

Capitolo 8

Applicazione a due prototipi dei problemi *evolutivi* relativi all'Equazione del calore e all'Equazione delle onde.

8.1 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore

La teoria dei Semigruppı fornisce un metodo alternativo per costruire una soluzione del seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore**: determinare $u(x, t) : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_T \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times]0, T] \\ u = g & \text{in } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (8.1)$$

dove Ω è aperto, limitato, connesso e regolare di \mathbb{R}^N , $\Omega_T = \Omega \times]0, T]$, $T > 0$ fissato, $g \in L^2(\Omega)$ assegnato (dato iniziale o di Cauchy).

Posto $u(\cdot, t) := u(t)$ (sicché, per ogni $t \in [0, T]$, $u(t)$ è funzione della sola variabile x , cioè la funzione $x \mapsto u(x, t)$), riformuliamo (8.1) come problema di Cauchy (astratto) nello spazio di Hilbert $X = L^2(\Omega)$, cioè

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = g, \end{cases}$$

dove $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ è l'operatore non limitato definito da $\boxed{Au := \Delta u}$.

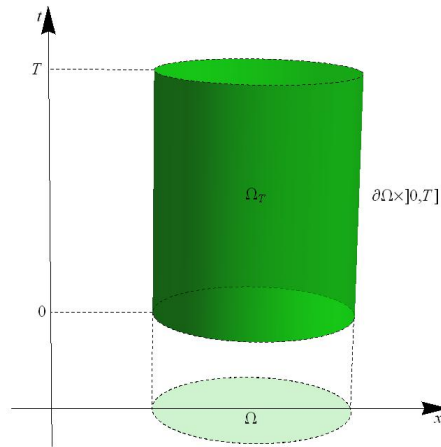


Figura 8.1: Cilindro parabolico

Notiamo che la condizione omogenea di Dirichlet è incorporata nella definizione di $D(A)$.

Teorema 8.1.1 (Semigruppato di soluzioni del problema parabolico lineare (8.1)).

Sia $Au := -\Delta u$ con $u \in D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. L'operatore A genera un Semigruppato di contrazione $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ su $L^2(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo la forma bilineare associata a $-\Delta$:

$$B[u, v] := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \text{per ogni } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Scelto $v = u$, risulta (per la disuguaglianza di Poincaré cfr. [2]) per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx, \quad \beta > 0.$$

Per dimostrare che A genera un semigruppato di contrazione su $L^2(\Omega)$, proviamo (in virtù del Teorema 7.4.1):

- (i) $D(A)$ è denso in $L^2(\Omega)$;
- (ii) A è operatore lineare, chiuso;
- (iii) ogni numero reale $\lambda > 0$ appartiene all'insieme risolvente di A , $\rho(A)$, e $\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda}$.

1. Il dominio $D(A)$ contiene $C_0^\infty(\Omega)$ e perciò esso è denso in $L^2(\Omega)$. Ciò prova (i).

2. Sia $(u_k) \subset D(A)$ con $u_k \rightarrow u$ e $Au_k \rightarrow v$ in $L^2(\Omega)$.

Per il teorema di regolarità (cfr., ad esempio, [6])

$$\|u_k - u_h\|_{H^2(\Omega)} \leq c(\|Au_k - Au_h\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u_h\|_{L^2(\Omega)})$$

per ogni $k, h \in \mathbb{N}$. Ne segue che $(u_k)_k$ è una successione di Cauchy in $H^2(\Omega)$ e quindi

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2(\Omega). \quad (8.2)$$

Allora $u \in D(A)$ e, per (8.2), $Au_k \rightarrow Au$ in $L^2(\Omega)$; di conseguenza $Au = v$. Ciò prova (ii).

3. Per provare (iii), consideriamo il problema con condizione omogenea di Dirichlet per l'equazione stazionaria

$$\begin{cases} -Au + \lambda u = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8.3)$$

Per ogni $\lambda \geq 0$ il problema (8.3) ha un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ per ogni $f \in L^2(\Omega)$ (cfr., ad esempio, [7] Teorema 9.3.4 e Osservazione 9.3.5). In effetti, per la regolarità ellittica, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Pertanto $u \in D(A)$ e l'operatore $\lambda I - A : D(A) \rightarrow L^2(\Omega)$ è iniettivo e suriettivo, purché $\lambda \geq 0$. Quindi $[0, +\infty[\subset \rho(A)$. Consideriamo la forma debole del problema di Dirichlet (8.3):

$$B[u, v] + \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega). \quad (8.4)$$

Tenendo presente che risulta $\beta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u]$, $\beta > 0$, posto $v = u$ in (8.4), per $\lambda > 0$ si ha

$$\lambda\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Quindi, poiché $u = R_\lambda f$, abbiamo la stima

$$\|R_\lambda f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{per ogni } f \in L^2(\Omega),$$

e quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0).$$

□

Osservazione 8.1.2. Dalla dimostrazione del teorema precedente, si evince che il principale interesse del Teorema 7.4.1 risiede nel fatto di poter ridurre lo studio di un problema *evolutivo* allo studio del problema per una equazione *stazionaria* (cfr. (8.3)).

Osservazione 8.1.3. (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.1) in termini di autofunzioni di $-\Delta$)

Essendo Ω limitato, il problema (8.1) può essere risolto da una decomposizione in una base di Hilbert di $L^2(\Omega)$. Sia (cfr. 6.4.5) (v_n) una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore $-\Delta$ con condizione omogenea di Dirichlet: $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.1) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile t , $a_n(t)$, devono soddisfare

$$a_n'(t) + \mu_n a_n(t) = 0, \quad \mu_n > 0$$

pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \exp(-\mu_n t).$$

Le costanti $a_n(0)$ sono determinate dalla relazione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x) = g(x).$$

In altre parole, la soluzione u di (8.1) è $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) \exp(-\mu_n t) v_n(x)$, dove le costanti $a_n(0)$ sono le componenti di g nella base (v_n) , cioè $a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}$. Quindi

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t) (g, \mathbf{v}_n)_{L^2(\Omega)} \mathbf{v}_n(\mathbf{x}). \quad (8.5)$$

La (8.5) definisce, per ogni $g \in L^2(\Omega)$ una applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)g$ da $[0, +\infty[$ in $L^2(\Omega)$. Questa applicazione è continua per $t \in [0, +\infty[$ e differenziabile per $t > 0$. Inoltre $u(t) \in D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$ per ogni $t > 0$ e

$$\frac{d}{dt} u(t) = Au(t) \quad \text{per ogni } t > 0. \quad (8.6)$$

Infatti, poiché $g \in L^2(\Omega)$ e $\mu_n > 0$, risulta

$$|\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} (g, v_n)_{L^2(\Omega)}^2 = \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

Pertanto la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)} v_n(x)$$

è convergente, uniformemente per $t \geq 0$.

In particolare, poiché le somme parziali sono funzioni continue nella variabile t , l'applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)g$ è anch'essa continua.

Essendo $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \frac{1}{te}$,¹ risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\mu_n \exp(-\mu_n t)(g, v_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \frac{1}{t^2 e^2} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Allora la serie che definisce $Au(t)$ è convergente. Questo implica $u(t) \in D(A)$, per ogni $t > 0$. Differenziando la serie (8.5) termine a termine e osservando che la serie delle derivate è anche convergente, si ottiene la (8.6).

Una volta che si è costruito il semigruppoo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ generato da A , rimane da vedere **in che senso una traiettoria del semigruppoo** $t \mapsto u(t) = S(t)g$ **fornisce una soluzione al problema** (8.1). La rappresentazione (8.5) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

Condizione iniziale. Poiché $u(0) = S(0)g = g \in L^2(\Omega)$, la condizione iniziale $u(x, 0) = g(x)$ ($x \in \Omega$) è soddisfatta come identità tra funzioni di $L^2(\Omega)$.

Condizione di Dirichlet. Poiché $D(A) \subseteq H_0^1(\Omega)$, allora $u(t)$ soddisfa la condizione omogenea di Dirichlet, per ogni $t \geq 0$.

¹Per $\xi \geq 0$ e t fissato, la funzione $\xi \mapsto \xi \exp(-\xi t)$ ha massimo in $\xi_0 = \frac{1}{t}$. Perciò $\mu_n \exp(-\mu_n t) \leq \max_{\xi \geq 0} \xi \exp(-\xi t) = \frac{1}{te}$.

Soluzioni deboli. Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione $u = u(x, t)$ fornisce una soluzione all'equazione del calore nel senso delle distribuzioni, cioè : per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times]0, +\infty[)$ risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_t + u\Delta\phi)dt = 0.$$

Osservazione 8.1.4. Per ulteriori questioni relative a Principio del massimo, unicità e regolarità della soluzione, si rinvia a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare il fatto che l'equazione del calore ha un *forte effetto regolarizzante*: la soluzione $u(x, t)$ è C^∞ in x per ogni $t > 0$, anche se il dato iniziale g è discontinuo. Questo effetto implica, in particolare, che l'equazione del calore è *irreversibile rispetto alla variabile tempo t* (cfr. [7]).

8.1.1 Esempio unidimensionale: conduzione termica in una barra con gli estremi fissi

Sia $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$ e assegnato $g \in L^2(]0, \pi[)$, consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.7)$$

Gli autovalori dell'operatore $-u_{xx}$ sono $\mu_n = n^2$ e le rispettive autofunzioni (normalizzate) sono $v_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$. Allora la formula (8.5) dà la soluzione del problema (8.7) come somma di una serie di Fourier di seni:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \exp(-n^2 t) \left(\int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \sin(nx).$$

8.2 Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

Sia Ω aperto, limitato, connesso e regolare di \mathbb{R}^N e consideriamo il seguente **problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde**: determinare $u(x, t) : \overline{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfacente

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0, T] \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega, \end{cases} \quad (8.8)$$

assegnati $g \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $h \in H_0^1(\Omega)$.

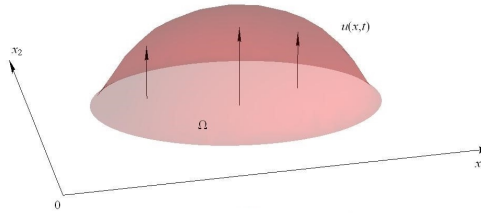


Figura 8.2: Membrana elastica che occupa l'aperto limitato Ω del piano, fissata lungo la frontiera $\partial\Omega$, soggetta a piccole vibrazioni verticali. La funzione $u(x, t)$ rappresenta la configurazione di u nel punto x della membrana al tempo t .

Osservazione 8.2.1. La condizione $u = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$ significa che la corda (o la membrana) è fissata su $\partial\Omega$; la configurazione iniziale è descritta da g e la velocità iniziale è descritta da h . La coppia (g, h) rappresenta il dato di Cauchy.

Riscriviamo (8.8) come sistema del primo ordine, ponendo $v := u_t$.

Allora (8.8) diviene

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = g(x) & \text{per } x \in \Omega, \\ v(x, 0) = h(x) & \text{per } x \in \Omega. \end{cases} \quad (8.9)$$

Applichiamo la teoria dei semigruppì nello spazio $X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$,² munito della norma³

$$\|(u, v)\|_X := (B[u, u] + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

dove $B[u_1, u_2] := \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx$, per ogni $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ e ricordiamo che risulta

$$\beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B[u, u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \quad (\text{energia potenziale elastica}) \quad (\beta > 0) \quad (8.10)$$

per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$.

Definiamo l'operatore non limitato

$$A : D(A) \subseteq H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\boxed{A(u, v) := (v, \Delta u)}$$

$$\text{per ogni } (u, v) \in D(A) := [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega). \quad (8.11)$$

Proviamo che A verifica le ipotesi del Teorema 7.4.1.

Teorema 8.2.2 (Semigruppò di soluzioni del problema iperbolico lineare (8.8)).

L'operatore A genera un Semigruppò di contrazione $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ su $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Dimostrazione.

(1) $D(A)$ è chiaramente denso in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

(2) Proviamo che A è chiuso. Sia $((u_k, v_k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq D(A)$, con

$$(u_k, v_k) \rightarrow (u, v), \quad A(u_k, v_k) \rightarrow (f_1, f_2)$$

in $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Poiché $A(u_k, v_k) = (v_k, \Delta u_k)$, concludiamo che

$$f_1 = v \quad \text{e} \quad \Delta u_k \rightarrow f_2 \quad \text{in} \quad L^2(\Omega).$$

²Notiamo che la condizione $u = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$ è incorporata nello spazio X . La condizione $u_t = v = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$ è una conseguenza di $u = 0$ su $\partial\Omega \times [0, T]$.

³La quantità $\|(u, v)\|_X^2$ rappresenta la *energia totale della membrana vibrante*. Il termine $B[u, u]$ rappresenta l'*energia potenziale elastica*, mentre $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2$ rappresenta l'*energia cinetica*.

Ne segue che

$$u_k \rightarrow u \quad \text{in } H^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \Delta u = f_2 \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Pertanto $(u, v) \in D(A)$, $A(u, v) = (v, \Delta u) = (f_1, f_2)$.

(3) Sia $\lambda > 0$, $(f_1, f_2) \in X := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, e consideriamo l'equazione

$$\lambda(u, v) - A(u, v) = (f_1, f_2),$$

equivalente alle *due equazioni scalari*

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 & (u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \\ \lambda v - \Delta u = f_2 & (v \in H_0^1(\Omega)). \end{cases} \quad (8.12)$$

Da (8.12) segue

$$\lambda^2 u - \Delta u = \lambda f_1 + f_2. \quad (8.13)$$

Poiché $\lambda^2 > 0$, la (8.10) e la teoria della regolarità implicano che esiste un'unica soluzione u di (8.13). Definito $v := \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega)$, abbiamo provato che (8.12) ha un'unica soluzione (u, v) . Ne segue che $\rho(A) \supseteq (0, +\infty)$.

Utilizzando la (8.12), scriviamo $(u, v) = R_\lambda(f_1, f_2)$. Ora dalla seconda equazione in (8.12), deduciamo $\lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, v] = (f_2, v)_{L^2(\Omega)}$. Sostituendo $v = \lambda u - f_1$, otteniamo (per la disuguaglianza generalizzata di Cauchy-Schwarz)

$$\begin{aligned} \lambda (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u]) &= (f_2, v)_{L^2(\Omega)} + B[u, f_1] \\ &\leq (\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[f_1, f_1])^{\frac{1}{2}} (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + B[u, u])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Allora, dalla definizione di norma in X ,

$$\|(u, v)\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|(f_1, f_2)\|_X,$$

quindi

$$\|R_\lambda\|_{B(X)} \leq \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

concludendo così la dimostrazione. \square

Osservazione 8.2.3 (Rappresentazione di soluzioni del problema (8.8) in termini di autofunzioni di $-\Delta$).

Essendo Ω limitato, il problema (8.8) può essere risolto da una decomposizione in una base ortonormale di Hilbert di $L^2(\Omega)$, come è stato fatto per l'equazione del calore. Sia (cfr. 6.4.5) (v_n) una base ortonormale di Hilbert di autofunzioni dell'operatore $-\Delta$ con condizione omogenea di Dirichlet: $v_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ e

$$\begin{cases} -\Delta v_n = \mu_n v_n & \text{in } \Omega \\ v_n = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ricerchiamo una soluzione di (8.8) sotto forma di serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) v_n(x).$$

Si vede facilmente che le funzioni della sola variabile t , $a_n(t)$, devono soddisfare

$$a_n''(t) + \mu_n a_n(t) = 0,$$

con $\mu_n > 0$,
pertanto

$$a_n(t) = a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t).$$

Quindi, la soluzione u di (8.8) è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n(0) \cos(\sqrt{\mu_n} t) + \frac{a_n'(0)}{\sqrt{\mu_n}} \sin(\sqrt{\mu_n} t) \right) v_n(x), \quad (8.14)$$

dove le costanti $a_n(0)$ e $a_n'(0)$ sono rispettivamente le componenti di g e di h nella base $(v_n)_n$, cioè $a_n(0) = (g, v_n)_{L^2(\Omega)}$ e $a_n'(0) = (h, v_n)_{L^2(\Omega)}$. In altre parole, $a_n(0)$ e $a_n'(0)$ sono determinate dalle relazioni $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(0) v_n(x)$ e $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(0) v_n(x)$

Poiché $(g, h) \in X$, la serie che esprime la soluzione $u(x, t)$ è convergente.

Avendo costruito, in modo univoco, il semigruppoo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, occorre esplicitare **in che senso le traiettorie** $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ **forniscono una soluzione del problema (8.8)**.

La (8.14) contiene la risposta a questa domanda. Qui, per brevità, diamo alcune indicazioni.

Le condizioni di Cauchy e di Dirichlet sono soddisfatte.

Sia $(g, h) \in X$. Poiché l'applicazione $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ è continua per $t \geq 0$, segue che

$$\|u(t) - g\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|v(t) - h\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Quindi le condizioni di Cauchy in (8.8) sono soddisfatte. Inoltre, la condizione di Dirichlet in (8.8) è soddisfatta perché $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ per ogni $t \geq 0$.

L'equazione delle onde è soddisfatta nel senso delle distribuzioni.

La traiettoria $t \mapsto u(t) = S(t)(g, h)$ è di classe C^1 e soddisfa

$$\frac{d}{dt}(u, u_t) = A(u, u_t) = (u_t, \Delta u) \quad \text{per ogni } t > 0$$

e

$$u(0) = g, u_t(0) = h.$$

Con un procedimento di approssimazione, si può dimostrare che la funzione $u = u(x, t)$ fornisce una soluzione all'equazione delle onde nel senso delle distribuzioni, cioè : per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega \times]0, +\infty[)$ risulta

$$\int_{\Omega} dx \int_0^{+\infty} (u\phi_{tt} + \nabla_x u \cdot \nabla_x \phi) dt = 0.$$

Osservazione 8.2.4. Per ulteriori questioni relative ad unicità, regolarità della soluzione, si rinvia, a [5] e anche al Quaderno [7]. Qui non è superfluo richiamare alcune peculiarità dell'equazione delle onde:

- (1) Diversamente dall'equazione del calore, l'equazione delle onde *non ha alcun effetto regolarizzante sui dati di Cauchy*; ad eccezione del caso unidimensionale $N = 1$, si ha che per la soluzione $u(x, t)$ si può verificare la **perdita di almeno un ordine di derivazione, rispetto alla regolarità dei dati**.
- (2) Quando la dimensione $N > 1$ è *dispari*, ad esempio $N = 3$, un segnale acustico o ottico concentrato in un punto x all'istante $t = 0$ è concentrato all'istante $t > 0$ sulla sfera di centro x e raggio t (**Principio di Huygens**). Se la dimensione N è *pari* (per esempio $N = 2$) il segnale persiste in x , smorzandosi nel tempo, ma non svanendo completamente.
- (3) **La soluzione decade per tempi lunghi:**

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{come} \quad \frac{1}{t} \quad \text{per} \quad t \rightarrow +\infty.$$

*“ Glory is like a circle in the water,
which never ceaseth to enlarge itself,
till by broad spreading, it disperses to naught.”*

William Shakespeare (Henry VI)

8.2.1 Esempio unidimensionale: movimenti di una corda omogenea con gli estremi fissi

Sia $\Omega =]0, \pi[\subset \mathbb{R}$, assegnati $g \in H_0^1(]0, \pi[)$ e $h \in L^2(]0, \pi[)$, consideriamo il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x), \quad 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (8.15)$$

La formula (8.14) dà la soluzione del problema (8.15) come somma di una serie di Fourier di seni:

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \left[\left(\int_0^\pi g(y) \sin(ny) dy \right) \cos(nt) \right. \\ & \left. + \left(\int_0^\pi h(y) \sin(ny) dy \right) \frac{\sin(nt)}{n} \right] \sin(nx). \end{aligned}$$

(cfr. anche [7] per una dimostrazione di questo esempio unidimensionale).

Osservazione 8.2.5. Anche più generali equazioni evolutive di tipo parabolico e di tipo iperbolico (con coefficienti regolari che non dipendono dalla variabile t) possono essere studiate applicando la teoria dei Semigruppì di operatori lineari, usando, ove necessario, il Teorema 7.4.5 invece del Teorema 7.4.1.

8.3 Esercizi proposti per i Capitoli 6-8

1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto, connesso, limitato e regolare. Scrivere la formulazione debole del problema di Neumann omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.16)$$

$h \in H^1(\Omega)$, dove ν è il versore normale uscente da $\partial\Omega$. Fornire, inoltre, la caratterizzazione variazionale degli autovalori.

Soluzione. Le proprietà dell'operatore $(-\Delta, H^1(\Omega))$ (autoaggiunto, positivo e con inverso destro compatto) con condizione al bordo di Neumann omogenea si provano in maniera analoga a quanto fatto nel caso dell'operatore di Laplace-Dirichlet.

Per la formulazione debole di (8.16), si moltiplicano ambo i membri dell'equazione $-\Delta h = \mu h$ per $v \in H^1(\Omega)$ e si integra per parti (applicando le identità di Green, cfr. [7]); tenendo presente che $\frac{\partial h}{\partial \nu} = 0$, si ottiene:

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Per quanto riguarda la formulazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_n$, si ottiene, in analogia al caso Laplace-Dirichlet,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

2. Ripetere l'esercizio precedente per il problema di Robin omogeneo

$$\begin{cases} -\Delta h = \mu h & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial \nu} + \beta h = 0 & \text{in } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.17)$$

$\beta > 0, h \in H^1(\Omega)$.

Soluzione. Si procede come nel precedente esercizio, osservando che $\frac{\partial h}{\partial \nu} = -\beta h$. Si ottiene che la formulazione debole di (8.17) è

$$\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h v \, d\mathcal{H}^{N-1} = \mu \int_{\Omega} h v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

dove \mathcal{H}^{N-1} è la misura di Hausdorff $(N-1)$ -dimensionale, cfr. [7]. La formulazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_n$ è data da:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \max_{\substack{\Sigma_{n-1} \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_{n-1} = n-1}} \min_{h \in \Sigma_{n-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\} \\ &= \min_{\substack{\Sigma_n \subset H^1(\Omega) \\ \dim \Sigma_n = n}} \max_{h \in \Sigma_n \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \beta \int_{\partial\Omega} h^2 \, d\mathcal{H}^{N-1}}{\int_{\Omega} h^2 \, dx} \right\}. \end{aligned}$$

□

3. Scrivere la caratterizzazione variazionale degli autovalori $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per i problemi **unidimensionali**

- Problema di Dirichlet omogeneo in $[0, 1]$;
- Problema di Neumann omogeneo in $[0, \pi]$;
- Problema con condizioni miste Dirichlet-Neumann in $[0, 1]$;
- Problema con condizioni periodiche in $[-\pi, \pi]$;

e mostrare che, utilizzando tale caratterizzazione, si ottengono gli autovalori calcolati nella sezione 6.3.

4. Data la matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$, determinare la matrice esponenziale e^{tA} .

Soluzione. Risulta

$$A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix};$$

A^2 è matrice diagonale, pertanto

$$A^{2j} = \begin{pmatrix} (-1)^j a^{2j} & 0 \\ 0 & (-1)^j a^{2j} \end{pmatrix},$$

e

$$A^{2j+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^j a^{2j+1} \\ (-1)^{j+1} a^{2j+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots & \frac{at}{1!} - \frac{(at)^3}{3!} + \frac{(at)^5}{5!} - \dots \\ \frac{-at}{1!} + \frac{(at)^3}{3!} - \frac{(at)^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^j (at)^{2j}}{(2j)!} \dots \end{pmatrix}.$$

In definitiva

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(at) & \sin(at) \\ -\sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

5. Ripetere l'esercizio precedente per la matrice $B := \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}$, con $a, b \neq 0$.

Soluzione. Risulta

$B = bI + A$, dove A è la matrice data nell'esercizio precedente.

Allora

$$e^{tB} = e^{bIt} \cdot e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{bt} \cos(at) & e^{bt} \sin(at) \\ -e^{bt} \sin(at) & e^{bt} \cos(at) \end{pmatrix}.$$

□

6. Determinare il generatore infinitesimale A_1 del semigrupp (verificare per esercizio)

$$(S_1(t))(u(x)) := u(e^t x),$$

$t > 0$, $u \in C_b^0(\mathbb{R})$ (spazio delle funzioni continue e limitate su \mathbb{R}).

Scrivere la soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = A_1 u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(S_1(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(e^t x) - u(x)}{t} \\ & \text{(per } t \rightarrow 0^+ : e^t = 1 + t + o(t)) \\ &= x \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x + tx) - u(x)}{tx} = x \frac{d}{dx} u(x) =: A_1 u \end{aligned}$$

La soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = x u_x & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

è (cfr. 7.1.6) $u(x, t) = x e^t$.

□

7. Determinare il generatore infinitesimale A_2 del semigrupp (verificare per esercizio)

$$(S_2(t))(u(x)) := e^{tx^2} u(x), u \in C_b^0(\mathbb{R}).$$

Scrivere la soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = A_2 u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x^3 & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(S_2(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tx^2}u(x) - u(x)}{t} \\ &= x^2 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{tx^2}u(x) - u(x)}{tx^2} = x^2u(x) =: A_2u \end{aligned}$$

La soluzione del problema parabolico

$$\begin{cases} u_t = x^2u & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = x^3 & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

è (cfr. 7.1.6) $u(x, t) = x^3e^{tx^2}$. □

8. Sia

$$(S_3(t))(u(x)) := (K_t * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K_t(x-y)u(y)dy, u \in C_b^0(\mathbb{R}^N),$$

(cfr., ad esempio, [7] per definizione e proprietà del prodotto di convoluzione $*$) dove

$$K_t(z) = K(z, t) = \frac{\exp(-\frac{|z|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}},$$

$z \in \mathbb{R}^N, t > 0$ e poniamo $(S_3(0))(u(x)) = u(x)$.

Provare che $\{S_3(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppο contrattivo in $C_b^0(\mathbb{R}^N)$

(**semigruppο del calore, o di Gauss-Weierstrass**, cfr., ad esempio, [7] Cap. 11),

$$\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} = 1 \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

e determinarne il generatore infinitesimale A_3 .

Soluzione. Proviamo che per ogni $t, s > 0$ risulta $(S_3(t+s))(u(x)) = (S_3(t)S_3(s))(u(x))$.

Risulta $(S_3(t+s))(u(x)) = (K_{t+s} * u)(x)$ e $(S_3(t)S_3(s))(u(x)) = (K_t * (K_s * u))(x) = ((K_t * K_s) * u)(x)$. Allora è sufficiente provare che:

$$K_{t+s}(z) = (K_t * K_s)(z),$$

per ogni $t, s > 0$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^N$.

Per provarlo, utilizziamo la trasformata (parziale) di Fourier \mathcal{F} rispetto alla variabile spaziale. ⁴

$\mathcal{F}((K_t * K_s))(\xi) = \mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(K_s)(\xi)$ ⁵ = $\exp(-t|\xi|^2) \cdot \exp(-s|\xi|^2) = \exp(-(t+s)|\xi|^2) = \mathcal{F}(K_{t+s})(\xi)$. Per l'iniettività della trasformata di Fourier, si ha

$(K_t * K_s)(z) = K_{t+s}(z)$, per ogni $t, s > 0$ e per ogni $z \in \mathbb{R}^N$.

Inoltre $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_3(t)u - u\|_\infty = 0$.

Proviamo che il semigruppoo S_3 è contrattivo.

$$|(S_3(t)u)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} |u(y)| dy \leq \|u\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x-y|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $t > 0$, da cui $\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} \leq 1$ per ogni $u \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$.

Preso $v \equiv 1 \in C_b^0(\mathbb{R}^N)$, risulta $(S_3(t))v(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, pertanto $\|S_3(t)\|_{B(C_b^0(\mathbb{R}^N))} = 1$ per ogni $t > 0$.

Per determinare il generatore infinitesimale A_3 , applichiamo la trasformata di Fourier \mathcal{F} a $\frac{(S_3(t))(u(x)) - u(x)}{t}$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{(S_3(t))(u(x)) - u(x)}{t}\right) &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) \cdot \mathcal{F}(u)(\xi) - \mathcal{F}(u)(\xi)}{t} \\ &= \frac{\mathcal{F}(K_t)(\xi) - 1}{t} \mathcal{F}(u)(\xi) = \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t}\right) \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &= \left(\frac{\exp(-t|\xi|^2) - 1}{t|\xi|^2}\right) |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \\ &\rightarrow (\text{per } t \rightarrow 0^+) - |\xi|^2 \mathcal{F}(u)(\xi) \quad \underbrace{\quad}_{\text{(cfr. [7] Prop.10.2.4)}} \quad \mathcal{F}(\Delta u)(\xi). \end{aligned}$$

Per l'iniettività di \mathcal{F} , deduciamo che il generatore infinitesimale A_3 del semigruppoo del calore è l'operatore di Laplace Δ con dominio $D(\Delta) = \{u \in C_b^0(\mathbb{R}^N), \Delta u \in C_b^0(\mathbb{R}^N)\}$. \square

⁴Cfr., ad esempio, [7] cap.10, per definizione e proprietà di \mathcal{F} . Osserviamo esplicitamente che qui, a differenza di [7], prendiamo, nella definizione di trasformata di Fourier, come *carattere* $\exp(-ix \cdot \xi)$ invece di $\exp(-2\pi ix \cdot \xi)$, cioè $\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \exp(-ix \cdot \xi) dx$.

⁵ $\mathcal{F}(K_t)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\exp(-\frac{|x|^2}{4t})}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp(-ix \cdot \xi) dx = \exp(-t|\xi|^2), \xi \in \mathbb{R}^N$.

9. Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R})$ (sottospazio di $C_b^0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue e limitate su \mathbb{R} con derivata prima e seconda continue e limitate), $x \in \mathbb{R}$, $0 < t < +\infty$ e $P_t(z)$ il nucleo di Poisson

$$P_t(z) := \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + z^2}.$$

Definiamo ⁶

$$\begin{aligned} (S_4(t))(u(x)) &:= (P_t * u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)u(y)dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} u(y)dy \end{aligned}$$

e poniamo $(S_4(0))(u(x)) = u(x)$.

Provare che $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$ è un semigruppato contrattivo in $C_b^2(\mathbb{R})$,

$$\|S_4(t)\|_{B(C_b^2(\mathbb{R}))} = 1$$

per ogni $t \geq 0$, determinarne il generatore infinitesimale A_4 e provare che

$$A_4 u = -Hu',$$

dove H è la trasformata di Hilbert.⁷

Soluzione. Con il cambiamento di variabile $x - y = z$, si ha

$$(P_t * u)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (x-y)^2} u(y)dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + z^2} u(x-z)dz.$$

⁶Questo integrale rappresenta una funzione armonica nel semipiano superiore con u valore alla frontiera.

⁷Se $u \in L^2(\mathbb{R})$, la trasformata di Hilbert di u è definita da $(Hu)(x) = \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy$ (l'integrale esiste, a valor principale, per quasi ogni x). Risulta $Hu \in L^2(\mathbb{R})$, $\|Hu\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$ e $H(Hu) = -u$. Pertanto H è una isometria di $L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$, di periodo 4.

Risulta, per ogni $t, s > 0$:⁸

$$\begin{aligned}
 P_t(P_s * u)(x) &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_s u(x-z)}{t^2+z^2} dz \\
 &= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+z^2} \left(\frac{s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi)}{s^2+(x-z-\xi)^2} u(\xi) d\xi \right) dz \\
 &= \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz \right) u(\xi) d\xi \\
 &= \frac{st}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{st} \frac{(t+s)}{(t+s)^2+(x-\xi)^2} \right) u(\xi) d\xi \\
 &= \frac{t+s}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t+s)^2+(x-\xi)^2} u(\xi) d\xi = (P_{t+s} * u)(x).
 \end{aligned}$$

Inoltre (verificare per esercizio):

- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S_4(t)u - u\|_\infty = 0$,
- $\{S_4(t)\}_{t \geq 0}$ è semigruppο contrattivo,
- $\|S_4(t)\|_{B(C_b^2(\mathbb{R}))} = 1$ per ogni $t \geq 0$.

⁸L'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz$$

può essere calcolato col teorema dei residui (cfr., ad esempio, [8] 7.3), applicato alla funzione della variabile complessa w , $f(w) = \frac{1}{(t^2+w^2)(s^2+(\tau-w)^2)}$, considerando il dominio regolare

$$\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\},$$

con $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $\overline{B}_R(0) \cap \{w \in \mathbb{C} : \text{Im}(w) \geq 0\}$ contenga i poli del primo ordine di $f(w)$, $w_1 = it$, $w_3 = \tau + is$, dove $\tau := x - \xi$.

Risulta

$$\text{Res}(f, w_1) = -\frac{i}{2t(\tau + is - it)(\tau - is - it)},$$

$$\text{Res}(f, w_3) = -\frac{i}{2s(\tau + is - it)(\tau + is + it)}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+z^2)(s^2+(x-z-\xi)^2)} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, w_1) + \text{Res}(f, w_3)] \\
 &= \frac{\pi}{st} \frac{\tau(t+s) + i(s-t)(t+s)}{(\tau + is - it)(\tau - is - it)(\tau + is + it)} = \frac{\pi}{st} \frac{(t+s)}{\tau^2 + (t+s)^2}.
 \end{aligned}$$

Per determinare il generatore infinitesimale A_4 , osserviamo preliminarmente che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)dy = 1$$

per ogni $t > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora,⁹

$$\begin{aligned} \frac{(S_4(t))(u(x)) - u(x)}{t} &= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(x-y)(u(y) - u(x))dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{t^2 + (x-y)^2} dy \\ &\quad (\text{per } t \rightarrow 0^+, \text{ e per il teorema della convergenza dominata}) \\ &\rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy =: A_4 u. \end{aligned}$$

Proviamo che $A_4 u = -Hu'$.

Per questo è sufficiente provare che

$$v.p. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(y)}{x-y} dy \right) = 0,$$

cioè,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x) + u'(y)(x-y)}{(x-y)^2} dy = 0.$$

⁹L'integrale è convergente perché $u \in C_b^2(\mathbb{R})$. Infatti,

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x)}{(x-y)^2} dy \right| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz.$$

Risulta

$$\int_{-1}^{+1} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz \leq \int_{-1}^{+1} \|u''\|_{\infty} dz = 2\|u''\|_{\infty} < +\infty$$

per ogni x . Inoltre,

$$\int_1^{+\infty} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz \leq 4\|u\|_{\infty} \int_1^{+\infty} \frac{1}{z^2} dz < +\infty$$

per ogni x , e analogamente $\int_{-\infty}^{-1} \frac{|2u(x) - u(x-z) - u(x+z)|}{z^2} dz < +\infty$ per ogni x .

Questo si verifica agevolmente, se si osserva che¹⁰

$$\begin{aligned} & v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(y) - u(x) + u'(y)(x - y)}{(x - y)^2} dy \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[u(y) + u'(y)(x - y)] - u(x)}{(x - y)^2} dy \\ &= v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{u(y)}{x - y} \right) - u(x) \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{x - y} \right) \right] dy = 0. \end{aligned}$$

□

¹⁰Si può provare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ (a meno di un fattore moltiplicativo costante dipendente solo dalla dimensione spaziale uno e dall'esponente 1/2),

$$A_4 u(x) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u(x) - u(x - y) - u(x + y)}{y^2} dy = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$$

(operatore di Laplace frazionario) (cfr., A. Carbotti, S. Dipierro, E. Valdinoci, *Local Density Of Solutions To Fractional Equations*, De Gruyter Studies in Mathematics vol. 74, (2019)).

