

Indice

1	Spazi di Banach	11
1.1	Alcuni richiami e definizioni	11
1.2	Serie in uno spazio normato e teorema di completezza	17
1.3	Spazio quoziente e completezza	19
1.4	Esempi di spazi di Banach	21
1.4.1	Lo spazio $(C^0([a, b]; \mathbb{R}), \ \cdot\ _\infty)$	22
1.4.2	Lo spazio $(\ell^\infty, \ \cdot\ _\infty)$	23
1.4.3	Lo spazio $(\ell^p, \ \cdot\ _{\ell^p})$ ($1 \leq p < \infty$)	24
1.4.4	Gli spazi $(c_0, \ \cdot\ _\infty)$ e $(c, \ \cdot\ _\infty)$	29
1.5	Teorema del completamento di uno spazio normato	30
1.6	Operatori lineari, limitati	33
1.7	Norme equivalenti. Spazi a dimensione finita	37
1.8	Insiemi compatti. Spazi localmente compatti.	40
2	Spazi di Hilbert	43
2.1	Spazi di Hilbert (Spazi con prodotto scalare)	43
2.2	Proiezione su un convesso chiuso	47
2.3	Duale di uno spazio di Hilbert. Teorema (di Riesz-Fréchet) di rappresentazione dei funzionali lineari e continui	51
2.4	Algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt	54
2.5	Somme di Hilbert. Basi hilbertiane ortonormali (sistemi ortonormali completi)	55
2.6	Basi ortonormali e Serie di Fourier complesse nello spazio di Hilbert $L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$,	61
2.7	Operatori strettamente positivi e Teorema di invertibilità	64
3	Spazio duale. Convergenze (sequenziali) debole e debole*	67
3.1	Convergenze (sequenziali) debole, debole* e proprietà	70
3.2	Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki	74
3.3	Convergenza debole e compattezza debole in uno spazio di Hilbert: estensione del Teorema di Bolzano-Weierstrass.	77

3.4	Compattezza in spazi di funzioni continue: il Teorema di Ascoli-Arzelà	78
4	Teoremi di estensione per funzionali lineari, lineari limitati e conseguenze	81
4.1	Teoremi di Hahn-Banach (forma analitica)	81
4.1.1	Alcune importanti conseguenze del Teorema di Hahn-Banach	86
4.2	Le forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: separazione di insiemi convessi	87
4.3	Riflessività. Compattezza debole in uno spazio riflessivo. Separabilità	88
4.3.1	Dualità, separabilità e riflessività per spazi di successioni	94
4.4	Teorema di Baire-Hausdorff	103
4.5	Principio di limitatezza uniforme	105
4.6	Teorema dell'applicazione aperta e di limitatezza dell'operatore inverso	108
4.7	Teorema del grafico chiuso	112
5	Teoria di Fredholm. Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt	113
5.1	Operatori aggiunti e proprietà. Operatori autoaggiunti (simmetrici) su spazi di Hilbert	113
5.2	Operatori compatti e proprietà	118
5.3	Operatori integrali compatti: di Fredholm, di Volterra, di Hilbert-Schmidt	125
5.4	Dai sistemi di equazioni algebriche lineari alla teoria di Fredholm	130
5.5	Teoria di Fredholm	131
5.6	Alternativa di Fredholm	137
5.7	Dal teorema spettrale dell'Algebra Lineare al teorema spettrale di Hilbert-Schmidt	137
5.7.1	Diagonalizzazione di una matrice simmetrica in dimensione finita	138
5.8	Risolvente e spettro di un operatore lineare limitato	139
5.9	Spettro di un operatore lineare compatto	144
5.10	Limitazioni per lo spettro di un operatore lineare autoaggiunto	147
5.11	Teorema spettrale di Hilbert-Schmidt per operatori compatti autoaggiunti su spazi di Hilbert reali e separabili	151
5.11.1	Diagonalizzazione in dimensione infinita	154
5.12	Esercizi proposti per i capitoli 1-5.	156

6	Principi del max-min.	
	Teoria di Sturm-Liouville.	189
6.1	Operatori positivi e Principi del max-min di Fischer-Courant. Metodo di Rayleigh-Ritz.	189
6.2	Problemi autoaggiunti agli autovalori in intervalli compatti . . .	194
6.2.1	Proprietà spettrali del sistema di Sturm-Liouville con condizioni omogenee di Dirichlet e caratterizzazione variazionale degli autovalori	208
6.3	Esempi di problemi agli autovalori	211
6.3.1	Approssimazioni	221
6.4	Analisi spettrale dell'operatore di Laplace con condizione omo- genea di Dirichlet	223
6.5	Caratterizzazione variazionale degli autovalori	229
6.6	Molteplicità e proprietà asintotiche degli autovalori dell'ope- ratore di Laplace-Dirichlet	231
6.7	Il riarrangiamento di Schwarz	236
6.8	Teorema di Faber-Krahn	237
6.9	Uno sguardo all'analisi spettrale dell'equazione biarmonica con condizioni omogenee di Dirichlet.	238
6.10	Conggettura di Rayleigh per la piastra fissa al bordo ("incastrata")	239
7	Teoria dei Semigruppı fortemente continui	241
7.1	Semigruppı e semigruppı di contrazione: proprietà differenzia- li. Generatori.	241
7.2	Proprietà dei generatori	245
7.3	Risolventi e proprietà	247
7.4	Teorema (di Hille-Yosida) di esistenza (ed unicit�) del semi- gruppo di contrazione generato da un operatore lineare	250
8	Applicazione a due prototipi dei problemi <i>evolutivi</i> relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.	257
8.1	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore	257
8.1.1	Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi	262
8.2	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde	263
8.2.1	Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omo- genea con gli estremi fissi	268
8.3	Esercizi proposti per i Capitoli 6-8	269

