ogni $\varphi \in (c)^*$, esiste un'unica coppia $(u, \lambda) = ((u_k)_k, \lambda) \in \ell^1 \times \mathbb{R}$ tale che*

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda \lim_{k\to+\infty} x_k \quad \forall\, x = (x_k)_k \in c.$$

Inoltre,

$$\|u\|_{\ell^1} + |\lambda| = \|\varphi\|_{(c)^*}.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : c \to \mathbb{R}$ lineare e continuo e consideriamone la restrizione a c_0 (ricordiamo che $c_0 \subset c$); a $\varphi|_{c_0}$ applichiamo la Proposizione 4.3.12, per cui esiste $u \in \ell^1$ tale che

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k \quad \forall\, y = (y_k)_k \in c_0.$$

Osserviamo che ogni $x \in c$ può essere scritto come $x = y + a\,e$, dove

$$e := (1, 1, \ldots, 1, \ldots), \quad a := \lim_{k \to +\infty} x_k, \quad y \in c_0.$$

Allora

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(y + a\,e) &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k y_k + a\,\varphi(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k (x_k - a) + a\,\varphi(e) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda a,\end{aligned}$$

dove

$$\lambda = \varphi(e) - \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

Viceversa, dati $u \in \ell^1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, il funzionale definito da

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k x_k + \lambda \lim_{k \to +\infty} x_k \quad (x \in c) \tag{4.17}$$

è un elemento di $(c)^*$. Proviamo che

$$\|\varphi\|_{(c)^*} = \|u\|_{\ell^1} + |\lambda|. \tag{4.18}$$

È evidente che

$$\|\varphi\|_{(c)^*} \leq \|u\|_{\ell^1} + |\lambda|. \tag{4.19}$$

Sia ora $x = (x_k)_k \in c$ definito da

$$x_k := \begin{cases} \operatorname{sign}(u_k), & 1 \leq k \leq N, \\ \operatorname{sign}(\lambda), & k > N, \end{cases}$$

dove $N \in \mathbb{N}$ è fissato. Scegliendo siffatto x in (4.17) otteniamo, poiché $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} |u_k| + \operatorname{sign}(\lambda) \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k + |\lambda| = \varphi(x) \leq \|\varphi\|_{(c)^*}.$$

Per $N \to +\infty$ otteniamo

$$\|u\|_{\ell^1} + |\lambda| \leq \|\varphi\|_{(c)^*}. \tag{4.20}$$

Da (4.19) e (4.20) segue (4.18). □

Proposizione 4.3.14. *Gli spazi ℓ^p per $1 \leq p < \infty$, c_0 e c sono separabili.*

Dimostrazione. Segue dalla **Premessa**. □

Proposizione 4.3.15. *Lo spazio ℓ^∞ non è separabile.*

Dimostrazione. Sia $A \subset \ell^\infty$ numerabile e proviamo che esiste $b \in \ell^\infty$ tale che $b \notin \overline{A}$ (cioè A numerabile non può essere denso in ℓ^∞).

Sia $A = \{a^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $a^k \in \ell^\infty$, sicché

$$a^k = (a_1^k, a_2^k, \ldots).$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$b_k := \begin{cases} a_k^k + 1 & \text{se } |a_k^k| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |a_k^k| > 1. \end{cases}$$

Osserviamo che $b = (b_k)_k \in \ell^\infty$ e che

$$|b_k - a_k^k| \geq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Pertanto

$$\|b - a^k\|_{\ell^\infty} \geq |b_k - a_k^k| \geq 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

e quindi $b \notin \overline{A}$. □

Proposizione 4.3.16. *Lo spazio ℓ^p per $1 < p < \infty$ è riflessivo.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$(\ell^p)^* = \ell^{p'} \quad \Rightarrow \quad (\ell^p)^{**} = (\ell^{p'})^* = \ell^p.$$

□

Proposizione 4.3.17. *Gli spazi ℓ^1, ℓ^∞, c_0 e c non sono riflessivi.*

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che $(c_0)^* = \ell^1$ e $(\ell^1)^* = \ell^\infty$. Perciò, l'applicazione identità da c_0 in ℓ^∞ corrisponde all'immersione canonica $\tau : c_0 \to (c_0)^{**}$ definita in (4.10). Poiché τ non è suriettiva, concludiamo che c_0 non è riflessivo.

In alternativa, è istruttivo dimostrare la non riflessività di c_0 utilizzando la Proposizione 4.3.9 e l'Osservazione 4.3.10.

(1) Definito il funzionale lineare

$$\varphi : c_0 \to \mathbb{R}, \ x = (x_k)_k \in c_0 \mapsto \varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k,$$

si dimostra facilmente che φ è continuo e $\|\varphi\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$. Infatti risulta $\|\varphi\|_{(\ell^\infty)^*} \leq 1$ e per conseguire l'uguaglianza consideriamo la successione $(\xi_n)_n$ di elementi di c_0, definiti da

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k \leq n \\ 0 & \text{se} \quad k > n, \end{cases}$$

e risulta

$$\varphi(\xi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \text{quindi} \quad \lim_{n \to +\infty} \varphi(\xi_n) = 1.$$

(2) Tenendo presente la Proposizione 4.3.9 e l'Osservazione 4.3.10, per conseguire la **non riflessività** di c_0 dimostriamo che *non esiste* $x \in c_0$ tale che
(i) $\|x\|_{\ell^\infty} = 1$ e
(ii) $\varphi(x) = \|\varphi\|_{(\ell^\infty)^*}$ (cioè, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k = 1$),
Se, per assurdo, esistesse $x = (x_k)_k \in c_0$ per cui valgono (i) e (ii), allora, per (i), esisterebbero un insieme infinito, $J_1 \subset \mathbb{N}$, di indici k tali che $|x_k| < 1$ e un insieme non-vuoto e finito,$J_2 \subset N$, di indici k tali che $x_k = 1$, con $J_1 \cup J_2 = \mathbb{N}$ e (ovviamente) $J_1 \cap J_2 = \emptyset$.
Di conseguenza, per (ii) si avrebbe

$$\begin{aligned} 1 = |\varphi(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} x_k \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} |x_k| \\ &= \sum_{k \in J_1} \frac{1}{2^k} |x_k| + \sum_{k \in J_2} \frac{1}{2^k} < \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1, \end{aligned}$$

assurdo.

Poiché uno spazio è riflessivo se e solo se lo è il suo duale, deduciamo che ℓ^1 e ℓ^∞ non sono riflessivi.
Inoltre, poiché ogni sottospazio chiuso di uno spazio riflessivo è uno spazio riflessivo, c non può essere riflessivo, altrimenti c_0, che è un sottospazio chiuso di c, dovrebbe essere riflessivo. □

Resta da studiare il duale di ℓ^∞.

Proposizione 4.3.18 (duale di ℓ^∞)**.** *Il duale di ℓ^∞ è strettamente più ampio di ℓ^1.*

Dimostrazione. Per lo studio del duale di ℓ^∞, ricordiamo che ℓ^1 non è riflessivo (Proposizione 4.3.17). Di conseguenza, lo spazio duale $(\ell^\infty)^*$ contiene ℓ^1 (poiché $\ell^\infty = (\ell^1)^*$) e $(\ell^\infty)^*$ è strettamente più ampio di ℓ^1. In altre parole, si possono costruire funzionali lineari e continui, $\Phi \in (\ell^\infty)^*$, che **non possono** essere rappresentati come $\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k \quad$ per ogni $x \in \ell^\infty$ e qualche $y \in \ell^1$.[3]

Descriviamo un **Esempio** "concreto" di un tale funzionale. L'idea della verifica è la seguente.

(**1**) Consideriamo il funzionale lineare

$$\begin{aligned} &\varphi : c \to \mathbb{R}, \\ &x = (x_k)_k \mapsto \varphi(x) := \lim_{k\to+\infty} x_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tale φ è continuo dato che $|\varphi(x)| \le \|x\|_{\ell^\infty}$ (è immediato riconoscere che $\|\varphi\|_{(\ell^\infty)^*} = 1$). Per il Teorema di estensione di Hahn-Banach, esiste un prolungamento lineare e continuo di φ a ℓ^∞; sia, allora, questo prolungamento

$$\Phi : \ell^\infty \to \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \varphi(x) = \lim_{k\to+\infty} x_k \quad \forall x \in c. \tag{4.21}$$

(**2**) Verifichiamo che **non** esiste alcuna $y \in \ell^1$ tale che, per ogni $x \in \ell^\infty$,

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k. \tag{4.22}$$

Se una tale $y = (y_k)_k \in \ell^1$ esistesse, da (4.21) e (4.22) risulterebbe

$$\sum_{k=1}^{+\infty} y_k x_k = \lim_{k\to+\infty} x_k \quad \text{per ogni } x \in c.$$

Consideriamo la successione $(\xi_n)_n$ di elementi di ℓ^∞ definiti da

$$\xi_n^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad k < n \\ 1 & \text{se} \quad k \ge n. \end{cases}$$

[3] Può essere di un qualche interesse per l'argomento qui trattato, anche la Proposizione 3.2.1 in [7], relativa alla distribuzione δ di Dirac.

Risulta $\lim_{k\to+\infty} \xi_n^{(k)} = 1$, pertanto $\xi_n = (\xi_n^{(k)})_k \in c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$1 = \lim_{k\to+\infty} \xi_n^{(k)} = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k \xi_n^{(k)} = \sum_{k\geq n}^{+\infty} y_k,$$

che è assurdo (perché $\sum_{k\geq n}^{+\infty} y_k$ è il resto n-esimo della serie assolutamente convergente, relativo a $y = (y_k)_k \in \ell^1$, infinitesimo per $n \to +\infty$).

□

Osservazione 4.3.19. Una buona proprietà di ℓ^∞ è la seguente: *essendo ℓ^∞ uno spazio duale, risulta che $\overline{B}_{\ell^\infty}$ è compatta nella convergenza debole** (per il Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki 3.2.1).

I precedenti risultati sono riassunti nella seguente tabella.

SPAZIO	DUALE	SEPARABILE	RIFLESSIVO
ℓ^p $(1 < p < \infty)$	$\ell^{p'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$	SI	SI
ℓ^1	ℓ^∞	SI	NO
ℓ^∞	strett. più ampio di ℓ^1	NO	NO
c_0	ℓ^1	SI	NO
c	$\ell^1 \times \mathbb{R}$	SI	NO

4.4 Teorema di Baire-Hausdorff

Per dimostrare i Teoremi fondamentali riguardanti gli operatori lineari limitati, premettiamo il Teorema di Baire-Hausdorff.

Definizione 4.4.1 (insiemi di I categoria e di II categoria). Sia (E, d) uno spazio metrico. Un insieme $S \subseteq E$ si dice *insieme di I categoria* se è dato dall'unione di una successione di insiemi chiusi tutti privi di punti interni.

Un insieme $S \subseteq E$ che non sia *di I categoria* si dice *di II categoria.*

L'insieme $\mathbb{Q}$, ad esempio, è di I categoria in $\mathbb{R}$.
Sussiste il seguente Teorema.

Teorema 4.4.2 (di Baire-Hausdorff). *Sia (E, d) uno spazio metrico completo e sia $(E_n)_n$ una successione di sottoinsiemi chiusi tale che*

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Allora, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{E}_{n_0} \neq \emptyset$ (cioè, ***uno spazio metrico completo è un insieme di II categoria (in sé)****).*

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che nessuno dei chiusi E_n possegga punti interni; costruiamo un elemento $v \in E$ che non appartiene ad alcuno degli E_n, contraddicendo così l'ipotesi.

In particolare, avremo $E_1 \neq E$, dato che E ha punti interni.

Sia allora $v_1 \notin E_1$. Siccome E_1 è chiuso, v_1 è esterno ad E_1; pertanto esiste $r_1 > 0$ tale che

$$E_1 \cap B(v_1, 2r_1) = \emptyset.$$

Non è restrittivo supporre $r_1 < 1$ e che $E_1 \cap \overline{B(v_1, r_1)} = \emptyset$.

Siccome la palla $B(v_1, r_1)$ non è inclusa in E_2, altrimenti v_1 sarebbe interno ad E_2, esiste $v_2 \in B(v_1, r_1) \setminus E_2$.

Siccome E_2 è chiuso, v_2 è esterno ad E_2, per cui esiste $r_2 > 0$ tale che

$$E_2 \cap B(v_2, 2r_2) = \emptyset.$$

Possiamo supporre che $E_2 \cap \overline{B(v_2, r_2)} = \emptyset$ e, pur di rimpicciolire r_2, che $r_2 < \frac{1}{2}$ e $B(v_2, r_2) \subseteq B(v_1, r_1)$.

Confrontando ora $B(v_2, r_2)$ con E_3 e proseguendo in questo modo, costruiamo una successione di elementi $v_n \in E$ e una successione di numeri reali $r_n > 0$ verificanti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, le seguenti condizioni

- $E_n \cap \overline{B(v_n, r_n)} = \emptyset$;
- $B(v_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(v_n, r_n)$ (successione di palle aperte nidificate);
- $r_n < \frac{1}{n}$.

Dimostriamo che la successione $(v_n)_n$ dei centri delle palle è una successione di Cauchy.

Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia n_0 tale che $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Se $m > n \geq n_0$ si ha allora

$$v_m \in B(v_n, r_n)$$

da cui

$$d(v_m, v_n) < r_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon.$$

Quindi $(v_n)_n$ è una successione di Cauchy in E (completo per ipotesi), pertanto converge ad un elemento $v \in E$. Dimostriamo che v non appartiene ad alcuno degli E_n; infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$ ad arbitrio, si ha $v_m \in B(v_n, r_n)$ per ogni $m > n$, da cui $v \in \overline{B(v_n, r_n)}$ e quindi $v \notin E_n$. □

Osservazione 4.4.3. Il Teorema di Baire-Hausdorff si applica, ovviamente, agli spazi di Banach pensandoli come spazi metrici completi, usando la distanza associata alla norma.

4.5 Principio di limitatezza uniforme

Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi vettoriali normati; come nel Capitolo 1, denotiamo con $B(X;Y)$ lo spazio degli operatori $T : X \to Y$ lineari e limitati (continui), munito della norma

$$\|T\|_{B(X;Y)} := \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y .$$

Nel caso in cui $X = Y$, denoteremo $B(X;X)$ semplicemente con $B(X)$.

Il risultato che segue stabilisce la limitatezza uniforme di una famiglia di operatori lineari e limitati.

Teorema 4.5.1 (Principio di limitatezza uniforme, di Banach-Steinhaus). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach e sia $\mathcal{F}$ una famiglia (non necessariamente numerabile) di operatori lineari e limitati (cioè $\mathcal{F} \subset B(X;Y)$). Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista una costante $M_x \ge 0$ tale che*

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_Y \le M_x < +\infty. \tag{4.23}$$

Allora esiste una costante $M \ge 0$ tale che

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{B(X;Y)} \le M < +\infty, \tag{4.24}$$

cioè, tale che

$$\|Tx\|_Y \le M \|x\|_X, \ \forall x \in X, \ \forall T \in \mathcal{F}.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \ge 1$ consideriamo l'insieme chiuso

$$X_n = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} T^{-1}\left(\overline{B(0,n)}\right)$$

che possiamo anche riguardare come $X_n = \{x \in X : \ \forall\, T \in \mathcal{F}, \ \|Tx\|_Y \le n\}$.

Per (4.23), risulta

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n = X;$$

infatti, se $x \in X$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\|_Y \leq n$, e quindi $x \in X_n$.

Essendo X uno spazio di Banach, per il Teorema di Baire-Hausdorff, esiste $n_0 \geq 1$ tale che $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$.

Sia $x_0 \in X_{n_0}$ ed $r > 0$ tale che $\overline{B(x_0, r)} \subset X_{n_0}$. Se $\|z\|_X \leq 1$ segue che $x_0 + rz \in \overline{B(x_0, r)} \subset X_{n_0}$, pertanto

$$\|T(x_0 + rz)\|_Y \leq n_0, \quad \forall T \in \mathcal{F}, \quad \forall z \in \overline{B(0, 1)};$$

allora

$$\|T(rz)\|_Y = \|T(x_0 + rz) - Tx_0\|_Y \leq \|T(x_0 + rz)\|_Y + \|Tx_0\|_Y$$

da cui

$$r\|T\|_{B(X;Y)} = r \sup_{\|z\|_X \leq 1} \|Tz\|_Y \leq n_0 + \|Tx_0\|_Y \quad \forall T \in \mathcal{F},$$

e quindi la tesi. □

Osservazione 4.5.2. Il teorema precedente continua a valere anche se lo spazio Y non è completo. Al contrario, è essenziale che lo spazio X sia di Banach.

Osservazione 4.5.3. La conclusione del precedente Teorema 4.5.1 è notevole; difatti, da stime puntuali, si deduce una stima (globale) uniforme (questo giustifica il termine “Principio di limitatezza uniforme”).

Corollario 4.5.4 (continuità del limite puntuale).
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi di Banach, $(T_n)_n$ una successione in $B(X;Y)$. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista il limite puntuale

$$\lim_{n\to+\infty} T_n x = Tx.$$

Allora, l'operatore limite T è lineare e limitato (cioè $T \in B(X;Y)$).

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$, la successione $(T_n x)_n$ è limitata. Quindi per il Principio di limitatezza uniforme la successione $(T_n)_n$ è uniformemente limitata. Questo implica

$$\begin{aligned}\|T\|_{B(X,Y)} &= \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \left(\lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_Y \right) \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{B(X,Y)} < +\infty.\end{aligned}$$

Ciò mostra che l'operatore T (ovviamente lineare) è limitato. □

Osservazione 4.5.5. In generale il limite puntuale di funzioni continue non è necessariamente una funzione continua. L'ipotesi di linearità ha un ruolo essenziale nel corollario precedente.

Osservazione 4.5.6. Dimostriamo ora i punti (i), (ii), (iii) e (iv) della Proposizione 3.1.6 (per la dimostrazione dei punti (i*), (ii*), (iii*) e (iv*) della Proposizione 3.1.9 si procede in maniera analoga).

(i) Proviamo che se $x_n \rightharpoonup x$ e $x_n \rightharpoonup y$, allora $x = y$. Se fosse $x \neq y$, allora, per il Corollario 4.1.7, esisterebbe $F \in X^*$ tale che $F(x) \neq F(y)$; ciò porterebbe ad una contraddizione, in quanto per l'ipotesi risulta

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(y)$$

per ogni $\varphi \in X^*$.

(ii) L'asserto segue dalla maggiorazione

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X^*} \cdot \|x_n - x\|_X$$

valida per ogni $\varphi \in X^*$.

(iii) Sia $x_n \rightharpoonup x$; allora, per ogni $\varphi \in X^*$, la successione numerica $(\varphi(x_n))_n$ è limitata. Consideriamo la successione $(\Phi_n)_n \subset X^{**}$ di funzionali lineari e continui su X^* definiti da

$$\Phi_n(\varphi) := \varphi(x_n)$$

per ogni $\varphi \in X^*$. Ora, fissato $\varphi \in X^*$, esiste $M_\varphi \geq 0$ tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi_n(\varphi)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \leq M_\varphi.$$

Per il Principio di limitatezza uniforme 4.5.1, esiste $M \geq 0$ tale che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\Phi_n(\varphi)| \leq M\|\varphi\|_{X^*} \quad \forall\, \varphi \in X^*.$$

Ma, in virtù del Corollario 4.1.6, per ogni elemento della successione $x_n \in X$, esiste $\varphi_{x_n} \in X^*$ tale che

$$\|\varphi_{x_n}\|_{X^*} = 1, \quad \varphi_{x_n}(x_n) = \|x_n\|_X.$$

Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\|_X = |\varphi_{x_n}(x_n)| = |\Phi_n(\varphi_{x_n})| \leq M\|\varphi_{x_n}\|_{X^*} = M,$$

cioè $(\|x_n\|_X)_n$ è limitata.

Ancora per il Corollario 4.1.6, relativamente al punto $x \in X$, limite debole di $(x_n)_n$, esiste $\varphi_x \in X^*$ tale che

$$\|\varphi_x\|_{X^*} = 1, \quad \varphi_x(x) = \|x\|_X.$$

Allora, poiché $x_n \rightharpoonup x$, si ha

$$\begin{aligned} \|x\|_X = \varphi_x(x) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi_x(x_n) = \lim_{n\to+\infty} |\varphi_x(x_n)| \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \|\varphi_x\|_{X^*} \cdot \|x_n\|_X = \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|_X, \end{aligned}$$

completando la dimostrazione.

(iv) L'asserto segue dalla maggiorazione

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &\leq |(\varphi_n - \varphi)(x_n)| + |\varphi(x_n - x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|_{X^*} \cdot \|x_n\|_X + |\varphi(x_n) - \varphi(x)|, \end{aligned}$$

tenendo presente che $(\|x_n\|_X)_n$ è limitata in virtù di (iii).

4.6 Teorema dell'applicazione aperta e di limitatezza dell'operatore inverso

I successivi teoremi fondamentali sono dovuti a Banach.

Teorema 4.6.1 (dell'applicazione aperta). *Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi di Banach su $\mathbb{K}$. Sia $T : X \to Y$ un operatore lineare, limitato e* ***suriettivo****. Allora T è aperto (cioè, per ogni sottoinsieme aperto $A \subseteq X$, l'immagine $T(A)$ è un sottoinsieme aperto di Y.)*

Dimostrazione. Osserviamo che T è aperto se e solo se, per ogni $x \in X$ ed $r > 0$, l'immagine $T(B_X(x,r))$[4] contiene una palla aperta con centro in $T(x)$.

1. Per la linearità di T, l'immagine $T(B_X(x,r))$ è data da

$$T(B_X(x,r)) = T(x) + T(B_X(0,r)) = T(x) + rT(B_X(0,1)).$$

In definitiva, per provare il Teorema è allora sufficiente dimostrare che $T(B_X(0,1))$ contiene una palla aperta con centro nell'origine di Y.

[4] Nella dimostrazione di questo Teorema, per maggior chiarezza, indicheremo le palle in X e in Y con $B_X(\cdot,\cdot)$, $B_Y(\cdot,\cdot)$, rispettivamente.

2. Proviamo preliminarmente che esiste $r > 0$ tale che

$$B_Y(0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))} \tag{4.25}$$

(questa inclusione è "quasi" la tesi, poiché sarà necessario rimuovere la chiusura e lo faremo, a patto di dimezzare r, cfr. il successivo passo **3**).

Poiché

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_X(0, n)}$$

e T è suriettivo, allora

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{T(B_X(0, n))}.$$

Essendo Y uno spazio di Banach, per il Teorema di Baire-Hausdorff, almeno uno dei chiusi $\overline{T(B_X(0, n))} \subset Y$ ha interno non vuoto. Sia $\overset{\circ}{\overline{T(B_X(0, n_0))}} \neq \emptyset$. Allora, riscalando, anche

$$\overline{T(B_X(0, 1))} = \frac{1}{n_0}\overline{T(B_X(0, n_0))}$$

ha interno non vuoto. Quindi esiste $y_0 \in Y$ ed $r > 0$ tale che

$$B_Y(y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}. \tag{4.26}$$

Poiché $B_X(0, 1)$ è un insieme convesso e simmetrico, anche $T(B_X(0, 1))$ e la sua chiusura $\overline{T(B_X(0, 1))}$ sono convessi e simmetrici. In particolare, per la simmetria,

$$B_Y(-y_0, r) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}, \tag{4.27}$$

mentre la convessità implica che

$$\begin{aligned} B_Y(0, r) &= \frac{1}{2}B_Y(-y_0, r) + \frac{1}{2}B_Y(y_0, r) \\ &\subseteq \frac{1}{2}\overline{T(B_X(0, 1))} + \frac{1}{2}\overline{T(B_X(0, 1))} = \overline{T(B_X(0, 1))}, \end{aligned}$$

tenuto conto di (4.26) e (4.27). Risulta così provata la (4.25).

Usando la linearità di T, da (4.25), per riscalamento, otteniamo

$$B_Y\left(0, \frac{r}{2^n}\right) \subseteq \overline{T\left(B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3. Concludiamo la dimostrazione provando che
$$B_Y\left(0, \frac{r}{2}\right) \subseteq T\left(B_X\left(0,1\right)\right).$$
Infatti, consideriamo un punto $y \in B_Y\left(0, \frac{r}{2}\right)$ e proviamo che esiste un $x \in X$ tale che $\|x\|_X < 1$ e $Tx = y$.

Procediamo per induzione.

- Per densità, possiamo trovare $x_1 \in B_X\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tale che
$$\|y - Tx_1\|_Y < \frac{1}{2^2} r.$$
- Successivamente, per la stessa costruzione applicata a $y - Tx_1$, possiamo trovare $x_2 \in B_X\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$ tale che
$$\|(y - Tx_1) - Tx_2\|_Y < \frac{1}{2^3} r.$$
- Continuando per induzione, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo
$$y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j \in B_Y\left(0, \frac{1}{2^n} r\right).$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, possiamo selezionare un punto
$$x_n \in B_X\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$$
tale che
$$\left\|\left(y - \sum_{j=1}^{n-1} Tx_j\right) - Tx_n\right\|_Y < \frac{1}{2^{n+1}} r. \tag{4.28}$$
Poiché X è spazio di Banach e $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge (Teorema 1.2.3); sia allora $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x \in X$. Osserviamo che
$$\|x\|_X \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_X < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1;$$
dalla continuità di T si ha che
$$\|y - Tx\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \left\|y - \sum_{j=1}^{n} Tx_j\right\|_Y = 0$$
per (4.28) e quindi $Tx = y$.

In definitiva, l'immagine $T\left(B_X\left(0,1\right)\right)$ contiene tutti i punti $y \in Y$ con $\|y\|_Y < \frac{r}{2}$.

$\square$

Osservazione 4.6.2. Mentre nel Teorema di Banach-Steinhaus è sufficiente che solo lo spazio $(X, \|\cdot\|_X)$ sia di Banach, nel Teorema precedente è necessario che lo sia anche $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Teorema 4.6.3 (di limitatezza dell'operatore inverso). *Se $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sono spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e $T : X \to Y$ è un operatore lineare, continuo (cioè $T \in B(X;Y)$) e **bigettivo**, allora l'operatore inverso $T^{-1} : Y \to X$ esiste, è lineare e continuo (cioè $T^{-1} \in B(Y;X)$).*

Dimostrazione. Si deve provare solo la continuità di $T^{-1} : Y \to X$, in quanto la linearità è ovvia. Per far ciò, è sufficiente far vedere che controimmagini di aperti di X attraverso T^{-1} sono aperti in Y.

Sia, allora, $A \subset X$ un insieme aperto. Poiché T è bigettivo, si ha

$$\left(T^{-1}\right)^{-1}(A) = T(A)$$

che è un aperto in Y per il Teorema dell'applicazione aperta 4.6.1. $\square$

Corollario 4.6.4. *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ due diverse norme che rendono (**entrambe**) X uno spazio di Banach. Supponiamo che esista $c \geq 0$ per cui $\|x\|'' \leq c\|x\|'$, per ogni $x \in X$. Allora le due norme sono **equivalenti**.*

Dimostrazione. L'operatore identità

$$I : \left(X, \|\cdot\|'\right) \to \left(X, \|\cdot\|''\right)$$

è bigettivo, lineare e continuo (per l'ipotesi $\|x\|'' \leq c\|x\|'$ per ogni $x \in X$).

Per il Teorema precedente l'operatore inverso

$$I^{-1} : \left(X, \|\cdot\|''\right) \to \left(X, \|\cdot\|'\right)$$

è lineare e continuo, da cui si ha che esiste $c' \geq 0$ per cui $\|x\|' \leq c'\|x\|''$ per ogni $x \in X$.

Di conseguenza le due norme sono equivalenti. $\square$

4.7 Teorema del grafico chiuso

Ricordiamo che $D(T)$ indica il dominio dell'operatore T.

Teorema 4.7.1 (del grafico chiuso).
Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ *e* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *due spazi di Banach su* $\mathbb{K}$ *e sia*

$$T : \boldsymbol{D(T)}\boldsymbol{=}\boldsymbol{X} \to Y$$

un operatore lineare. Assumiamo che il grafico di T

$$G(T) := \{(x, y) \in X \times Y; \ \ y = Tx\}$$

sia chiuso in $X \times Y$*. Allora* T *è continuo.*

Dimostrazione. Consideriamo su X le due norme

$$\|x\|' := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \ \text{ e } \ \|x\|'' := \|x\|_X , \tag{4.29}$$

(la prima norma $\|\cdot\|'$ è detta *norma del grafico*).

Essendo per ipotesi $G(T)$ chiuso, X munito della norma del grafico è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$. D'altra parte, X munito della norma $\|x\|''$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ per ipotesi e, ovviamente, $\|x\|'' \leq \|x\|'$. Ne segue, per il corollario 4.6.4 che le due norme sono equivalenti e pertanto esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$\|x\|' \leq c \|x\|'' .$$

Concludiamo che per ogni $x \in X$ risulta

$$\|Tx\|_Y \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y \leq c \|x\|_X$$

e quindi T è limitato. □

Osservazione 4.7.2. Il viceversa del precedente Teorema 4.7.1 è ovviamente vero, poiché il grafico di una funzione continua (lineare o no) è chiuso.

Osservazione 4.7.3. Osserviamo che l'esempio 1.6.11 non contraddice il Teorema del grafico chiuso, perché $T = \frac{d}{dt}$ non è definito sull'intero spazio X, come invece è richiesto dal Teorema precedente. Tuttavia T, oltre che lineare e non continuo, ha il grafico chiuso. Infatti, sia $(f_n)_n \subset D(T)$ tale che, per qualche funzione $f, g \in X$ (X e $D(T)$ sono precisati nell'esempio 1.6.11), risulti

$$\|f_n - f\|_X \to 0 \quad \text{e} \quad \|f_n' - g\|_X \to 0.$$

Allora, $f \in D(T)$ e $f' = g$. Quindi la coppia $(f, g) = (f, Tf) \in G(T)$.