

Prefazione

Queste note, preparate principalmente per gli Studenti di Matematica, di Fisica, di Ingegneria e di altre discipline scientifiche, riproducono (nei Capitoli da 1 a 5) una versione ampliata delle lezioni da me tenute nel Corso di Istituzioni di Analisi Superiore I, per la Laurea Magistrale in Matematica (Università del Salento).

L'intento principale è quello di esporre, per quanto possibile in modo chiaro, breve e autosufficiente, una introduzione al linguaggio e ai metodi dell'Analisi Funzionale Lineare, con particolare attenzione ai teoremi fondamentali della Geometria degli spazi di Banach, alla teoria degli operatori lineari limitati, autoaggiunti, compatti, alla Teoria di Fredholm e al Teorema Spettrale di Hilbert-Schmidt in spazi di Hilbert separabili per operatori lineari, compatti e autoaggiunti (generalizzazione in spazi a dimensione infinita del classico risultato di Algebra Lineare, il Teorema Spettrale, che afferma che ogni matrice reale, simmetrica è diagonalizzabile).

Relativamente alla teoria presentata nei primi cinque capitoli, sono proposti numerosi Esercizi (quasi tutti svolti).

Nel Capitolo 6 sono trattate alcune applicazioni del Teorema Spettrale di Hilbert-Schmidt: i Principi di Min-Max (di Courant) e Max-Min (di Fischer) per autovalori, la Teoria di Sturm-Liouville, illustrata con vari Esempi (svolti) di differenti problemi agli autovalori, e l'Analisi Spettrale dell'operatore di Laplace.

Il Capitolo 7 è dedicato alla teoria dei Semigrupperi fortemente continui e contrattivi di operatori lineari, e all'importante Teorema di Hille-Yosida.

Allo scopo di illustrare come i risultati astratti di Analisi Funzionale possono essere applicati per risolvere problemi relativi alle Equazioni alle Derivate Parziali, nel Capitolo 8 è presentato, utilizzando il Teorema di Hille-Yosida, il metodo funzionale analitico alternativo (ai metodi sviluppati, ad esempio, in [5], [12], [2], [7]) per lo studio di due problemi (evolutivi) di Cauchy-Dirichlet relativi all'equazione del calore e all'equazione delle onde.

Anche relativamente alla teoria presentata negli ultimi tre capitoli 6-8, sono proposti alcuni Esercizi (in parte svolti).

In questa esposizione, l'introduzione all'Analisi Funzionale Lineare con al-

cune applicazioni è sviluppata partendo da tecniche e noti risultati classici sia dell'Algebra Lineare che dell'Analisi Reale *in spazi a dimensione finita*, per motivare e coerentemente sviluppare le possibili "estensioni" *in spazi a dimensione infinita*.

Non vi è la pretesa di aver esposto gli argomenti in modo completamente originale, la trattazione essendo largamente ispirata ai testi indicati in Bibliografia.

Con questo *Quaderno* si vuole fornire a Dottorandi e Studenti una *trattazione-guida* su specifici argomenti di Analisi Funzionale di base, che possa essere utile e di orientamento per successivi approfondimenti su testi avanzati esistenti in letteratura.

È stato indispensabile il ruolo svolto dai Dottori (in Matematica) S. Cito e A. Carbotti, i quali, con competenza e impegno hanno con me realizzato questa veste tipografica, contribuendo anche criticamente alla esposizione degli argomenti qui trattati, sulla base dei miei appunti e di numerosi esercizi da loro proposti. A loro due esprimo la mia sincera gratitudine.

La redazione degli argomenti qui presentati è, pertanto, il risultato dell'impegno di Simone, di Alessandro e mio.

Ringrazio anticipatamente coloro i quali vorranno segnalare (possibili) errori tipografici o di contenuto.

Lecce, febbraio 2022

M. Carriero

Ringraziamento. Gli autori ringraziano Diego Pallara per gli utili commenti e per i significativi suggerimenti forniti, contribuendo a migliorare il testo preliminare.

Alla memoria di mia Madre e di mio Padre

M. Carriero