Capitolo 6

Introduzione alle Martingale

6.1 Definizione ed esempî

Benché queste lezioni trattino in prevalenza le martingale a tempo discreto, le definizione di firltrazione, di martingala e di sottomartingala, sono date nel caso generale.

Ricordiamo che si chiama *diretto* ogni insieme preordinato D nel quale, per ogni coppia s e t di elementi di D, esista un elemento $u \in D$, che sia maggiore tanto di s quanto di t; se si indica il preordine con "$\leq$", sarà $s \leq u$ e $t \leq u$. Supporremo, inoltre, che esista in D un unico elemento t_0 tale che, per ogni $t \in D$, sia $t \leq t_0$. Tale elemento sarà indicato con $+\infty$. In un insieme diretto che non sia un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ (o di $\overline{\mathbb{R}}$) l'espressione "t tende all'infinito" o, in simboli, "$t \to +\infty$", significa che, per ogni $\widetilde{t} \in D$ esiste $t \in D$ tale che $t \geq \widetilde{t}$.

Definizione 6.1.1. Dati uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed un insieme diretto D, si dice *filtrazione* o *scala (stocastica)* una famiglia crescente $\{\mathcal{F}_t : t \in D\}$ di tribú contenute in $\mathcal{F}$: se s e t sono elementi di D con $s \leq t$, allora $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.

L'indice t si interpreta come "tempo"; gli eventi di $\mathcal{F}_t$ si dicono *anteriori al tempo t*.

Definizione 6.1.2. Una famiglia $\{X_t : t \in D\}$ di v.a. definite in $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che, per ogni t in D, sia misurabile rispetto a $\mathcal{F}_t$,

$$\forall\, t \in D \qquad X_t \in \mathcal{L}^0(\mathcal{F}_t)\,.$$

si dice *adattata* alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$. ◇

Spesso, nelle applicazioni, è $D = \mathbb{N}$ oppure $D = \mathbb{Z}_+$, o, ancora $D = \mathbb{R}_+$. In termini un poco imprecisi, il concetto di filtrazione riflette il fenomeno dell'accumularsi delle conoscenze al passare del tempo: $\mathcal{F}_t$ rappresenta le conoscenze acquisite sino al tempo t, incluso, sicché considerare una famiglia adattata significa far dipendere la v.a. X_t da ciò che è accaduto sino al tempo t, ma non da ciò che accadrà in futuro.

Si osservi che, data una successione (X_n) di v.a. sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, esiste sempre una filtrazione rispetto alla quale (X_n) è adattata: si tratta della *filtrazione naturale* che è data da

$$\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}(X_1),\ \mathcal{F}_2 := \mathcal{F}(X_1, X_2),\ \ldots, \mathcal{F}_n := \mathcal{F}(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ \ldots$$

ove $\mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$ denota la tribú generata dalle prime n v.a. della successione (X_n).

Definizione 6.1.3. Data una filtrazione $\{\mathcal{F}_t : t \in D\}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si dice *martingala*, una famiglia $\{X_t : t \in D\}$ di v.a. di $\mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ che sia adattata alla filtrazione data e tale che per ogni coppia s, t di elementi di D con $s \leq t$, valga

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \,. \tag{6.1.1}$$

Si parlerà allora della martingala $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$. Se, invece della (6.1.1), vale la diseguaglianza

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \,, \tag{6.1.2}$$

$\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ si dirà *sottomartingala*; se vale la diseguaglianza

$$\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \,, \tag{6.1.3}$$

$\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ si dirà *supermartingala*. ◇

Si osservi che ponendo $\mathbb{E}_s(\cdot) := \mathbb{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_s)$, le (6.1.1), (6.1.2) e (6.1.3) si possono scrivere nelle forme abbreviate, valide se $s \leq t$,

$$\mathbb{E}_s(X_t) = X_s, \quad \mathbb{E}_s(X_t) \geq X_s, \quad \mathbb{E}_s(X_t) \leq X_s \,.$$

Nel seguito adotteremo sistematicamente questa notazione.

Si noti che se $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una sottomartingala, allora $\{(-X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una supermartingala, e viceversa. Per questa ragione basta studiare le proprietà delle sottomartingale per ottenere facilmente quelle delle supermartingale.

Vale la pena di notare che, nel caso discreto $D = \mathbb{Z}_+$, la definizione di martingala si sarebbe potuta dare in modo leggermente differente, ma equivalente, richiedendo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga

$$\mathbb{E}_{n-1}(X_n) = X_{n-1} \,. \tag{6.1.4}$$

È, infatti, evidente che la (6.1.1) implica la (6.1.4). Viceversa, si supponga vera quest'ultima relazione; allora per il Teorema 5.3.8 vale, per $k < n$,

$$\mathbb{E}_k(X_n) = \mathbb{E}_k \mathbb{E}_{n-1}(X_n) = \mathbb{E}_k\left(X_{n-1}\right) = \cdots = \mathbb{E}_k\left(X_{k+1}\right) = X_k \,.$$

Considerazione analoghe valgono per le definizioni di sotto– e super–martingala.

La definizione di martingala, sotto– e super–martingala può essere introdotta in maniera differente, evitando il ricorso alle speranze condizionate. Al costo di una maggiore pesantezza di notazione, tale approccio ha il vantaggio di evitare il ricorso al teorema di Radon–Nikodym, implicito nell'uso delle speranze condizionate. Poiché è possibile dimostrare il teorema di Radon–Nikodym ricorrendo alle martingale non si sarà quindi compiuto un percorso circolare.

$\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una martingala, una sotto– o una super–martingala se, e solo se, per ogni coppia s e t di elementi di D con $s \leq t$ e per ogni insieme $A \in \mathcal{F}_s$, si ha rispettivamente

$$\int_A X_t \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_s \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,, \tag{6.1.5}$$

$$\int_A X_t \,\mathrm{d}\mathbb{P} \geq \int_A X_s \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,, \tag{6.1.6}$$

$$\int_A X_t \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_s \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,. \tag{6.1.7}$$

Si noti che le (6.1.5), (6.1.6), (6.1.7) possono essere scritte nelle forme, a esse rispettivamente equivalenti,

$$\mathbb{E}\left((X_t - X_s)\,\mathbf{1}_A\right) = 0\,, \quad \mathbb{E}\left((X_t - X_s)\,\mathbf{1}_A\right) \geq 0\,, \quad \mathbb{E}\left((X_t - X_s)\,\mathbf{1}_A\right) \leq 0\,.$$

Teorema 6.1.1. *La famiglia delle speranze, $\{\mathbb{E}(X_t) : t \in D\}$, in particolare la successione delle speranze, se $D = \mathbb{N}$ o $D = \mathbb{Z}_+$, è*

(a) *costante se $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una martingala,*

(b) *crescente se $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una sottomartingala,*

(c) *decrescente se $\{(X_t, \mathcal{F}_t)\}$ è una supermartingala.*

Dimostrazione. Basta porre $A = \Omega$, che appartiene ad ogni tribú, nella (6.1.5), (6.1.6) e (6.1.7), rispettivamente. □

In particolare, nel caso di una successione, $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, indicati con

$$D_n := X_n - X_{n-1}$$

gli incrementi di una martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$, si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{n-1}(D_n) = 0\,.$$

Se non è specificata la filtrazione, dicendo che la successione (X_t) è una martingala, si intende senz'altro che la filtrazione sia quella naturale. Analoghe considerazioni valgono per le sotto– e le super–martingale.

D'ora in poi, senza che ciò sia espressamente richiamato, supporremo sempre che le v.a. considerate siano definite sopra uno spazio di probabilità comune $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Esempio 6.1.1. Una successione costante c di v.a. (cioè $X_t = c$ per ogni $n \in D$) è una martingala. ■

Esempio 6.1.2. Siano $(\mathcal{F}_t)$ una filtrazione di $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X una v.a. di $L^1(\mathcal{F})$; si ponga

$$X_t := \mathbb{E}_t(X)\,.$$

Allora $(X_t, \mathcal{F}_t)$ è una martingala; infatti per il Teorema 5.3.7, se $s < t$,

$$\mathbb{E}_s(X_t) = \mathbb{E}_s\,\mathbb{E}_t(X) = \mathbb{E}_s(X) = X_s\,.$$

Una tale martingala si dice *ereditaria*. ■

Esempio 6.1.3. Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di $L^1(\mathcal{F})$ e si consideri la filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)$. Posto, come al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, si ha che $(S_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala. Per controllarlo si usano l'additività delle speranze condizionate e il Teorema 5.3.8:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(S_{n+1}) &= \mathbb{E}_n(S_n + X_{n+1}) = \mathbb{E}_n(S_n) + \mathbb{E}_n(X_{n+1}) \\ &= S_n + \mathbb{E}_n(X_{n+1}) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = S_n\,.\end{aligned}$$

Si osservi che poiché $X_n = S_n - S_{n-1}$ la filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ è anche la filtrazione naturale della successione (S_n). ■

Esempio 6.1.4. Sia $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. indipendenti di $\mathcal{L}^1(\mathcal{F})$ con

$$\mathbb{E}(Y_n) = \alpha_n \neq 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Si ponga $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ e

$$X_n := \prod_{j=1}^n \frac{Y_j}{\alpha_j}\,;$$

allora $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(X_{n+1}) &= \mathbb{E}_n\left(\frac{X_n\,Y_{n+1}}{\alpha_{n+1}}\right) = \frac{X_n}{\alpha_{n+1}}\,\mathbb{E}_n(Y_{n+1}) \\ &= \frac{X_n}{\alpha_{n+1}}\,\mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_n\,.\end{aligned}$$

Un martingala siffatta si dice *moltiplicativa*. ■

Teorema 6.1.2. *Le martingale rispetto alla stessa filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ formano uno spazio vettoriale (complesso) denotato con $\mathcal{M}(\mathcal{F}_t)$.*

Dimostrazione. Se $(X_t, \mathcal{F}_t)$ è una martingala, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, $(\alpha\, X_t, \mathcal{F}_t)$ è, ovviamente, una martingala. Se (X'_t) e (X''_t) sono due martingale rispetto alla stessa filtrazione $(\mathcal{F}_t)$, anche $(X'_t + X''_t)$ è una martingala rispetto alla stessa filtrazione:

$$\mathbb{E}_s\left(X'_t + X''_t\right) = \mathbb{E}_s\left(X'_t\right) + \mathbb{E}_s\left(X''_t\right) = X'_s + X''_s\,,$$

one l'asserto. □

È importante il caso particolare delle martingale *quadratiche.*

Definizione 6.1.4. Si dice che $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una *martingala quadratica* se, oltre a soddisfare alla condizione (6.1.1), X_n appartiene a $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_n)$, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$. ◇

Teorema 6.1.3. *Sia $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una martingala quadratica; allora, per gli incrementi di martingala $D_n := X_n - X_{n-1}$ valgono le proprietà*

(a) *per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, è $\mathbb{E}_n\left(D_{n+1}^2\right) = \mathbb{E}_n\left[(X_{n+1} - X_n)^2\right] = \mathbb{E}_n(X_{n+1}^2) - X_n^2$;*

(b) *se $j \neq k$, allora $\mathbb{E}(D_j\, D_k) = 0$; gli incrementi D_j sono dunque ortogonali se considerati come vettori di $\mathcal{L}^2$, incorrelati se riguardati come v.a..*

Dimostrazione. (a) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\left[(X_{n+1}-X_n)^2\right] &= \mathbb{E}_n\left(X_{n+1}^2\right)+\mathbb{E}_n(X_n^2)-2\,\mathbb{E}_n\left(X_n\,X_{n+1}\right)\\ &= \mathbb{E}_n\left(X_{n+1}^2\right)+X_n^2-2X_n\,\mathbb{E}_n\left(X_{n+1}\right)\\ &= \mathbb{E}_n(X_{n+1}^2)+X_n^2-2X_n^2=\mathbb{E}_n(X_{n+1}^2)-X_n^2\,.\end{aligned}$$

(b) Si supponga che sia $j<k$; allora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_j\,D_k) &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}}(D_j\,D_k)=\mathbb{E}_{\mathcal{N}}\,\mathbb{E}_{k-1}(D_j\,D_k)\\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}}\left(D_j\,\mathbb{E}_{k-1}(D_k)\right)=\mathbb{E}_{\mathcal{N}}\left(D_j\left(X_{k-1}-X_{k-1}\right)\right)=0\,,\end{aligned}$$

cioè l'asserto. □

Sia (X_n) una martingala quadratica; essa può essere espressa nella forma

$$X_n=X_0+\sum_{j=1}^{n}(X_j-X_{j-1})=X_0+\sum_{j=1}^{n}D_j\,,$$

nella quale X_n risulta scritta come somma di elementi ortogonali di L^2. Ricorrendo al Teorema 6.1.3 si ha

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right)=\mathbb{E}\left(X_0^2\right)+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(X_j-X_{j-1}\right)^2\right]\,.$$

Perciò una martingala quadratica (X_n) è limitata in L^2, vale a dire che si ha

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|X_n\|_2<+\infty\,,$$

se, e solo se,

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left(X_j-X_{j-1}\right)^2\right]<+\infty\,.$$

Teorema 6.1.4. *Siano date $(X_t,\mathcal{F}_t)_{n\in D}$ una sottomartingala e una funzione convessa $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che, per ogni $n\in D$, sia integrabile la v.a. $\varphi\circ X_t$. Se vale una delle seguenti condizioni:*

(a) *φ è crescente,*

(b) *$(X_t,\mathcal{F}_t)$ è una martingala,*

allora $(\varphi\circ X_t,\mathcal{F}_t)$ è una sottomartingala.

Dimostrazione. In entrambe le ipotesi, la diseguaglianza di Jensen dà

$$\mathbb{E}_s\left(\varphi\circ X_t\right)\geq\varphi\left(\mathbb{E}_s(X_t)\right)\,.$$

Se φ è crescente, $\varphi\left(\mathbb{E}_s(X_t)\right)\geq\varphi\circ X_s$ dalla definizione di sottomartingala; se, invece, $(X_t,\mathcal{F}_t)$ è una martingala, $\varphi\left(\mathbb{E}_s(X_t)\right)=\varphi\circ X_s$. □

In particolare, se $(X_t, \mathcal{F}_t)$ è una sottomartingala, anche $(X_t^+, \mathcal{F}_t)$ è tale; se $(X_t, \mathcal{F}_t)$ è una martingala, $(|X_t|^p, \mathcal{F}_t)$ è una sottomartingala per ogni p in $[1, +\infty[$.

Nel caso discreto, $D = \mathbb{Z}_+$, il prossimo risultato consentirà di ricondurre lo studio della convergenza di sotto– e super–martingale a quello delle martingale.

Teorema 6.1.5. (Decomposizione di Doob). *Se $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è una sottomartingala, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, esistono v.a. Y_n e A_n tali che*

(a) $X_n = Y_n + A_n$*;*

(b) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *è una martingala;*

(c) $A_0 = 0$*,* $A_n \le A_{n+1}$*;*

(d) *per ogni $n \in \mathbb{N}$, A_n è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{n-1}$, $A_n \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$.*

Le v.a. Y_n e A_n sono univocamente determinate. Un processo con le proprietà (c) *e* (d) *si dice* crescente.

Analogamente una supermartingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$ si può decomporre nella differenza $X_n = Y_n - A_n$ ove $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala e $\{A_n\}$ è un processo crescente.

Dimostrazione. Si definisca per ricorrenza

$$A_0 := 0, \qquad A_{n+1} := A_n + \mathbb{E}_n\,(X_{n+1}) - X_n \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Dunque,

$$A_n := \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}_{j-1}(X_j) - X_{j-1}\right)\,,$$

che è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{n-1}$ e che è una somma a termini positivi, poiché $\{(X_n, \mathcal{F}_n)\}$ è una sottomartingala; perciò $A_{n+1} \ge A_n$. Si ponga

$$Y_n := X_n - A_n = X_n - \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}_{j-1}(X_j) - X_{j-1}\right)\,.$$

Con queste definizioni si sono provate (a), (c) e (d).

Per dimostrare (b), si calcoli

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_n(Y_{n+1}) &= \mathbb{E}_n(X_{n+1}) - \mathbb{E}_n\left\{\sum_{j=1}^{n+1} \left(\mathbb{E}_{j-1}(X_j) - X_{j-1}\right)\right\} \\
&= \mathbb{E}_n(X_{n+1}) - \mathbb{E}_n\left(\mathbb{E}_n(X_{n+1}) - X_n\right) - \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_n\left(\mathbb{E}_{j-1}(X_j) - X_{j-1}\right) \\
&= X_n - \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}_{j-1}(X_j) - X_{j-1}\right) = Y_n\,,
\end{aligned}$$

sicché $\{(Y_n, \mathcal{F}_n)\}$ è una martingala.

Resta da dimostrare l'unicità della decomposizione. Siano (Y_n') e (A_n') due successioni di v.a. con le stesse proprietà di (Y_n) e di (A_n) rispettivamente. Si ha intanto che $A_0' = 0$ e $Y_0' = Y_0$. Ragionando per induzione, si supponga di aver dimostrato che, per $j = 1, 2, \ldots, n$, vale $Y'_j = Y_j$ e $A'_j = A_j$. Allora, poiché tanto A'_{n+1} quanto A_{n+1} sono $\mathcal{F}_n$–misurabili, si ha

$$\begin{aligned} A'_{n+1} &= \mathbb{E}_n(A'_{n+1}) = \mathbb{E}_n(X_{n+1} - Y'_{n+1}) = \mathbb{E}_n(X_{n+1}) - Y'_n \\ &= \mathbb{E}_n(X_{n+1}) - Y_n = \mathbb{E}_n(X_{n+1} - Y_{n+1}) = \mathbb{E}_n(A_{n+1}) = A_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Ne segue che anche $Y'_{n+1} = Y_{n+1}$. □

Sia (X_n) una martingala quadratica tale che $X_0 = 0$; allora il Teorema 6.1.4 assicura che $\left(X_n^2\right)$ sia una sottomartingala. Se ne consideri la decomposizione di Doob

$$X_n^2 = Y_n + A_n \qquad (n \in \mathbb{N}) \,,$$

ove (Y_n) è una martingala; poiché il processo (A_n) è crescente, esiste il suo limite quasi certo

$$A_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n \,.$$

Ora

$$\mathbb{E}\left(X_n^2\right) = \mathbb{E}(Y_n) + \mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(Y_0) + \mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(X_0) + \mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(A_n) \,,$$

sicché la sotto–martingala $\left(X_n^2\right)$ è limitata in L^2 se, e solo se, $\mathbb{E}(A_\infty) < +\infty$. Si ha, inoltre, poiché A_n è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{n-1}$,

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= \mathbb{E}_{n-1}\left(A_n - A_{n-1}\right) = \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2 - X_{n-1}^2\right) - \mathbb{E}_{n-1}(Y_n - Y_{n-1}) \\ &= \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2 - X_{n-1}^2\right) = \mathbb{E}_{n-1}\left[(X_n - X_{n-1})^2\right] \,, \end{aligned}$$

ove nell'ultimo passaggio si è usato il Teorema 6.1.3 (a).

6.2 Tempi d'arresto

In questa sezione ci occuperemo solo di filtrazioni numerabili e di successioni di v.a..

Definizione 6.2.1. Data una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si dice *tempo d'arresto rispetto alla filtrazione* $(\mathcal{F}_n)$ ogni v.a.

$$T : \Omega \to \overline{\mathbb{Z}}_+ := \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$$

tale che, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, $\{T \leq n\}$ appartenga a $\mathcal{F}_n$. ◇

La condizione $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ equivale all'altra $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, $\{T \leq n\} = \cup_{k \leq n} \{T = k\}$ e $\{T = k\}$ appartiene a $\mathcal{F}_n$ per ogni $k \leq n$; viceversa,

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n - 1\} \,,$$

che appartiene alla tribú $\mathcal{F}_n$.

Esempio 6.2.1. Se (X_n) è una successione adattata alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$ e B è un boreliano di $\mathbb{R}$, allora il *tempo d'ingresso* in B,

$$T_B := \inf\{n \in \overline{\mathbb{N}} : X_n \in B\}$$

è un tempo d'arresto. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è

$$\{T_B > n\} = \bigcap_{k=0}^{n} \{X_k \notin B\} \in \mathcal{F}_n,$$

onde $\{T_B \le n\} = \{T_B > n\}^c \in \mathcal{F}_n$. ■

D'ora in poi si supporrà tacitamente che sia assegnata una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$; quando si parlerà di tempi d'arresto, si intenderà che questi siano considerati rispetto a tale filtrazione.

Un tempo d'arresto T si dice (q.c.) *finito* se $\mathbb{P}(T = +\infty) = 0$.

Dato un tempo d'arresto T si definisca una famiglia di sottoinsiemi di Ω mediante

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : \forall\, n \in \mathbb{N} \quad A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\} \ .$$

Teorema 6.2.1. *Per ogni tempo d'arresto T la famiglia $\mathcal{F}_T$ è una tribú.*

Dimostrazione. L'appartenenza di Ω a $\mathcal{F}_T$ scende direttamente dall'aver supposto che T sia un tempo d'arresto.

Si supponga ora che A sia un insieme di $\mathcal{F}_T$, cioè che sia $A \cap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $\{T > n\}$ è in $\mathcal{F}_{n-1}$ e quindi anche in $\mathcal{F}_n$, appartiene a $\mathcal{F}_n$ l'insieme

$$\left(A \bigcap \{T \le n\}\right) \bigcup \{T > n\} = \left(A \bigcup \{T > n\}\right) \bigcap \Omega = A \cup \{T > n\}\,,$$

e dunque anche il suo complementare $A^c \cap \{T \le n\}$. Perciò anche A^c appartiene a $\mathcal{F}_T$.

Sia, infine, $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathcal{F}_T$; pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \bigcap \{T \le n\} = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_j \cap \{T \le n\}) \in \mathcal{F}_n.$$

Dunque, l'unione numerabile $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ appartiene a $\mathcal{F}_T$. □

Teorema 6.2.2. *Siano S e T tempi d'arresto. Allora*

(a) *T è $\mathcal{F}_T$–misurabile;*

(b) *$S \wedge T$ e $S \vee T$ sono tempi d'arresto;*

(c) *se $S \le T$ allora $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.*

Dimostrazione. (a) Per ogni $c > 0$ si ha $\{T \le c\} = \{T \le [c]\}$ ove $[c]$ è la parte intera di c. Ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, è

$$\{T \le [c]\} \cap \{T \le n\} = \begin{cases} \{T \le [c]\}, & \text{se } [c] \le n, \\ \{T \le n\}, & \text{se } [c] > n; \end{cases}$$

in entrambi i casi $\{T \le [c]\} \cap \{T \le n\}$ appartiene a $\mathcal{F}_n$, sicché T è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_T$.

(b) Sia $n \in \mathbb{N}$; allora

$$\{S \wedge T \le n\} = \{S \le n\} \bigcup \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\,,$$

e

$$\{S \vee T \le n\} = \{S \le n\} \bigcap \{T \le n\} \in \mathcal{F}_n\,.$$

(c) Si supponga $S \le T$ e $A \in \mathcal{F}_S$. Ora, $\{T \le n\}$ è contenuto in $\{S \le n\}$. Infatti la condizione $S \le T$ implica che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, valga l'inclusione

$$\{S > n\} \subseteq \{T > n\}\,;$$

pertanto

$$\{T \le n\} = \{T > n\}^c \subseteq \{S > n\}^c = \{S \le n\}\,.$$

In definitiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$A \bigcap \{T \le n\} = A \bigcap \{S \le n\} \bigcap \{T \le n\}$$

che appartiene a $\mathcal{F}_n$, poiché, per ipotesi, tanto $A \cap \{S \le n\}$ quanto $\{T \le n\}$ appartengono a $\mathcal{F}_n$. $\square$

Data una successione (X_n) adattata a $(\mathcal{F}_n)$ e un tempo d'arresto T, si denoti con X_T la funzione $X_T : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n(\omega)\, \mathbf{1}_{\{T=n\}}(\omega) + \infty\, \mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}\,.$$

Si è cosí definita una v.a.; infatti se B è un boreliano della retta, si ha

$$X_T^{-1}(B) = \{X_T \in B\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{T = n\} \cap \{X_n \in B\}) \in \mathcal{F}.$$

Nelle stesse condizioni si dice *processo arrestato al tempo* T il processo stocastico[1] $X^T := (X_{T \wedge n})$, cioè $X_n^T := X_{T \wedge n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si noti che, mentre X_T è una v.a., X^T indica un processo stocastico.

Teorema 6.2.3. *Se T è un tempo d'arresto e $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ un processo adattato a $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, vale la relazione*

$$X_n^T - X_{n-1}^T = (X_n - X_{n-1})\, \mathbf{1}_{\{T \ge n\}} \qquad (n \in \mathbb{N})\,, \tag{6.2.1}$$

detta identità d'arresto*.*

Dimostrazione. Se ω appartiene a $\{T < n\}$, è $X_{T \wedge n}(\omega) = X_{T \wedge (n-1)}(\omega)$; se, invece, ω è in $\{T \ge n\}$, allora $T(\omega) \wedge n = n$ e $T(\omega) \wedge (n-1) = n - 1$. $\square$

Sarà utile il seguente lemma.

[1] Un processo stocastico in tempo discreto è semplicemente una successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di variabili aleatorie definite sullo stesso spazio di probabilità.

Lemma 6.2.1. (Wald). *Siano* $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *una successione di v.a. tale che* Z_0 *sia integrabile,* $\mathbb{E}(|Z_0|) < +\infty$*, e tale che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, sia*

$$|Z_n - Z_{n-1}| \leq \alpha\,,$$

ove $\alpha > 0$ *è una costante, e* T *un tempo d'arresto a valori in* $\overline{\mathbb{N}}$ *pure integrabile,* $\mathbb{E}(T) < +\infty$*. Allora la successione* Z^T *arrestata al tempo* T *è dominata in* L^1*, vale a dire che esiste* $Y \in L^1$ *tale che, per ogni* $n \in \mathbb{Z}_+$*, sia* $|Z_{n\wedge T}| \leq Y$*.*

Dimostrazione. È immediato scrivere

$$Z_{n\wedge T} = Z_0 + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{[1,n\wedge T]}(k)\ (Z_k - Z_{k-1})\ .$$

Di qui

$$|Z_{n\wedge T} \leq |Z_0| + \alpha \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{[1,n\wedge T]}(k) = |Z_0| + \alpha\,(n\wedge T) \leq |Z_0| + \alpha\,T\,,$$

onde l'asserto. □

6.3 Martingale e tempi d'arresto

Questa sezione è dedicata interamente allo studio dei rapporti tra martingale e tempi d'arresto. Premettiamo una definizione e un risultato preliminare. Nel seguito, per comodità, supporremo che l'insieme dei tempi sia $\mathbb{Z}_+$.

Definizione 6.3.1. Sia data una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ sullo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$; un processo $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ si dice *prevedibile* se, per ogni $n\in\mathbb{N}$, U_n è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_{n-1}$, $U_n \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ◇

Definizione 6.3.2. Si dice *compensatore* di un processo $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ un processo prevedibile $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tale che $(X_n - V_n)$ sia un martingala. ◇

Naturalmente V_n sarà integrabile per ogni n. Se $(X_n - V_n)$ è una martingala si ha, per $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{n-1}(X_n - V_n) = X_{n-1} - V_{n-1}\,,$$

onde

$$\mathbb{E}_{n-1}(X_n - X_{n-1}) = V_n - V_{n-1}\,,$$

che basta per individuare il compensatore; infatti posto $V_0 = 0$ è

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} (V_j - V_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}_{n-1}\,(X_j - X_{j-1})\ .$$

Esempio 6.3.1. Data una martingala (X_n) si sa dal Teorema 6.1.4 che (X_n^2) è una sotto–martingala. Allora gli incrementi

$$V_n - V_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2 - X_{n-1}^2\right) = \mathbb{E}_{n-1}\left[(X_n - X_{n-1})^2\right]$$

individuano il compensatore di (X_n^2). ■

Diamo allora la definizione di trasformata di una martingala.

Definizione 6.3.3. Dati una martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e un processo prevedibile $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$, il processo $((U \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ definito da

$$
\begin{aligned}
(U \cdot X)_0 &:= U_0\, X_0 \\
(U \cdot X)_n &:= U_0\, X_0 + \sum_{j=1}^{n} U_j\, (X_j - X_{j-1}) \quad (n \in \mathbb{N})
\end{aligned} \tag{6.3.1}
$$

si dice *trasformata della martingala* (X_n). ◇

Teorema 6.3.1. *Con le stesse notazioni della Definizione* 6.3.3 *se nell'eq.* (6.3.1) *le variabili* $(U \cdot X)_n$ *sono integrabili,* $(U \circ X)_n \in L^1$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, allora*

(a) *se* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *è una martingala, tale è anche* $((U \cdot X)_n, \mathcal{F}_n)$*;*

(b) *se* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *è una sotto–martingala e se* $U_n \geq 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, è una sotto–martingala anche* $((U \cdot X)_n, \mathcal{F}_n)$*.*

Dimostrazione. Si osservi che, in virtú della (6.3.1) e del fatto che (U_n) è prevedibile, si ha, per $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n-1}\left[(U \cdot X)_n\right] &= \mathbb{E}_{n-1}\left[U_0\, X_0 + \sum_{j=1}^{n} U_j\, (X_j - X_{j-1})\right] \\
&= U_0\, X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} U_j\, (X_j - X_{j-1}) + U_n\, \mathbb{E}_{n-1}(X_n - X_{n-1})\,.
\end{aligned}
$$

Se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, si ha immediatamente

$$
\mathbb{E}_{n-1}\left[(U \cdot X)_n\right] = U_0\, X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} U_j\, (X_j - X_{j-1}) = (U \cdot X)_{n-1}\,,
$$

sicché $((U \cdot X)_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, mentre, se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una sotto–martingala e se $U_n \geq 0$, allora

$$
\mathbb{E}_{n-1}\left[(U \cdot X)_n\right] \geq U_0\, X_0 + \sum_{j=1}^{n-1} U_j\, (X_j - X_{j-1}) = (U \cdot X)_{n-1}\,,
$$

sicché $((U \cdot X)_n, \mathcal{F}_n)$ è una sotto–martingala. □

Si noti che basta che ogni U_n sia limitata affinché $(U \circ X)_n$ sia integrabile.

Teorema 6.3.2. *Se* (X_n) *è una sotto–martingala (o una martingala) e* T *è un tempo d'arresto,* X^T *è ancora una sotto–martingala (rispettivamente una martingala). In altre parole, arrestando una (sotto–)martingala si ottiene ancora una (sotto–)martingala.*

Dimostrazione. Basta infatti considerare il processo prevedibile definito da $U_0 = 1$ e, per $n \in \mathbb{N}$, da $U_n = \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$. Allora $(U \cdot X)_0 = X_0$, mentre per $n \in \mathbb{N}$, si ha, in virtú dell'identità d'arresto (6.2.1),

$$(U \cdot X)_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} (X_j - X_{j-1})\, \mathbf{1}_{\{T \geq j\}} = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \left(X_j^T - X_{j-1}^T\right) = X_n^T\,;$$

il risultato è ora una diretta conseguenza del Teorema 6.3.1. □

Teorema 6.3.3. *Siano $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ una sottomartingala e S e T due tempi d'arresto limitati con $S \leq T \leq N$ ($N \in \mathbb{N}$). Allora,*

$$\mathbb{E}\,(X_T \mid \mathcal{F}_S) \geq X_S\,.$$

Se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, nell'ultima relazione vale il segno d'eguaglianza.

Dimostrazione. Si ha, intanto, $|X_S| \leq \sum_{j=0}^{N} |X_j|$, sicché X_S è in $L^1(\mathcal{F})$. Se A è in $\mathcal{F}_S$ e $j \leq N$, si ponga $A_j := A \cap \{S = j\} \in \mathcal{F}_j$ e, per $j \leq k \leq N$,

$$\begin{aligned} A(j,k) &:= A_j \cap \{T = k\}, \\ U(j,k) &:= \cup_{i \geq k} A(j,i) = A_j \cap \{T \geq k\}, \\ V(j,k) &:= U(j,k+1) = A_j \cap \{T > k\}\,. \end{aligned}$$

Tutti e tre questi insiemi appartengono a $\mathcal{F}_k$. Segue dalla definizione di sottomartingala che

$$\int\limits_{V(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int\limits_{V(j,k)} X_{k+1} \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,;$$

e, poiché $U(j,k) = A(j,k) \cup V(j,k)$, che è un'unione disgiunta,

$$\begin{aligned} \int\limits_{U(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int\limits_{A(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_{V(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \int\limits_{A(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} + \int\limits_{U(j,k+1)} X_{k+1} \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,, \end{aligned}$$

onde,

$$\int\limits_{U(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{U(j,k+1)} X_{k+1} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int\limits_{A(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{A(j,k)} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,,$$

cioè

$$\int\limits_{U(j,k)} X_k \,\mathrm{d}\mathbb{P} - \int\limits_{U(j,k+1)} X_{k+1} \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int\limits_{A(j,k)} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,.$$

Si sommi ora, in quest'ultima diseguaglianza, per k tra j e N e si osservi che è $A_j = U(j,j)$ e che $U(j, N+1) = \emptyset$:

$$\int\limits_{A_j} X_S \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{A_j} X_j \,\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int\limits_{A_j} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,.$$

Si sommi, infine, su j tra 0 e N per ottenere

$$\int_A X_S \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_A X_T \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,,$$

onde l'asserto. □

Sia T un tempo d'arresto limitato, $T \leq N$. Se (X_n) è una martingala, si può ricorrere al Teorema 6.3.3 per dimostrare che è, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_n);$$

in altre parole, non si può aumentare la speranza della vincita arrestando un gioco equo ad un tempo aleatorio limitato T che dipende dall'informazione disponibile sino al momento dell'arresto.

Se (X_n) è una sottomartingala, vale

$$\mathbb{E}(X_0) \leq \mathbb{E}(X_T) \leq \mathbb{E}(X_N).$$

Si osservi che non è detto che X_T sia in L^1 anche se T è q.c. finito. Si veda, a tal proposito, il seguente

Esempio 6.3.2. Si ritorni all'esempio 6.1.4 e si consideri la martingala moltiplicativa

$$X_n := \prod_{j=1}^{n} (1 + 3\, R_j)$$

ove le R_j sono le funzioni di Rademacher. Si consideri il tempo d'arresto

$$T := \min\{n \in \mathbb{N} : R_n < 0\} \,.$$

Ora

$$\{T = n\} = \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right[\,,$$

sicché $\mathbb{P}(T = n) = 2^{-n}$ e

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n 2^{-(n-1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d}{dt} t^n\right]_{t=1/2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} t^n\right]_{t=1/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dt} \frac{1}{1-t}\right]_{t=1/2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1-t)^2}\right]_{t=1/2} = 2 \,.
\end{aligned}$$

Dunque T è q.c. finito. Non è difficile riconoscere che

$$X_T = -2 \cdot 4^{T-1} = -\frac{1}{2}\, 4^T \,,$$

onde

$$\mathbb{E}(|X_T|) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} 4^n \, \mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n = +\infty \,.$$

■

Teorema 6.3.4. *Se (X_n) è una martingala limitata in L^1 e T è un tempo d'arresto q.c. finito, allora X_T appartiene a L^1.*

Dimostrazione. Se è $\|X_n\|_1 \leq H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|X_{T\wedge n}|\right) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left(|X_j|\ \mathbf{1}_{\{T=j\}}\right) + \mathbb{E}\left(|X_n|\ \mathbf{1}_{\{T>n\}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} |X_j|\ \mathrm{d}\mathbb{P} + \mathbb{E}\left(|X_n|\ \mathbf{1}_{\{T>n\}}\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} \mathbb{E}_j\left(|X_n|\right)\ \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{T>n\}} |X_n|\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\{T=j\}} |X_n|\ \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{\{T>n\}} |X_n|\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}\left(|X_n|\right) = \|X_n\|_1 \leq H < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Però $X_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T$, sicché il lemma di Fatou assicura che sia $\mathbb{E}\left(|X_T|\right) \leq H$, cioè che X_T sia in L^1. □

Tuttavia, anche quando $X_T \in L^1$, non è affatto detto che sia $\mathbb{E}\left(X_T\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right)$.

Esempio 6.3.3. Si consideri un processo di Bernoulli. Si è visto nell'esempio 6.1.3 che (G_n) è una martingala rispetto alla filtrazione naturale. Fissato $j > 0$, si consideri il tempo di primo passaggio per la posizione $x = j$,

$$T_j := \min\{n \in \overline{\mathbb{N}} : G_n = j\};$$

il tempo d'arresto T_j è q.c. finito. Infatti

$$\{T_j = +\infty\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{G_n < j\}$$

e si sa che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|G_n| < j\right) = 0.$$

Ora $G_0 = 0$ e $G_{T_j} = j$ q.c., sicché G_{T_j} appartiene a L^1 e si ha banalmente $\mathbb{E}(G_{T_j}) = j \neq 0 = \mathbb{E}(G_0)$. ■

Il risultato che segue è fondamentale per i teoremi di convergenza.

Data una successione (X_n) di v.a. definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si ponga

$$X_n^* := \max_{j\leq n} X_j.$$

Teorema 6.3.5. (Diseguaglianza massimale). *Se (X_n) è una sottomartingala, si ha, per ogni $\theta > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$\theta\,\mathbb{P}\left(X_n^* \geq \theta\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n\,\mathbf{1}_{\{X_n^*\geq\theta\}}\right) \leq \mathbb{E}(X_n^+)\,. \tag{6.3.2}$$

Dimostrazione. Si ponga

$$S := \min\{j \le n : X_j \ge \theta\}\, \mathbf{1}_{\{X_n^* \ge \theta\}} + n\, \mathbf{1}_{\{X_n^* < \theta\}}.$$

La v.a. S cosí definita è evidentemente un tempo d'arresto con $S \le n$. Inoltre, $\{X_n^* \ge \theta\}$ appartiene a $\mathcal{F}_S$ perché, per ogni $k \le n$,

$$\{X_n^* \ge \theta\} \bigcap \{S \le k\} = \{\max_{j \le k} X_j \ge \theta\} = \{X_k^* \ge \theta\} \in \mathcal{F}_k.$$

Per il Teorema 6.3.3, con $T := n$, si ha $\mathbb{E}\,(X_n \mid \mathcal{F}_S) \ge X_S$. Poiché, nell'insieme $\{X_n^* \ge \theta\}$, è $X_S \ge \theta$, si ha

$$\begin{aligned} \theta\, \mathbb{P}\,(X_n^* \ge \theta) = \mathbb{E}\left(\theta\, \mathbf{1}_{\{X_n^* \ge \theta\}}\right) &\le \int_{\{X_n^* \ge \theta\}} X_S \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\le \int_{\{X_n^* \ge \theta\}} X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} \le \mathbb{E}\left(X_n^+\right) , \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Corollario 6.3.1. *Sia (X_n) una sotto–martingala positiva, $X_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$; allora, per ogni $\theta > 0$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, vale la diseguaglianza*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{k \le n} X_k \ge \theta\right) \le \frac{1}{\theta}\, \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{\theta}\, \|X_n\|_1 . \tag{6.3.3}$$

Il seguente risultato è notevole per l'importante corollario che permette di stabilire.

Lemma 6.3.1. *Siano X e Y dua v.a. positive tali che, per ogni $\theta > 0$, sia*

$$\theta\, \mathbb{P}(X \ge \theta) \le \int_{\{X \ge \theta\}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Allora, per $p > 1$ e per q tali che $(1/p) + (1/q) = 1$, si ha

$$\|X\|_p \le q\, \|Y\|_p . \tag{6.3.4}$$

Dimostrazione. Com'è noto si ha

$$\mathbb{E}(X^p) = \int_0^{+\infty} p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}(X \ge t) \, \mathrm{d}t ;$$

d'altro canto, si ha

$$\int_0^{+\infty} p\, t^{p-1}\, \mathbb{P}(X \ge t) \, \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} p\, t^{p-2} \, \mathrm{d}t \int_{\{X \ge t\}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} .$$

Ricorrendo al teorema di Fubini, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} p\, t^{p-2}\ \mathrm{d}t \int\limits_{\{X\geq t\}} Y\ \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_0^{+\infty} p\, t^{p-2}\ \mathrm{d}t \int\limits_{\Omega} \mathbf{1}_{\{X\geq t\}}\, Y\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int\limits_{\Omega} Y(\omega)\ \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \int_0^{X(\omega)} p\, t^{p-2}\ \mathrm{d}t = \frac{p}{p-1} \int\limits_{\Omega} Y\, X^{p-1}\ \mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= q \int\limits_{\Omega} Y\, X^{p-1}\ \mathrm{d}\mathbb{P} = q\, \mathbb{E}\left(X^{p-1} Y\right) .
\end{aligned}$$

Basta ora applicare la diseguaglianza di Hölder per avere

$$\mathbb{E}(X^p) \leq q\, \mathbb{E}\left(X^{p-1}Y\right) \leq q\, \|Y\|_p\, \|X^{p-1}\|_q . \tag{6.3.5}$$

Si supponga dapprima che X appartenga a L^p; allora

$$\|X^{p-1}\|_q = \mathbb{E}^{1/q}(X^p) ,$$

sicché la (6.3.5) implica l'asserto. Se, invece, X non appartiene a L^p, vi appartiene senz'altro, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X \wedge n$, sicché si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\|X \wedge n\|_p \leq q\, \|Y\|_p ;$$

La (6.3.4) segue ora dal Teorema di convergenza monotona. □

Corollario 6.3.2. *Siano $p > 1$ e q tali che $(1/p) + (1/q) = 1$. Sia (X_n) una sotto–martingala positiva e limitata uniformemente in L^p,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p \leq H < +\infty .$$

Allora, se $X^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, X^* appartiene a L^p e vale la diseguaglianza

$$\|X^*\|_p \leq\ q \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisca $X_n^* := \sup_{k\leq n} X_n$; segue allora dal Lemma 6.3.1 e dalla (6.3.3) che

$$\|X_n^*\|_p \leq q\, \|X_n\|_p \leq q \sup_{k\in\mathbb{N}} \|X_k\|_p .$$

Basta ora far tendere n a $+\infty$ ed applicare il teorema di convergenza monotona. □

6.4 Integrabilità uniforme

Il concetto di *integrabilità uniforme*, o, come anche lo si chiama nella letteratura scientifica italiana, di *equi–integrabilità*, è fondamentale nella teoria delle martingale. Per questa ragione lo trattiamo qui benché sia un argomento appartenente piuttosto alla teoria dell'integrazione.

Definizione 6.4.1. Sia $\{X_\iota\}_{\iota\in I}$ un'arbitraria famiglia di v.a reali definite sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La famiglia (X_ι) si dice *uniformemente integrabile* o *equi–integrabile* se

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{\iota\in I} \int\limits_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X_\iota| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \,,$$

vale a dire se le speranze $\mathbb{E}\left(|X_\iota| \, \mathbf{1}_{\{|X_\iota|\geq c\}}\right)$ tendono uniformemente a zero al tendere di c a $+\infty$. $\diamond$

È immediato controllare che, se $\{X_\iota\}$ è uniformemente integrabile, ogni v.a. X_ι è in L^1. Se $|X_\iota| \leq Y$ per ogni $\iota \in I$ con $Y \in L^1$, allora $\{X_\iota\}$ è uniformemente integrabile; infatti

$$\int\limits_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X_\iota| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int\limits_{\{|X_\iota|\geq c\}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,.$$

Ora

$$\mathbb{P}(|X_\iota| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_\iota|)}{c} \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{c} \,,$$

che tende uniformemente a zero. In particolare, se le X_n sono uniformemente limitate, $\{X_n\}$ è uniformemente integrabile.

Lemma 6.4.1. *Nello spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sia* X *in* L^1 *e sia* $(\mathcal{F}_\iota)_{\iota\in I}$ *un'arbitraria famiglia di sottotribú di* $\mathcal{F}$. *Allora è uniformemente integrabile la famiglia* $(X_\iota := \mathbb{E}_\iota(X) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\iota))_{\iota\in I}$.

Dimostrazione. Per ogni $\iota \in I$ si ha

$$\mathbb{E}\left(|X_\iota|\right) = \mathbb{E}\left(|\mathbb{E}_\iota(X)|\right) = \mathbb{E}(|X|) < +\infty \,,$$

sicché (X_ι) è in L^1. Inoltre

$$\int_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X_\iota| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \int_{\{|X_\iota|\geq c\}} \mathbb{E}_\iota(|X|) \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,.$$

Poiché X_ι è integrabile, l'insieme $\{|X_\iota| \geq c\}$ tende ad un insieme di probabilità nulla al tendere di c a $+\infty$, sicché

$$\lim_{c\to+\infty} \sup_{\iota\in I} \int_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X_\iota| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \lim_{c\to+\infty} \int_{\{|X_\iota|\geq c\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 0 \,,$$

da cui l'asserto. $\square$

Se la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è uniformemente integrabile, è anche uniformemente limitata in L^1, cioè $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty$; infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n abbastanza grande,

$$\|X_n\|_1 = \mathbb{E}(|X_n|) = \int\limits_{\{|X_n|<c\}} \cdots + \int\limits_{\{|X_n|\geq c\}} |X_n| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq c + \varepsilon \,.$$

Il viceversa non è necessariamente vero come dimostrato dal seguente

Esempio 6.4.1. Se $X_n := n\,\mathbf{1}_{[0,1/n]}$, la successione (X_n) è uniformemente limitata in L^1, ma non uniformemente integrabile rispetto alla restrizione λ della misura di Lebesgue ai boreliani di $[0,1]$. Infatti, $\mathbb{E}(X_n) = 1$ per ogni n, ma, per $n > c$,

$$\int\limits_{\{|X_n|\geq c\}} |X_n| \, \mathrm{d}\lambda = n\,\lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right]\right) = 1\,.$$

■

È utile il seguente criterio.

Teorema 6.4.1. *Per una famiglia $(X_t)_{t\in D}$ di v.a. sono equivalenti le proprietà:*

(a) *(X_t) è uniformemente integrabile;*

(b) *(X_t) è uniformemente limitata in L^1 e, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, per ogni evento A con $\mathbb{P}(A) < \delta$, sia*

$$\sup_{t\in D} \int\limits_A |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Si è già visto che (X_t) è uniformemente limitata in L^1.

$$\begin{aligned}\int\limits_A |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int\limits_{A\cap\{|X_t|\geq c\}} \dots + \int\limits_{A\cap\{|X_t|<c\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq c\,\mathbb{P}(A) + \int\limits_{A\cap\{|X_t|\geq c\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P}\,.\end{aligned}$$

Per c sufficientemente grande l'ultimo integrale è minore di $\varepsilon/2$, sicché basta ora prendere $\delta = \varepsilon/(2c)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Per la diseguaglianza di Markov si ha che, per ogni $c > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_t| \geq c) \leq \frac{1}{c}\,\mathbb{E}(|X_t|) \leq \frac{H}{c}$$

ove $H := \sup_{t\in D} \mathbb{E}(|X_t|) = \sup_{t\in D} \|X_t\|_1$. Pertanto, se $c > H/\delta$, si ha

$$\sup_{t\in D} \int\limits_{\{|X_t|\geq c\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon$$

onde l'asserto. □

La proprietà espressa dalla (b) del Teorema 6.4.1 è detta di *continuità uniforme*.

Il concetto di integrabilità uniforme consente di chiarire del tutto i rapporti tra le convergenze in L^p e in probabilità per una successione di (X_n) di v.a. definite in uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Teorema 6.4.2. *Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e X rispettivamente una successione e una v.a. di L^p con $p \in [1, +\infty[$. Sono equivalenti le proprietà:*

(a) $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ *in* L^p*;*

(b) $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ *in probabilità e* $(|X_n|^p)$ *è uniformemente integrabile.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Poiché si sa che la convergenza in L^p implica quella in probabilità, basta mostrare che $(|X_n|^p)$ è uniformemente integrabile. Poiché

$$\|X_n\|_p \leq \|X\|_p + \|X_n - X\|_p\,,$$

la successione (X_n) è uniformemente limitata in L^p o, equivalentemente, la successione $(|X_n|^p)$ è uniformemente limitata in L^1. Fissato $\varepsilon > 0$, si prenda $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ tale che $\mathbb{P}(A) < \delta_1$ implichi

$$\int_A |X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \frac{\varepsilon}{2^p}\,;$$

tale δ_1 esiste perché $A \mapsto \mathbb{E}(|X|^p \,\mathbf{1}_A)$ è una misura finita su $\mathcal{F}$ che è assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$. Esiste inoltre $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che sia

$$\|X_n - X\|_p^p < \frac{\varepsilon}{2^p}\,,$$

per ogni $n \geq n_0$. Poiché vale la diseguaglianza

$$|X_n|^p \leq 2^{p-1}\,|X - X_n|^p + 2^{p-1}\,|X|^p\,, \tag{6.4.1}$$

si ha, se $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int_A |X_n|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} &\leq 2^{p-1} \int_A |X_n - X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} + 2^{p-1} \int_A |X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &< 2^{p-1}\,\frac{\varepsilon}{2^p} + 2^{p-1}\,\frac{\varepsilon}{2^p} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Analogamente alla (6.4.1) si ha

$$|X - X_n|^p \leq 2^{p-1}\,|X_n|^p + 2^{p-1}\,|X|^p\,;$$

si può cosí concludere che, se $(|X_n|^p)$ è uniformemente integrabile se, e solo se, tale è anche la successione $(|X_n - X|^p)$. Fissato $\varepsilon \in\,]0,1[$, si scelga $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in modo che, se $\mathbb{P}(A) < \delta$, sia

$$\int_A |X_n - X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Preso $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo che $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) < \delta$, per ogni $n \geq n_0$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_n - X|^p) &= \int_{\{|X_n - X| \leq \varepsilon\}} \ldots + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |X_n - X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \varepsilon^p + \int_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |X_n - X|^p \,\mathrm{d}\mathbb{P} < \varepsilon^p + \varepsilon\,,\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. □

Si noti che il Teorema 2.2.9 che abbiamo dimostrato direttamente è ora un semplice corollario dell'ultimo risultato. Infatti, se $|X_n| \le Y$ con $Y \in L^p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, la successione $(|X_n|^p)$ è uniformemente integrabile per il Lemma 6.4.1.

Definizione 6.4.2. Si dice che una martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un *ultimo elemento* se esiste una v.a. $X_\infty \in L^1$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}_n(X_\infty) = X_n$. ◇

Sia $\mathcal{F}_\infty$ è la tribú generata dalla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vale a dire

$$\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right);$$

si ponga $Y := \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\infty)$. Dunque, si ha anche $\mathbb{E}_n(Y) = X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, sicché non è restrittivo supporre, come faremo sempre nel seguito, che l'ultimo elemento X_∞ sia misurabile rispetto alla tribú $\mathcal{F}_\infty$. Si noti che, con tale convenzione, una martingala ha ultimo elemento se, e solo se, è ereditaria.

Per una martingala con un ultimo elemento si può usare la scrittura

$$(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}, \quad \text{oppure} \quad (X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{Z}}_+},$$

ove $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e $\overline{\mathbb{Z}}_+ := \mathbf{z}_+ \cup \{+\infty\}$ estendendo alla coppia di indici k e $+\infty$ la proprietà caratteristica delle martingale, $\mathbb{E}_k(X_n) = X_k$ se $k < n$.

La stessa definizione vale anche per le sotto– (o le super–)martingale; si dice che una sottomartingala ha un ultimo elemento X_∞, e si scriverà $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$, se $\mathbb{E}_k(X_n) \ge X_k$, per ogni coppia di indici k e n, con $k < n \in \overline{\mathbb{N}}$. Anche in questo caso si può supporre che l'ultimo elemento X_∞ sia misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\infty$.

Nella letteratura le martingale o le sottomartingale con un ultimo elemento si dicono anche *chiudibili (a destra)* o *chiuse (a destra).*

Teorema 6.4.3. *Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una martingala con ultimo elemento X_∞ e T un tempo d'arresto q.c. finito. Allora $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.*

Dimostrazione. Poiché T è q.c. finito, è

$$\mathbb{P}\left(\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \{T = n\}\right) = 0\,.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T) &= \int X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \int\limits_{\{T=n\}} X_T \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \int\limits_{\{T=n\}} X_n \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}_+} \int\limits_{\{T=n\}} \mathbb{E}_n(X_\infty) \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{N} \int\limits_{\{T=n\}} X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \int X_\infty \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \mathbb{E}(X_\infty)\,.
\end{aligned}$$

In particolare, per il tempo d'arresto $T = 0$ è $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_\infty)$. □

Teorema 6.4.4. *Per una martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$ sono equivalenti le proprietà:*

(a) $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *è ereditaria;*

(b) (X_n) *è uniformemente integrabile.*

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Si supponga che $(X_n, \mathcal{F}_n)$ sia ereditaria; esiste perciò una v.a. $X \in L^1(\mathcal{F})$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, sia $X_n = \mathbb{E}_t(X)$; il Lemma 6.4.1 dà ora l'asserto.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si supponga che $(X_n, \mathcal{F}_n)$ sia uniformemente integrabile. Si introduca l'algebra $\mathcal{A} := \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_n$ e si definisca una funzione $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ mediante

$$\nu(A) := \int_A X_k \, \mathrm{d}\mathbb{P} \quad \text{se } A \in \mathcal{F}_k.$$

Si osservi che, poiché $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, per ogni $n \geq k$ si ha, se $A \in \mathcal{F}_k$,

$$\nu(A) = \int_A X_k \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,,$$

onde

$$\nu(A) = \lim_{n \to \infty} \int_A X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,;$$

ν è cosí ben definita ed è, per definizione, una misura finitamente additiva. Ma (X_n) è uniformemente integrabile, sicché ricorrendo ai Teoremi 6.4.1 e 1.5.1, si ha che ν è effettivamente una misura finita che è assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$. Basta ora applicare il teorema di Radon–Nikodym e porre Y_∞ eguale alla densità $d\nu/d\,\mathbb{P}$ di ν rispetto a $\mathbb{P}$ e $X_\infty := \mathbb{E}\,(Y_\infty \mid \mathcal{F}_\infty)$. Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$ e per ogni $A \in \mathcal{F}_n$, è

$$\int_A X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \nu(A) = \int_A X_\infty \, \mathrm{d}\mathbb{P} \,,$$

cioè $X_n = \mathbb{E}_n(X_\infty)$. □

6.5 Convergenza delle martingale

Considereremo dapprima la convergenza in L^p delle martingale. Questo studio, anche alla luce delle applicazioni che ce ne ripromettiamo, si può condurre per martingale $\{X_t : t \in D\}$ nelle quali l'insieme D degli indici è un insieme diretto.

Il seguente risultato di natura tecnica sarà utile nel seguito.

Lemma 6.5.1. *Per ogni $p \in [1, +\infty[$ il sottoinsieme V_p di L^p definito da*

$$V_p := \bigcup_{t \in D} L^p(\mathcal{F}_t)$$

è denso in $L^p(\mathcal{F}_\infty)$, ove

$$\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in D} \mathcal{F}_t$$

è la tribú generata dall'algebra $\mathcal{A} := \cup_{t \in D} \mathcal{F}_t$.

Dimostrazione. Basta mostrare che possono essere approssimate mediante elementi di V_p le funzioni indicatrici degli insiemi A di $\mathcal{F}_\infty$. Sia $\mathcal{C}_p$ la classe di sottoinsiemi misurabili di $\mathcal{F}_\infty$ le cui funzioni indicatrici possono essere approssimate mediante funzioni di V_p,

$$\mathcal{C}_p := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall \varepsilon > 0 \ \exists Y \in V_p \quad \|\mathbf{1}_A - Y\|_p < \varepsilon\} .$$

è immediato riconoscere che $\mathcal{C}_p$ include l'algebra $\mathcal{A}$ (gli insiemi di tale algebra hanno indicatrici che sono in V_p).

Inoltre, $\mathcal{C}_p$ è una classe monotona. Si supponga che sia $A_n \in \mathcal{C}_p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $A_n \uparrow A$. Dato $\varepsilon > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste $Y_n \in V_p$ tale che $\|\mathbf{1}_{A_n} - Y_n\|_1 < \varepsilon/2$. Si può usare il teorema di convergenza dominata per trovare un indice $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che $\|\mathbf{1}_{A_n} - \mathbf{1}_A\|_1 < \varepsilon/2$ per ogni $n \geq n_0$. Dunque, se $n \geq n_0$, è

$$\|\mathbf{1}_A - Y_n\|_1 \leq \|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_n}\|_1 + \|\mathbf{1}_{A_n} - Y_n\|_1 < \varepsilon.$$

Perciò A appartiene a $\mathcal{C}_p$. Analogamente si procede se $A_n \downarrow A$.

$\mathcal{C}_p$ è cosí una classe monotona che contiene l'algebra $\mathcal{A}$; per il teorema della classe monotona, si ha $\mathcal{C}_p = \mathcal{F}_\infty$. □

Teorema 6.5.1. *Sia X una v.a. di L^p con $p \in [1, +\infty[$ e si consideri la martingala ereditaria $X_t := \mathbb{E}_t(X)$ $(t \in D)$. Allora $\{X_t\}$ converge in L^p alla v.a.*

$$X_\infty := \mathbb{E}_\infty(X) = \mathbb{E}\left(X \mid \mathcal{F}_\infty\right) ,$$

ove $\mathcal{F}_\infty$ è la tribú generata dall'algebra $\cup_{t \in D} \mathcal{F}_t$,

$$\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \in D} \mathcal{F}_t .$$

Dimostrazione. Si supponga che esista un indice $s \in D$ per il quale Y appartenga a $L^p(\mathcal{F}_s)$; si ha allora, per ogni $t \geq s$, $\mathbb{E}_t(Y) = Y$. Perciò,

$$\forall\, Y \in \bigcup_{t \in D} L^p\left(\mathcal{F}_t\right) \qquad \mathbb{E}_t(Y) \xrightarrow[t \to +\infty]{L^p} Y = \mathbb{E}_\infty(Y).$$

Sia ora X in $L^p\left(\mathcal{F}_\infty\right)$; in virtú del lemma precedente, per ogni $\varepsilon > 0$, si può prendere $Y_\varepsilon \in \cup_{t \in D} L^p(\mathcal{F}_t)$ con $\|X - Y_\varepsilon\|_p < \varepsilon$. Poiché $\mathbb{E}_t$ è una contrazione su $L^p(\mathcal{F})$,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}_t(X) - X\|_p &\leq \|\mathbb{E}_t(X) - \mathbb{E}_t(Y_\varepsilon)\|_p + \|\mathbb{E}_t(Y_\varepsilon) - Y_\varepsilon\|_p + \|Y_\varepsilon - X\|_p \\
&\leq 2\,\|X - Y_\varepsilon\|_p + \|\mathbb{E}_t(Y_\varepsilon) - Y_\varepsilon\|_p \\
&< 2\,\varepsilon + \|\mathbb{E}_t(Y_\varepsilon) - Y_\varepsilon\|_p .
\end{aligned}$$

Basta, dunque, applicare la prima parte della dimostrazione per avere, per ogni X in $L^p\left(\mathcal{F}_\infty\right)$,

$$\mathbb{E}_t(X) \xrightarrow[t \to +\infty]{L^p} X = \mathbb{E}_\infty(X) .$$

Infine, per ogni $X \in L^p(\mathcal{F})$, si ha

$$X_t = \mathbb{E}_t(X) = \mathbb{E}_t\, \mathbb{E}_\infty(X) \xrightarrow[t \to +\infty]{L^p} \mathbb{E}_\infty(X) ,$$

cioè l'asserto. □

Nel trattare di convergenza in L^p di martingale occorre distinguere i due casi $p = 1$ e $p \in]1, +\infty[$. Tratteremo prima il caso $p > 1$.

Teorema 6.5.2. *Sia $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in D}$ una martingala con $X_t \in L^p(\mathcal{F}_t)$ $(p > 1)$ per ogni $t \in D$. Sono allora equivalenti le condizioni:*

(a) *esiste una v.a. $X \in L^p$ tale che $X_t \to X$ in L^p;*

(b) *esiste una v.a. $X \in L^p(\mathcal{F}_\infty)$ tale che $X_t = \mathbb{E}_t(X)$ per ogni $t \in D$;*

(c) $\sup_{t\in D} \|X_t\|_p < +\infty$.

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Poiché X è misurabile rispetto alla tribú $\mathcal{F}_\infty$, si ha $X \in L^p(\mathcal{F}_\infty)$. Se $A \in \mathcal{F}_s$, si ha, per ogni $n > k$,

$$\int_A X_s \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X_t \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

e, di qui,

$$\int_A X_s \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{t\to+\infty} \int_A X_t \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$

vale a dire

$$\forall\, n \in D \qquad X_t = \mathbb{E}_t(X)\,.$$

L'implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a) è l'oggetto del teorema precedente.

(a) $\Longrightarrow$ (c) Il Teorema 6.4.2 implica che $(|X_t|^p)$ è uniformemente integrabile e il Teorema 6.4.1 che

$$\sup_{n\in D} \|X_t\|_p < +\infty\,.$$

(c) $\Longrightarrow$ (b) La martingala $(X_t, \mathcal{F}_t)$ è uniformemente integrabile. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, si ponga

$$H := \sup_{t\in D} \|X_t\|_p\,, \quad \text{e} \quad \alpha := \frac{H^p}{\varepsilon}\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to+\infty} x^{p-1} = +\infty\,,$$

esiste $c > 0$ tale che $x^{p-1} \geq \alpha$ se $x \geq c$. Perciò,

$$\int_{\{|X_t|\geq c\}} |X_t| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{|X_t|\geq c\}} |X_t|^p \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{H^p}{\alpha} = \varepsilon\,,$$

onde l'asserto. Ora il Teorema 6.4.4 assicura che esiste una v.a. X tale che $X_t = \mathbb{E}_t(X)$ per ogni $t \in D$. □

La condizione (c) dell'ultimo teorema è necessaria e sufficiente per la convergenza in L^p con $p \in]1, +\infty[$. Tuttavia, l'analoga condizione per L^1,

$$\sup_{t\in D} \|X_t\|_1 < +\infty\,,$$

non basta ad assicurare la convergenza in L^1, come mostra il seguente

Esempio 6.5.1. Sia (Y_n) una successione di v.a. indipendenti, isonome e positive di L^1 con

$$\mathbb{E}(Y_n) = 1 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{P}(Y_n = 1) < 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $X_n := \prod_{j=1}^{n} Y_j$, (X_n) è una martingala moltiplicativa positiva (si ricordi l'Esempio 6.1.4) con $\mathbb{E}(X_n) = 1$. D'altro canto

$$\begin{aligned}\|X_{n+1} - X_n\|_1 &= \mathbb{E}\left(|X_{n+1} - X_n|\right) \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right) |Y_{n+1} - 1|\right] \\ &= \mathbb{E}\left(|Y_{n+1} - 1|\right) = \mathbb{E}\left(|Y_1 - 1|\right) \neq 0\,,\end{aligned}$$

sicché (X_n) non converge in L^1. Si vedrà nel seguito, Teorema 6.5.5, che X_n converge 0 q.c.. ■

Per la convergenza delle martingale in L^1 vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è identica a quella del Teorema 6.5.2.

Teorema 6.5.3. *Per una martingala $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in D}$ con $X_t \in L^1(\mathcal{F}_t)$ $(p > 1)$ per ogni $t \in D$ sono equivalenti le condizioni:*

(a) *esiste una v.a. $X \in L^1$ tale che $X_t \to X$ in L^1;*

(b) *esiste una v.a. $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$ tale che $X_t = \mathbb{E}_t(X)$ per ogni $t \in D$;*

(c') *$(X_t, \mathcal{F}_t)$ è uniformemente integrabile.*

Rimandiamo al seguito lo studio della convergenza in L^p con $p \in [1, +\infty[$ delle sottomartingale.

Affrontiamo ora lo studio della convergenza q.c. delle martingale. Tale studio si conduce con maggior semplicità nel caso delle martingale per le quali l'insieme degli indici è $\mathbb{Z}_+$ o $\mathbb{N}$.

Si è visto nel Capitolo 2 che, in generale, non esistono rapporti tra la convergenza quasi certa e quella in L^1 di una successione di v.a.. Se però la successione in questione forma una martingala la situazione è differente, come evidenziato dal prossimo risultato.

Teorema 6.5.4. *Ogni martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$ che converge in L^1 converge anche quasi certamente.*

Dimostrazione. Si supponga che $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ in L^1. è facile estrarre da $\mathbb{N}$ una successione di naturali $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$, con $n(k) < n(k+1)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, in modo che sia convergente la serie

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\|X_{n(k)} - X\|_1\,;$$

basta prendere, come $n(k)$, il piú piccolo naturale tale che $\|X_{n(k)} - X\|_1 \leq 1/k^3$.

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\left(X_n - X_{n(k)}\right)_{n\geq n(k)}$ è una martingala alla quale si può applicare la diseguaglianza massimale (6.3.2), ottenendo, per ogni $s \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\geq n\geq n(k)} \left|X_n - X_{n(k)}\right| > \frac{1}{k}\right) \leq k\,\|X_s - X_{n(k)}\|_1\,.$$

Facendo tendere s a $+\infty$, si ha

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\geq n(k)}\left|X_n - X_{n(k)}\right| > \frac{1}{k}\right) \leq k\,\|X - X_{n(k)}\|_1\,.$$

Allora, il primo lemma di Borel–Cantelli dà

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to+\infty}\left\{\sup_{n\geq n(k)}\left|X_n - X_{n(k)}\right| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$

vale a dire

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{k\to+\infty}\left\{\sup_{n\geq n(k)}\left|X_n - X_{n(k)}\right| \leq \frac{1}{k}\right\}\right) = 1\,,$$

sicché

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{n\geq n(k)}\left|X_n - X_{n(k)}\right| = 0 \qquad \text{q.c.}\,.$$

In altre parole, esiste un insieme $N \in \mathcal{F}$ con $\mathbb{P}(N) = 0$ tale che $(X_n(\omega))$ sia una successione di Cauchy per ogni $\omega \in N^c$. □

Il seguente corollario è spesso noto come teorema di Lévy.

Corollario 6.5.1. *Ogni martingala uniformemente integrabile (X_n) converge q.c. e in L^1 a una v.a. $X_\infty \in L^1$ tale che $X_n = \mathbb{E}_n(X_\infty)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. X_∞ è l'ultimo elemento della martingala. In particolare, per una v.a. $X \in L^1$ è*

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{E}_n(X) = \mathbb{E}_\infty(X)\,.$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema 6.4.4 che esiste una v.a. $X_\infty \in L^1$, che si può pensare misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\infty$, tale che $X_n = \mathbb{E}_n(X_\infty)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La convergenza in L^1 segue dal Teorema 6.5.3, mentre la convergenza q.c. è ora conseguenza immediata del teorema precedente. □

Il risultato piú importante riguardante la convergenza q.c. delle martingale è dato dal seguente

Teorema 6.5.5. (Doob). *Se $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è una martingala limitata in L^1, vale a dire tale che*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|X_n\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty\,,$$

allora (X_n) converge q.c..

Dimostrazione. Sia $H > 0$ e si ponga

$$T := \min\{n \in \overline{\mathbb{Z}}_+ : |X_n| \geq H\}\,.$$

Si è visto nell'esempio 6.2.1 che la v.a. T cosí definita è un tempo d'arresto. Per il Teorema 6.3.2, X^T è una martingala. Vogliamo provare che è uniformemente integrabile. Si consideri la v.a.

$$Y := |X_T|\,\mathbf{1}_{\{T<+\infty\}} + H\,\mathbf{1}_{\{T=+\infty\}}\,.$$

Ovviamente, $|X_n^T| = |X_{T\wedge n}| \leq Y$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, sicché basta dimostrare che Y appartiene a L^1, vale a dire che $\mathbb{E}(Y) < +\infty$. Ora,

$$\int\limits_{\{T=+\infty\}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq H \,,$$

mentre, ricorrendo lemma di Fatou, si ha

$$\begin{aligned}\int\limits_{\{T<+\infty\}} Y \, \mathrm{d}\mathbb{P} &= \int\limits_{\{T<+\infty\}} |X_T| \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \int\limits_{\{T<+\infty\}} \lim_{n\to+\infty} |X_{T\wedge n}| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int\limits_{\{T<+\infty\}} |X_{T\wedge n}| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_{T\wedge n}\|_1 \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty \,.\end{aligned}$$

Dunque, Y appartiene a L^1 e X^T è uniformemente integrabile.

Nell'insieme $\{\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |X_n| < H\}$ si ha $X_n^T = X_{T\wedge n} = X_n$ e, quindi, (X_n) converge q.c. in virtú del Corollario 6.5.1.

La martingala (X_n), per quanto appena visto, converge nell'insieme

$$B := \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>0}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |X_n| < q \right\} .$$

Consideriamo il complementare di quest'ultimo insieme

$$B^c = \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>0}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |X_n| \geq q \right\} .$$

Poiché

$$\left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |X_n| \geq q \right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+} \left\{ \max_{j\leq n} |X_j| \geq q \right\} ,$$

e poiché la successione formata dagli insiemi $\{\max_{j\leq n} |X_j| \geq q\}$ è crescente, dalla diseguaglianza massimale (6.3.2) applicata alla sottomartingala $(|X_n|)$ e dal teorema di Beppo Levi, si ha, per ogni razionale $q > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^c) &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |X_n| \geq q \right) \leq \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\max_{j\leq n} |X_j| \geq q \right) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q} \mathbb{E}(|X_n|) = \frac{1}{q} \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathbb{E}(|X_n|) \,,\end{aligned}$$

che tende a zero al tendere di q a $+\infty$; perciò, $\mathbb{P}(B^c) = 0$, e quindi $\mathbb{P}(B) = 1$, vale a dire che la martingala (X_n) converge q.c.. $\square$

Si noti che, se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$ è una sottomartingala e, quindi, per il teorema (6.1.7), la successione $\{\mathbb{E}(|X_n|)\}$ è crescente, sicché la condizione del teorema precedente può essere posta nella forma equivalente

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(|X_n|) = \lim_{n\to+\infty} \|X_n\|_1 = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty\,.$$

La condizione $\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty$ assicura che la martingala (X_n) converga q.c. ma non necessariamente in L^1 (si rammenti l'esempio 6.5.1); è inoltre una condizione sufficiente, ma non necessaria per la convergenza q.c. di una martingala, come si vedrà negli esercizî.

Teorema 6.5.6. *Una martingala $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tale che i suoi incrementi siano maggiorati da una stessa variabile Z di L^1 converge quasi certamente nell'insieme $\{\sup_n X_n < +\infty\}$.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si può suppore che sia $X_0 = 0$. Basta provare che, per ogni $a > 0$, la martingala (X_n) converge quasi certamente nell'insieme $\{\sup_n X_n \le a\}$. Introdotto il tempo d'arresto

$$T := \inf\{n \in \overline{\mathbb{Z}}_+ : X_n > a\}\,,$$

si ha

$$\left\{\sup_n X_n \le a\right\} = \{T = +\infty\}\,.$$

Poiché $T \ge 1$, è, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n\wedge T} = \left(X_{n\wedge T} - X_{(n\wedge T)-1}\right) - X_{(n\wedge T)-1} \le Z + a\,.$$

La martingala arrestata X^T è, dunque, limitata in L^1 e, per il Teorema 6.5.5, quasi certamente convergente. Poiché nell'insieme $\{T = +\infty\}$ la martingala X^T è eguale a (X_n), anche quest'ultima converge quasi certamente. □

Come conseguenza del lemma di Wald, Lemma 6.2.1, si ha

Corollario 6.5.2. *Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una martingala con gli incrementi uniformemente maggiorati in modulo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|X_n - X_{n-1}| \le H$, α una costante tale che $\mathbb{E}(X_0) < \alpha$ e T il tempo d'arresto definito da*

$$T(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \ge \alpha\}\,.$$

Allora T non è in L^1.

Dimostrazione. Si ragioni per assurdo e si supponga che T sia integrabile. In virtú del Lemma 6.2.1, la martingala arrestata X^T è allora dominata in L^1, e pertanto, grazie al Teorema 6.5.5, convergente q.c. D'altronde da $\mathbb{E}(T) < +\infty$ scende $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$; inoltre vale l'inclusione

$$\{T < +\infty\} \subseteq \{X_T \ge \alpha\}\,,$$

sicché nei punti di $\{T < +\infty\}$ la successione $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ coincide definitivamente con X_T. La martingala X^T è allora chiusa da X_T e si ha

$$\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_T) \ge \alpha\,,$$

una contraddizione. □

Per estendere il teorema di convergenza alle sotto– e alle super–martingale ricorreremo alla decomposizione di Doob (Teorema 6.1.5).

Lemma 6.5.2. *Se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una sottomartingala limitata in L^1, tale cioè che sia*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty\,,$$

nella decomposizione di Doob $X_n = Y_n + A_n$ ($n \in \mathbb{Z}_+$), il processo crescente (A_n) è uniformemente integrabile e (Y_n) e (A_n) sono limitati in L^1. Se (X_n) è uniformemente integrabile, tali sono anche la martingala (Y_n) e il processo crescente (A_n).

Dimostrazione. Basta dimostrare che (A_n) è uniformemente integrabile, le rimanenti affermazioni essendo di verifica banale.

Si ha $A_1 = 0 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots$ e

$$\mathbb{E}(A_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(Y_0).$$

La successione (A_n) è crescente e quindi converge q.c. alla v.a.

$$Z = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n \geq 0.$$

Il teorema di convergenza monotona dà

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} A_n\right) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathbb{E}(A_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 + \|Y_0\|_1 < +\infty.$$

Si ha dunque $0 \leq A_n \leq Z \in L^1$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, sicché (A_n) è uniformemente integrabile. $\square$

Teorema 6.5.7. (a) *Una sotto– o super–martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$ che sia limitata in L^1,*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty,$$

converge q.c. a una v.a. X_∞.

(b) *Una sotto– o super–martingala $(X_n, \mathcal{F}_n)$ che sia uniformemente integrabile converge tanto q.c. quanto in L^1 a una v.a. X_∞.*

In entrambi i casi, se $\mathcal{F}_\infty$ è la tribú generata dall'algebra $\mathcal{A} = \cup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{F}_n$, allora $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \overline{\mathbb{Z}}_+}$ è una sotto– (rispettivamente, super–) martingala chiusa a destra.

Dimostrazione. Considereremo solo il caso di una sotto–martingala.

(a) Il processo crescente (A_n) che compare nella decomposizione di Doob converge q.c. alla v.a. $Z \in L^1$ come nella dimostrazione del lemma precedente. Inoltre, $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala limitata in L^1 che converge q.c., in virtú del Teorema 6.5.5; perciò, $X_n = Y_n + A_n$ converge q.c..

(b) Se (X_n) è uniformemente integrabile, tale è anche (Y_n), per il lemma precedente; quindi (Y_n), per il Corollario 6.5.1, converge q.c. e in L^1. Quanto al processo crescente (Z_n), esso converge a Z q.c. come nel lemma precedente e in L^1 per il teorema di convergenza monotona.

Per stabilire l'ultima affermazione, si prenda $n < k$; per ogni $A \in \mathcal{F}_n$, si ha

$$\int_A X_n \, d\mathbb{P} \leq \int_A X_k \, d\mathbb{P} .$$

Facendo tendere k a $+\infty$, la convergenza in L^1 dà

$$\int_A X_n \, d\mathbb{P} \leq \int_A X_\infty \, d\mathbb{P} ,$$

onde l'asserto. □

Diamo qui di seguito una condizione sufficiente affinché una sottomartingala sia uniformemente integrabile.

Teorema 6.5.8. *È uniformemente integrabile ogni sottomartingala positiva con ultimo elemento* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\int_{\{|X_n|\geq c\}} |X_n| \, d\mathbb{P} = \int_{\{X_n\geq c\}} X_n \, d\mathbb{P} \leq \int_{\{X_n\geq c\}} X_\infty \, d\mathbb{P};$$

la diseguaglianza di Markov dà ora

$$\mathbb{P}\,(X_n \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n)}{c} \leq \frac{\mathbb{E}(X_\infty)}{c} \xrightarrow[c\to+\infty]{} 0,$$

uniformemente in n. □

Ritorniamo ora alla convergenza in L^p delle sottomartingale.

Teorema 6.5.9. *Sia* $(X_n, \mathcal{F}_n)$ *una martingala, oppure una sottomartingala positiva, limitata in* L^p *con* $p \in\,]1, +\infty[$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p \leq H < +\infty;$$

allora (X_n) *è uniformemete integrabile e pertanto converge ad una v.a.* X_∞ *di* L^p *sia q.c. sia in* L^p.

Dimostrazione. Come nella dimostrazione dell'implicazione (c) $\Longrightarrow$ (b) del Teorema 6.5.2 si mostra che (X_n) è uniformemente integrabile. Perciò (X_n) converge q.c. a una v.a. X_∞ per il Teorema 6.5.5, se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala, per il Teorema 6.5.7 se è una sottomartingala positiva.

In entrambi i casi, $((|X_n|^p, \mathcal{F}_n))_{n\in\overline{\mathbb{N}}}$ è una sottomartingala positiva e, quindi, uniformemente integrabile. Basta ora applicare il Teorema 6.4.2 per avere la convergenza in L^p. □

6.6 Le martingale rovesciate

Definizione 6.6.1. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ una famiglia di sottotribú di $\mathcal{F}$ tale che

$$\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{F}_n \supset \dots .$$

La successione (X_n) di variabili aleatorie adattate a $(\mathcal{F}_n)$, cioè tali che X_n sia misurabile rispetto a $\mathcal{F}_n$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, si dice essere una *martingala rovesciata* se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1} .$$

Se invece si ha

$$\mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_{n+1}) \geq X_{n+1} ,$$

si parlerà di una *sotto–martingala rovesciata.* ◇

Anziché parlare di una (sotto–)martingala rovesciata, si potrebbe parlare di una (sotto–)martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{Z}_+}$. Nel seguito si porrà

$$\mathcal{F}_0 := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n .$$

Il seguente è un esempio notevole di martingala rovesciata.

Esempio 6.6.1. Si consideri una successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di v.a. indipendenti, isonome e di L^1 sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si ponga $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ e $Z_{-n} := S_n/n$ e si introducano le tribú

$$\mathcal{F}_{-n} := \mathcal{F}(S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots) = \mathcal{F}(S_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) .$$

La successione $(\mathcal{F}_{-n})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è decrescente e $(Z_{-n}, \mathcal{F}_{-n})$ è una martingala rovesciata. Si osservi, infatti, che, se $j, k \leq n+1$, allora

$$\mathbb{E}\left(X_j \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) = \mathbb{E}\left(X_k \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) .$$

Perciò

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}\left(X_k \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} \mathbb{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) = \frac{S_{n+1}}{n+1} .\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_{-n} \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{S_{n+1}}{n} \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{X_{n+1}}{n} \mid \mathcal{F}_{-n-1}\right) \\ &= \frac{S_{n+1}}{n} - \frac{S_{n+1}}{n\,(n+1)} = \frac{S_{n+1}}{n+1} = Z_{-n-1} .\end{aligned}$$

Ciò mostra che $(Z_{-n}, \mathcal{F}_{-n})$ è una martingala rovesciata. ■

Lemma 6.6.1. *Ogni martingala rovesciata è uniformemente integrabile.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione che, per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$, si ha $X_n = \mathbb{E}(X_0 \mid \mathcal{F}_n)$; l'asserto segue ora dal Lemma 6.4.1. □

Si può ora studiare la convergenza delle martingale rovesciate.

Teorema 6.6.1. *Per ogni martingala rovesciata $(X_n, \mathcal{F}_n)$ vi è una variabile aleatoria X_∞ di L^1 tale che il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X_\infty$$

esista q.c. e in L^1; inoltre $\mathbb{E}(X_1 \mid X_\infty) = X_\infty$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_\infty)$.

Dimostrazione. In virtú del Lemma 6.6.1 e del Teorema 6.5.3 la martingala data converge in L^1 ad una variabile aleatoria X_∞, e, poiché la convergenza in L^1 di una martingala implica la convergenza quasi certa allo stesso limite, Teorema 6.5.4, vi converge anche quasi certamente. Per il Corollario 6.5.1, X_∞ è l'ultimo elemento sicché vale $\mathbb{E}(X_1 \mid X_\infty) = X_\infty$. □

Teorema 6.6.2. *Per ogni v.a. $X \in L^1$ si ha*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_n(X) = \mathbb{E}_0(X)\,. \tag{6.6.1}$$

Dimostrazione. Si ponga $Z_{-n} := \mathbb{E}_n(X)$; ($Z_{-n}$ è una martingala rovesciata e per il Teorema 6.6.1 $(\mathbb{E}_n(X))$ converge a una v.a. Z di L^1. Poiché il limite di $\mathbb{E}_n(X)$ per $n \geq k$ è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, Z è misurabile rispetto a $\mathcal{F}_0$. L'integrabilità uniforme di $\mathbb{E}_n(X)$ dà, per ogni insieme

$$\begin{aligned}\int_A Z\,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \lim_{n\to+\infty}\int_A \mathbb{E}_n(X)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \lim_{n\to+\infty}\int_A \mathbb{E}_0\left[\mathbb{E}_n(X)\right]\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_A \mathbb{E}_0(X)\,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}_0(X)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,,\end{aligned}$$

sicché $Z = \mathbb{E}_0(X)$ q.o.. □

6.7 Applicazioni

In questa sezione sono raccolte alcune delle numerose applicazioni delle martingale.

6.7.1 Il teorema di Radon–Nikodym.

Le martingale costituiscono uno strumento potente sia per la semplificazione che apportano alla dimostrazione di molti risultati sia perché consentono nuovi frutttuosi punti di vista in molti problemi di probabilità. In questa sezione il Teorema di Radon–Nikodym (Teorema 1.14.3) è dimostrato mediante il ricorso alle martingale.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia ν una misura *finita* su $(\Omega, \mathcal{F})$ assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$, $\nu \ll \mathbb{P}$. Si consideri la famiglia Σ delle partizioni finite di Ω in insiemi misurabili. Se α e β sono in Σ, si dirà che $\alpha \leq \beta$ se β è un raffinamento di α; Σ è cosí un insieme diretto. Se $\alpha \in \Sigma$, si indichi con $\mathcal{F}_\alpha$ la tribú generata dalla partizione α. Si osservi che si ha $\mathcal{F} = \cup_{\alpha\in\Sigma}\mathcal{F}_\alpha$; infatti, un insieme $A \in \mathcal{F}$ appartiene alla partizione $\{A, A^c\}$ che genera la tribú $\mathcal{F}(A) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Per ogni partizione $\alpha \in \Sigma$, si definisca

$$X_\alpha := \sum_{A\in\Sigma} \varphi(A)\,\mathbf{1}_A,$$

ove

$$\varphi(A) := \begin{cases} \dfrac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)}, & \text{se } \mathbb{P}(A) > 0, \\ 0, & \text{se } \mathbb{P}(A) = 0. \end{cases}$$

La famiglia $(X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)$ è una martingala; sia $\alpha \leq \beta$, cioè sia β una partizione di Ω piú fine di α; allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\alpha\left(X_\beta\right) &= \sum_{A\in\beta} \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)}\,\mathbb{E}_\alpha(\mathbf{1}_A) = \sum_{A\in\beta} \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)} \sum_{B\in\alpha} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)} \int_B \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum_{A\in\beta} \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)} \sum_{B\in\alpha} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,\mathbf{1}_B = \sum_{B\in\alpha} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)} \sum_{A\in\beta} \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)}\,\mathbb{P}(A\cap B) \\
&= \sum_{B\in\alpha} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)} \sum \left\{ \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)}\,\mathbb{P}(A) : A \in \beta,\ A\cap B \neq \emptyset \right\} \\
&= \sum_{B\in\alpha} \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)}\,\nu(B) = X_\alpha\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, $(X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ è uniformente integrabile. Infatti, poiché è in $\mathcal{F}_\alpha$ l'insieme $\{|X_\alpha| \geq c\}$,

$$\begin{aligned}
\int_{\{|X_\alpha|\geq c\}} |X_\alpha| \,\mathrm{d}\mathbb{P} &= \int_{\{|X_\alpha|\geq c\}} X_\alpha \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{A\in\alpha} \frac{\nu(A)}{\mathbb{P}(A)} \int_{\{|X_\alpha|\geq c\}} \mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P} \\
&= \sum \left\{\nu(A) : A \in \alpha,\ A \cap \{X_\alpha \geq c\} \neq \emptyset\right\} = \nu\left(\{X_\alpha \geq c\}\right)\,.
\end{aligned}$$

D'altro canto,

$$\mathbb{P}\left(\{X_\alpha \geq c\}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(X_\alpha)}{c} = \frac{\nu(\Omega)}{c}\,;$$

di qui, e dall'essere ν assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$, segue l'integrabilità uniforme di (X_α). In virtú del Teorema 6.5.3, esiste $X \in L^1(\mathcal{F})$ tale che $X_\alpha = \mathbb{E}_\alpha(X)$. Sia ora $A \in \mathcal{F}$ e si consideri la partizione finita $\alpha = \{A, A^c\}$. Allora

$$\nu(A) = \int_A X_\alpha \,\mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \,\mathrm{d}\mathbb{P}\,, \tag{6.7.1}$$

che esprime il teorema di Radon–Nikodym nelle ipotesi considerate. Per riportarsi alle ipotesi del Teorema (3.10.7), nelle quali si considera una misura finita μ in luogo della misura di probabilità $\mathbb{P}$, basta applicare quanto precede alla misura di probabilità definita, per ogni $A \in \mathcal{F}$ da

$$\mathbb{P}(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}\,.$$

La 6.7.1 si scriverà ora

$$\nu(A) = \int_A \frac{X}{\mu(\Omega)} \, \mathrm{d}\mu \, .$$

La densità X che compare nella 6.7.1 è quindi risultata divisa per il fattore $\mu(\Omega)$.

6.7.2 Legge 0–1 di Kolmogorov

Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia data una successione (X_n) di v.a. indipendenti di L^1. Al solito sia $(\mathcal{F}_n)$ la filtrazione naturale e $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_n \mathcal{F}_n$ la tribú che essa genera. Si definiscano anche le tribú

$$\mathcal{T}_n := \mathcal{F}(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{T} := \bigcap_n \mathcal{T}_n \, .$$

La tribú $\mathcal{T}$ si dice *tribú terminale* di (X_n) e i suoi elementi *eventi terminali.* Esempî di eventi terminali sono dati da

$$A_1 := \left\{ \text{esiste } \lim_{n\to+\infty} X_n \right\} ,$$

$$A_2 := \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{ converge} \right\} ,$$

$$A_3 := \left\{ \text{esiste } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \right\} .$$

Teorema 6.7.1. (Legge 0–1 di Kolmogorov) *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti di L^1 e sia $\mathcal{T}$ la tribú terminale di (X_n). Per ogni evento terminale $A \in \mathcal{T}$ vale $\mathbb{P}(A) = 0$ oppure $\mathbb{P}(A) = 1$.*

Dimostrazione. Dato $A \in \mathcal{T}$ si ponga $X = \mathbf{1}_A$. Poiché A appartiene anche a $\mathcal{F}_\infty$, X risulta misurabile rispetto a $\mathcal{F}_\infty$, sicché segue dal teorema di convergenza di Lévy 6.5.1 che

$$X = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) \qquad \text{q.c.}$$

D'altro canto X è misurabile rispetto a $\mathcal{T}_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ sicché essa è indipendente da $\mathcal{F}_n$; perciò

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A) \qquad \text{q.c.}$$

Le ultime due relazioni implicano q.c. $\mathbb{P}(A) = X = \mathbf{1}_A$, che, essendo una funzione indicatrice, assume solo i valori 0 e 1. □

6.7.3 Convergenza di serie di v.a..

Diamo ora alcune applicazioni delle martingale allo studio delle successioni di v.a. indipendenti.

Teorema 6.7.2. *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^2. Si supponga che la successione sia uniformemente limitata in L^2, $\mathbb{E}(\sup_n X_n^2) < \infty$. Sono allora equivalenti le proprietà:*

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *converge q.c.;*

(b) $\sum_{n\in\mathbb{N}} V(X_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$.

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Si indichi, al solito, con $(\mathcal{F}_n)$ la filtrazione naturale

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \ldots, \mathbf{X}_n)\,.$$

Si sa che, se $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, $(S_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala. Poiché la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge q.c., esiste $\alpha > 0$ tale che

$$\mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| \le \alpha\right) > 0\,.$$

Si introduca il tempo d'arresto T cosí definito: $T := \inf\{n \in \mathbb{N} : |S_n| > \alpha\}$ se un tale n esiste, altrimenti $T := +\infty$ se $|S_n| \le \alpha$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In virtú del Teorema 6.3.2, S^T è ancora una martingala. Se $T > n$, è

$$S^T = S_n = S_{n-1} + (S_n - S_{n-1}) \le \alpha + (S_n - S_{n-1})\,.$$

Se, invece, T$\le n$, allora

$$S^T = S_{T-1} + (S_T - S_{T-1}) \le \alpha + (S_T - S_{T-1})\,.$$

In ogni caso, $S^T \le \alpha + Z$ ove

$$Z := \sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n - S_{n-1}| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|,$$

sicché, per ipotesi, Z è in L^2, $\mathbb{E}\left(Z^2\right) < +\infty$. Ma allora S^T è una martingala quadratica che converge q.c. e in L^2. Inoltre, per il Teorema 6.1.3,

$$\mathbb{E}\left(S^2_{T\wedge n}\right) = \sum_{j=1}^n \mathbb{E}\left[\left(S_{T\wedge n} - S_{T\wedge(n-1)}\right)^2\right]$$

ove, per comodità di notazione, si è posto $S_{T\wedge 0} := 0$. Poiché $S^T = (S_{T\wedge n})$ converge in L^2, la successione $\left(\mathbb{E}\left(S^2_{T\wedge n}\right)\right)$ ammette limite e dunque l'ultima serie converge. Ma $S_{T\wedge n} - S_{T\wedge(n-1)} = X_n\,\mathbf{1}_{\{T\ge n\}}$, sicché è convergente la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_n^2\,\mathbf{1}_{\{T\ge n\}}\right)\,,$$

e, di conseguenza, converge q.c. anche la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_n^2\,\mathbf{1}_{\{T\ge n\}} \mid X_1, \ldots, X_{n-1}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2\,\mathbf{1}_{\{T\ge n\}}\right)\,.$$

Infatti, se $Z_n \ge 0$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Z_n) < +\infty$, allora $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n\right) < +\infty$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ converge q.c.. Basta ora porre

$$Z_n := \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2\,\mathbf{1}_{\{T\ge n\}}\right)\,.$$

Poiché $\mathbf{1}_{\{T\geq n\}}$ è misurabile rispetto alla tribú $\mathcal{F}_{n-1}$, converge q.c. la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\{T\geq n\}}\, \mathbb{E}_{n-1}\left(X_n^2\right) .$$

Si scelga, infine, ω in $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |S_n| \leq \alpha\}$ e tale che l'ultima serie converga. Allora $T(\omega) = +\infty \geq n$, sicché $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n^2) < +\infty$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si ha, in virtú della diseguaglianza di Schwartz

$$\mathbb{E}(|S_n|) = \int \left|\sum_{k=1}^n X_k\right| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \left\{\int \left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}\right\}^{1/2} ;$$

ora, poiché le X_k sono indipendenti e centrate,

$$\int \left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P} = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2\right) + \sum_{j\neq k} \mathbb{E}(X_j)\, \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2\right) ,$$

sicché

$$\mathbb{E}(|S_n|) \leq \left\{\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left(X_k^2\right)\right\}^{1/2} .$$

Dunque, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|S_n|) < +\infty$ e la martingala (S_n) converge q.c.. □

Teorema 6.7.3. *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed uniformemente limitate di L^2. Sono allora equivalenti le proprietà:*

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ *converge q.c.;*

(b) *sono convergenti entrambe le serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n) \qquad e \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} V(X_n).$$

Dimostrazione. (a) $\Longrightarrow$ (b) Si costruisca la successione di v.a. indipendenti

$$(X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n, \ldots) ,$$

ove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, Y_n ha la stessa legge di X_n. Allora $\mathbb{E}(X_n - Y_n) = 0$ e

$$\mathbb{E}\left[(X_n - Y_n)^2\right] = V(X_n - Y_n) = V(X_n) + V(Y_n) = 2\, V(X_n).$$

Poiché $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge q.c., altrettanto fa $\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Perciò

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (X_n - Y_n)$$

converge q.c.; per il teorema precedente, $\sum_{n\in\mathbb{N}} V(X_n) < +\infty$ e, per lo stesso teorema, converge q.c. la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} (X_n - \mathbb{E}(X_n))$. Dunque, è q.c. convergente la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Per il teorema precedente, converge q.c. la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (X_n - \mathbb{E}(X_n))$$

e, poiché è convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(X_n)$, ne segue che converge q.c.

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n,$$

che stabilisce l'asserto. $\square$

Teorema 6.7.4. (delle tre serie) *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti. Se $\alpha > 0$, si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}$,*

$$Y_n^\alpha := X_n \, \mathbf{1}_{\{|X_n|\leq\alpha\}}.$$

(a) *Se la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge q.c., per ogni $\alpha > 0$, convergono le tre serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(X_n \neq Y_n^\alpha\right), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(Y_n^\alpha), \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} V\left(Y_n^\alpha\right). \tag{6.7.2}$$

(b) *Se esiste $\alpha > 0$ tale che le tre serie* (6.7.2) *convergano, allora converge q.c. la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

Dimostrazione. (a) Per ipotesi, $X_n \to 0$ q.c., sicché si ha definitivamente $X_n = Y_n^\alpha$ q.c. per ogni $\alpha > 0$. Poiché $X_n \neq Y_n^\alpha$ solo per un numero finito di indici, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(X_n \neq Y_n^\alpha\right)$ converge. Le rimanenti due serie convergono in virtú del teorema precedente.

(b) La convergenza delle due ultime serie in (6.7.2) assicura, per il Teorema 6.7.3, la convergenza q.c. della serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n^\alpha$. Ora, la convergenza di

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(X_n \neq Y_n^\alpha\right)$$

implica, in virtú del primo lemma di Borel–Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\liminf_{n\to+\infty}\{X_n \neq Y_n^\alpha\}\right) = 1;$$

in altre parole, si ha definitivamente $X_n = Y_n^\alpha$ q.c.; quindi, $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n$ converge q.c.. $\square$

6.7.4 Le LGN forti

Possiamo dimostrare la LGN forte di Kolmogorov 4.4.3 usando la convergenza delle martingale. Sarà utile premettere due lemmi.

Lemma 6.7.1. (Töplitz). *Sia (a_n) una succesione di numeri reali positivi, $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto*

$$b_n := \sum_{j=1}^{n} a_j \,,$$

si suppongano verificate le condizioni:

(a) $b_n > 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

(b) $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Allora se (x_n) è una successione di numeri reali convergente a x,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \,,$$

si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \, x_j = x \,.$$

Dimostrazione. Dalla convergenza della successione (x_n) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$ risulti $|x_n - x| < \varepsilon$; inoltre la successione $(|x_n - x|)$ essendo convergente è limitata, $|x_n - x| \leq H$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò, per $n > n_0$ si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_j \, x_j - x \right| &\leq \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \, |x_k - x| + \frac{1}{b_n} \sum_{k=n_0}^{n} a_k \, |x_k - x| \\
&\leq \frac{b_{n_0-1}}{b_n} \, H + \frac{\varepsilon}{b_n} \sum_{k=n_0}^{n} a_k \leq \varepsilon + \frac{b_{n_0-1}}{b_n} \, H \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

che dimostra l'asserto. □

Si noti che per $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha la convergenza nel senso di Cesàro.

Lemma 6.7.2. (Kronecker). *Siano (x_n) una successione di numeri reali e (b_n) una successione crescente di numeri strettamente positivi, tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty \,.$$

Allora la convergenza della serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x_n}{b_n} \tag{6.7.3}$$

implica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \,.$$

Dimostrazione. Sia eguale a s la somma della serie (6.7.3); allora, posto

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b_k} \,,$$

si ha $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. Ora

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n b_k\,(s_k - s_{k-1}) = b_n\,s_n - b_1\,s_0 - \sum_{k=1}^n s_{k-1}\,(b_k - b_{k-1})\ ,$$

ove si è posto $b_0 = s_0 := 0$. Perciò, se $a_{k-1} := b_k - b_{k-1}$ si ottiene

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n x_k = s_n - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_{k-1}\,s_{k-1}\,.$$

Si osservi che

$$\sum_{k=1}^n a_{k-1} = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) = b_n\,,$$

sicché il lemma di Töplitz dà

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_{k-1}\,s_{k-1} = s\,.$$

Infine

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n x_k = s - s = 0\,,$$

che conclude la dimostrazione. □

Teorema 6.7.5. *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^2; se è convergente la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{V(X_n)}{n^2} < +\infty\,, \tag{6.7.4}$$

allora la successione (X_n) obbedisce alla LGN forte.

Dimostrazione. Basta dimostrare che converge quasi certamente la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{X_n}{n}\,, \tag{6.7.5}$$

perché allora il Lemma di Kronecker assicura che sia

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k = \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}\ :$$

ma la convergenza (6.7.5) segue ora dal Teorema 6.7.2. □

Anche la LGN forte di Khinchin–Kolmogorov, Teorema 4.4.4, può essere dimostrata con l'ausilio delle martingale.

Teorema 6.7.6. *Una successione (X_n) di v.a. di L^1 indipendenti e isonome obbedisce alla LGN forte.*

Dimostrazione. Con la stessa notazione dell'Esempio 6.6.1, $(Z_{-n}, \mathcal{F}_{-n})$ è una martingala rovesciata. Per il Teorema 6.6.1 si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n} = \mathbb{E}\,(X_1 \mid \mathcal{F}_{-\infty}) \qquad \text{q.c. e in } L^1.$$

Ora $\mathcal{F}_{-\infty}$ è la tribú terminale $\mathcal{T}$, che per la legge 0–1 di Kolmogorov (Teorema 6.7.1) è banale, sicché $\mathbb{E}\,(X_1 \mid \mathcal{F}_{-\infty})$ è costante; da $\mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,(X_1 \mid \mathcal{F}_{-\infty})] = \mathbb{E}(X_1)$ segue l'asserto. □

6.7.5 Variabili scambiabili e il teorema di De Finetti

Definizione 6.7.1. Una successione (X_n) di variabili aleatorie sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si dice *scambiabile* se, per ogni permutazione π di $\mathbb{N}$ che lascia invariati tutti i numeri con l'eccezione di al piú un numero finito di essi, le successioni (X_n) e $(X_{\pi(n)})$ hanno la stessa legge, vale a dire, se per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni scelta di n numeri reali $t_1, \ldots, t_n$ si ha

$$\mathbb{P}(X_1 \le t_1, \ldots, X_n \le t_n) = \mathbb{P}(X_{\pi(1)} \le t_1, \ldots, X_{\pi(n)} \le t_n)\,.$$

$\diamond$

Si noti in particolare, che tutte le variabili di una successione scambiabile hanno la stessa legge. Inoltre una successione di variabili aleatorie indipendenti e isonome è scambiabile.

Esempio 6.7.1. Siano Θ, $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ v.a. definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e si supponga che, subordinatemente a Θ, le v.a. X_j siano indipendenti e Bernoulliane con

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_j = 1) = \Theta\,, \\ \mathbb{P}(X_j = 0) = 1 - \Theta\,. \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Variabili aleatorie siffatte esistono; per rendersene conto, siano Θ, Z_1, Z_2, ... v.a. indipendenti e Θ abbia un'arbitraria distribuzione in $[0, 1]$. Basta ora porre

$$X_j := \mathbf{1}_{\{Z_j \le \Theta\}}\,.$$

Si ha allora

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n \mid \Theta = \theta\right) = \theta^s\,(1-\theta)^{n-s}\,, \tag{6.7.6}$$

ove per $j = 1, \ldots, n$ è $u_j \in \{0, 1\}$ e $u_1 + \cdots + u_n = s$. Integrando l'ultima espressione si ottiene

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n\right) = \mathbb{E}\left(\Theta^s\,(1-\Theta)^{n-s}\right)\,, \tag{6.7.7}$$

sicché (X_n) è scambiabile. ■

Nell'esempio appena dato (X_n) è una mistura di processi di Bernoulli. Il seguente teorema di De Finetti afferma che *ogni* successione di v.a. che assumono i valori 0 e 1 è una mistura di processi di Bernoulli.

Teorema 6.7.7. *Se la successione (X_n) è scambiabile e se le v.a. X_n assumono valori in $\{0, 1\}$ esiste una v.a. Θ sullo steso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tale che valgano le* (6.7.6) *e* (6.7.7).

Dimostrazione. Si ponga, al solito $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$; per $k \le N$ si ha

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \sum{}' \mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n\right)\,,$$

ove la somma si esegue su tutte le sequenze $(u_1, \ldots, u_n)$ con $u_j \in \{0, 1\}$ e tali che $\sum_{j=1}^n u_j = k$. La scambiabilità assicura che siano eguali tutti i termini dell'ultima somma, e , poiché questa consiste di $\binom{n}{k}$ termini si ha

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \ldots, X_n = u_n \mid S_n = k\right) = \binom{n}{k}^{-1}\,.$$

Si supponga ora che sia $h \leq j \leq n$ e $\sum_{i=1}^{j} u_i = h \leq k \leq n$ e si sommi su u_{j+1}, …, u_n tali che $\sum_{i=j+1}^{n} u_i = k - h$ per ottenere

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \dots, X_k = u_k \mid S_n = k\right) &= \binom{n-j}{k-h}\binom{n}{k}^{-1} \\ &= \frac{D_{k,h}\,\mathrm{d}_{n-k,j-h}}{D_{n,j}} =: f_{j,s,n}\left(\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

Quanto precede continua a valere se si aggiungono altri condizionamenti, $S_{n+1} = u_{n+1}$, …, $S_{n+r} = u_{n+r}$. Perciò

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \dots, X_k = u_k \mid S_n, S_{n+1}, \dots, S_{n+r}\right) = f_{j,s,n}\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

Sia $\mathcal{S}_n := \mathcal{F}\left(S_n, S_{n+1}, \dots,\right)$ la tribú generata da S_n, S_{n+1}, …e sia $\mathcal{S} := \cap_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$ la tribú terminale. Si fissino j e u_1,… u_j e si supponga che sia $u_1 + \cdots + u_j = h$. Si faccia tendere r a $+\infty$; allora, per il Corollario 6.5.1 è

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \dots, X_k = u_k \mid \mathcal{S}_n\right) = f_{j,s,n}\left(\frac{S_n}{n}\right).$$

Si faccia ora tendere n a $+\infty$; per il Teorema 6.6.2 si ha

$$\mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \dots, X_k = u_k \mid \mathcal{S}\right) = \lim_{n\to+\infty} f_{j,s,n}\left(\frac{S_n}{n}\right) \quad \text{q.c.}$$

Tale limite vale fuori di un insieme trascurabile $N \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(N) = 0$.

Sia ora $\omega \in N^c$ e si supponga, se possibile, che la successione $(S_n(\omega)/n)$ abbia due punti d'accumulazione. Ora

$$\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}\right| = \begin{cases} \dfrac{S_n}{n\,(n+1)} \leq \dfrac{1}{n+1}, & \text{se } S_{n+1} = S_n, \\[2ex] \dfrac{S_n + n}{n\,(n+1)} \leq \dfrac{2}{n+1} & \text{se } S_{n+1} = S_n + 1. \end{cases}$$

In entrambi i casi la differenza considerata è minore di $2/n$; questo significa che i punti d'accumulazione ssono densi in un intervallo I. Ora, $\lim_{\nu\to+\infty} x_{n_\nu} = x$ implica $\lim_{\nu\to+\infty} f_{j,s,n_\nu}(x_{n_\nu}) = x^s\,(1-x)^{j-s}$, sicché ne seguirebbe che $x^s\,(1-x)^{j-s}$ è costante in quell'intervallo I, una contraddizione. Dunque la successione converge a un limite $\Theta(\omega)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \Theta(\omega).$$

Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_1 = u_1, \dots, X_k = u_j \mid \mathcal{S}\right) = \Theta^h\,(1-\Theta)^{j-h} \quad \text{q.c.}.$$

Prendendo la speranza condizionata rispetto alla tribú $\mathcal{F}(\Theta)$ generata da Θ si ottiene la (6.7.6). $\square$

6.7.6 La rovina del giocatore

Il problema della *rovina del giocatore* è trattato nella maggior parte dei corsi introduttivi di Probabilità. Qui ne dò una trattazione piú raffinata basata sui tempi d'arresto e sulle martingale.

Si torni alla passeggiata aleatoria con l'interpretazione di due giocatori, siano G_1 e G_2 che ad ogni istante giocano una partita nella quale il giocatore G_1 vince € 1 con probabilità p, mentre il giocatore G_2 vince € 1 con probabilità q. Si ha quindi una successione $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ di variabili indipendenti con $\mathbb{P}(X_n = +1) = p$ e $\mathbb{P}(X_n = -1) = q$. Se il giocatore G_1 dispone inizialmente di € a e se $0 < a < b$, si vuole sapere quale sia la probabilità che il giocatore arrivi ad avere € b prima di perdere tutto il suo capitale iniziale di € a; qui a e b sono numeri naturali. Posto, al solito, $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, si introducano i tempi d'arresto

$$T_b := \inf\{n : S_n = b\}, \qquad T_{-a} := \inf\{n : S_n = -a\}.$$

Si ponga, inoltre,

$$T := T_b \wedge T_{-a}, \qquad A := \{T_b < T_{-a}\}, \qquad B := \{T_{-a} < T_b\}.$$

Al tempo n il capitale del giocatore G_1 è $a+S_n$, mentre il capitale del suo antagonista G_2 è $b - S_n$. T_{-a} rappresenta il tempo necessario perché il giocatore G_1 perda gli a € che possedeva inizialmente (la "rovina"); l'evento A significa che G_1 guadagna b € prima di perdere quanto aveva in partenza, mentre B rappresenta la rovina, vale a dire la perdita del capitale iniziale.

Studieremo dapprima il caso simmetrico, supponendo che X_n possa assumere anche il valore 0.

Nel teorema che segue si supporrà che sia $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1)$ e inoltre che queste probabilità non siano necessariamente costanti:

$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1).$$

Teorema 6.7.8. *Si supponga che sia*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = +\infty.$$

Allora

(a) *quasi certamente la successione (S_n) non converge;*

(b) *i tempi d'arresto T_b e T_{-a} sono entrambi quasi certamente finiti, ma nessuno di essi è integrabile;*

(c) *è*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{a}{a+b} \qquad e \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{b}{a+b};$$

(d) *T è integrabile se $\inf_{n\in\mathbb{N}} p_n = p > 0$;*

(e) *se si ha $p_n = p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\mathbb{E}(T) = \frac{ab}{2p}.$$

Dimostrazione. (a) La successione (S_n) non converge quando in un numero infinito di termini si ha $|X_n| = 1$, sicché (S_n) non converge nell'insieme

$$\{\limsup_n \{|X_n| = 1\}\,.$$

Ma $\mathbb{P}(|X_n| = 1) = 2\,p_n$ e poiché la serie $\sum_n p_n$ per ipotesi diverge, il secondo lemma di Borel–Cantelli assicura che sia

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to+\infty}\{|X_n| = 1\}\right) = 1\,.$$

(b) È noto dall'Esempio 6.1.3 che (S_n) è una martingala; poiché i suoi incrementi sono limitati dalla costante 1, il Teorema 6.5.6 assicura che essa converge quasi certamente nell'insieme $\{\sup_n S_n < +\infty\}$ e, quindi, in particolare, in $\{T_b = +\infty\}$. Per quanto visto in (a) (S_n) converge in un insieme di probabilità nulla; dunque, $\mathbb{P}(T_b = +\infty) = 0$, sicché T_b è quasi certamente finito. Il Corollario 6.5.2 assicura che T_b non sia integrabile. Si procede in maniera simmetrica per T_{-a}.

(c) Poiché entrambi i tempi d'arresto T_{-a} e T_b sono quasi certamente finiti, tale è anche il tempo d'arresto $T = T_{-a} \wedge T_b$. La martingala arrestata S^T è limitata $-a \leq S^T \leq b$, sicché è uniformemente integrabile, e quindi, per il Teorema 6.4.4, ereditaria; pertanto converge per il Teorema 6.5.1. D'altro canto la successione $(S_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è definitivamente eguale a S_T nell'insieme $\{T < +\infty\}$ con $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$. Perciò

$$0 = \mathbb{E}(S_0) = \mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(b\,\mathbf{1}_A - a\,\mathbf{1}_B) = p\,\mathbb{P}(A) - a\,\mathbb{P}(B)\,.$$

Di qui e dall'ovvia condizione $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$ scende l'asserto.

(d) Alla luce dell'Esempio 6.3.1 il compensatore della sotto–martingala (S_n^2) è

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(S_n - S_{n-1})^2\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_n^2) = 2\sum_{j=1}^{n} p_n \geq 2\,np\,.$$

Poiché $(S_n - V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è una martingala nulla in 0, tale è anche $(S_n - V_n)^T$, sicché $\mathbb{E}(S^2_{n\wedge T}) = \mathbb{E}(V_{n\wedge T})$. Ora

$$2p\,\mathbb{E}(n\wedge T) \leq \mathbb{E}\left[V_{n\wedge T}\right] = \mathbb{E}\left[S^2_{n\wedge T}\right]\,.$$

Si faccia tendere n a $+\infty$; utilizzando il teorema di convergenza monotona a prima membro e quello di convergenza dominata secondo membro, si ottiene

$$2p\,\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}\left[S_T^2\right] = \mathbb{E}\left(b^2\,\mathbf{1}_A + a^2\,\mathbf{1}_B\right) = b^2\,\frac{a}{a+b} + a^2\,\frac{b}{a+b} = ab\,.$$

(e) Se si ha $p_n = p$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora nelle relazioni precedenti si ha eguaglianza. □

Esaminiamo ora il caso asimmetrico, nel quale supporremo che sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in \,]0,1[\qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1 - p\,.$$

Se $p > q$ sicché è favorito il giocatore G_1.

Teorema 6.7.9. *Nelle ipotesi dette si ha*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-a} - 1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-a} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{b}} \qquad e \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{b}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-a} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{b}},$$

$$\mathbb{P}(T_{-a} < +\infty) = \left(\frac{q}{p}\right)^{a},$$

$$\mathbb{E}(T_b) = \frac{b}{p-q}, \quad \mathbb{E}(T) = \frac{b\,\mathbb{P}(A) - a\,\mathbb{P}(B)}{p-q}.$$

Dimostrazione. In virtú della LGN forte di Khinchin–Kolmogorov (Teorema 4.4.4) la successione (S_n/n) converge quasi certamente a $p-q>0$, poiché $\mathbb{E}(X_n) = p-q$; pertanto (S_n) converge q.c. a $+\infty$. Di conseguenza, il tempo d'arresto T_b è q.c. finito e, *a fortiori*, è q.c. finito T. Dall'Esercizio 6.6 segue che

$$W_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

è una martingala. La martingala arrestata W^T è positiva e limitata superiormente da $(q/p)^{-a}$. Pertanto essa è uniformemente integrabile; di conseguenza, per i Teoremi 6.5.2 e 6.5.4, converge q.c.. Ora, si è visto sopra che $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$; d'altro canto, in $\{T < +\infty\}$ si ha definitivamente $W_{n\wedge T} = W_T$, sicché $W_n = \mathbb{E}_n(X_T)$. Quindi

$$\begin{aligned} 1 = \mathbb{E}(W_0) = \mathbb{E}(W_T) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{b} \mathbf{1}_A + \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} \mathbf{1}_B\right] \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^{b} \mathbb{P}(A) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-a} \mathbb{P}(B), \end{aligned}$$

relazione che insieme a quella ovvia $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B) = 1$ porta alle annunciate espressioni per $\mathbb{P}(A)$ e $\mathbb{P}(B)$.

Si osservi che la successione $(T_b)_{b\in\mathbb{Z}_+}$ è crescente e, poiché $b \le T_b$, si ha

$$\lim_{b\to+\infty} T_b = +\infty.$$

Perciò

$$\mathbb{P}(T_{-a} < +\infty) = \lim_{b\to+\infty} \mathbb{P}(T_{-a} < T_b) = \lim_{b\to+\infty} \frac{1 - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{b}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^{-a} - \left(\dfrac{q}{p}\right)^{b}} = \left(\frac{q}{p}\right)^{a}.$$

Alla luce dell'ultimo risultato l'evento $\{T_{-a} = +\infty\}$ non è trascurabile, di modo che il tempo d'arresto T_{-a} non è integrabile.

Per l'Esercizio 6.5 la successione (M_n) con $M_n = S_n - n\,(p-q)$ è una martingala, nulla in 0 e con gli incrementi limitati. La martingala arrestata M^{T_b} è nulla in 0, sicché

$$0 = \mathbb{E}\left(M_{n\wedge T_b}\right) = \mathbb{E}\left[S_{n\wedge T_b} - (p-q)\,(n\wedge T_b)\right],$$

donde
$$(p-q)\,\mathbb{E}(n \wedge T_b) = \mathbb{E}\left(S_{n\wedge T_b}\right) \leq b\,.$$
Si faccia tendere n a $+\infty$ per ottenere
$$\mathbb{E}(T_b) \leq \frac{b}{p-q}\,,$$
ciò che mostra che T_b, e, quindi, T è integrabile. Per il Lemma di Wald le due martinagle arrestate M^{T_b} e M^T sono entrambe dominate in L^1; esse sono allora ereditarie con $M_{n\wedge T_b} = \mathbb{E}_n\left(M_{T_b}\right)$ e $M_{n\wedge T} = \mathbb{E}_n\left(M_T\right)$. Da
$$\mathbb{E}\left(M_{T_b}\right) = \mathbb{E}(M_T) = 0\,,$$
scendono le relazioni
$$(p-q)\,\mathbb{E}(T_b) = \mathbb{E}(S_{T_b}) = b\,,$$
$$(p-q)\,\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S_T) = b\,\mathbb{P}(A) - a\,\mathbb{P}(B)\,,$$
dalle quali segue l'asserto. □

6.7.7 L'urna di Pólya

Si supponga di avere un'urna che inizialmente contiene una pallina bianca e una pallina colorata. A ogni istante si estrare una pallina e la si rimette nell'urna insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Sia X_n la variabile aleatoria che assume i valori 1 e 0 secondo che, all'n–esima estrazione, si sia estratta una pallina bianca o una pallina colorata. In questo caso S_n indica il numero di *nuove* palline bianche presenti nell'urna al tempo n; ovviamente, $S_0 = 0$. Il numero di palline bianche presenti nell'urna è $S_n + 1$.

Teorema 6.7.10. *La successione $(M_n)_{n\geq 0}$ definita da*
$$M_n := \frac{S_n + 1}{n+2} \tag{6.7.8}$$
è una martingala.

Dimostrazione. Come in una passeggiata aleatoria, il numero di palline bianche presenti al tempo $n+1$ dipende da S_n, ma non da S_j per $j < n$. Pertanto considerata la filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)$ si ha
$$\mathbb{E}_n(S_{n+1} + 1) = \mathbb{E}(S_{n+1} + 1 \mid S_n)\,.$$
Ora
$$\mathbb{E}(S_{n+1} + 1 \mid S_n = k) = (k+1)\,\frac{k+1}{n+2} + (n+2-k)\,\frac{k+1}{n+2} = (k+1)\,\frac{n+3}{n+2}\,,$$
sicché si può scrivere
$$\mathbb{E}_n(S_{n+1} + 1) = (S_n + 1)\,\frac{n+3}{n+2}\,.$$
Si è cosí dimostrato che $(M_n)_{n\geq 0}$ è una martingala. □

Teorema 6.7.11. *Per ogni $n \geq 0$ la variabile aleatoria S_n ha legge uniforme in* $\{0, \dots, n\}$.

Dimostrazione. Si proceda per induzione; l'affermazione è sicuramente vera per $n = 0$. Si supponga ora che sia vera per $n \in \mathbb{N}$, vale a dire che sia

$$\mathbb{P}(S_n = j) = \frac{1}{n+1} \,.$$

Per $n+1$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = j) &= \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1 \mid S_n = j-1\right) \mathbb{P}(S_n = j-1) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0 \mid S_n = j\right) \mathbb{P}(S_n = j) \\
&= \frac{1}{n+1} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 1 \mid S_n = j-1\right) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} \mathbb{P}\left(X_{n+1} = 0 \mid S_n = j\right) \\
&= \frac{1}{n+1} \frac{j}{n+2} + \frac{n-j+1}{n+2} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} \,,
\end{aligned}$$

che stabilisce l'asserto. □

Corollario 6.7.1. *La martingala del Teorema* 6.7.10 *converge quasi certamente a una variabile Z di legge uniforme in* $[0,1]$.

Dimostrazione. La martingala dell'eq. (6.7.8) è uniformemente limitata, e, a maggior ragione, uniformemente integrabile; in virtú dei Teoremi 6.5.3 e 6.5.4 essa converge quasi certamente a una variabile Z. Allora tende q.c. a Z anche (S_n/n). Per ogni funzione $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua il Teorema 6.7.11 assicura che si abbia

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi\left(\frac{j}{n}\right) .$$

Si faccia tendere n a $+\infty$ per ottenere

$$\mathbb{E}\left[\varphi(Z)\right] = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \int_0^1 \varphi(x) \, \mathrm{d}x \,;$$

l'arbitrarietà di φ dà ora l'asserto. □

6.8 Il teorema di Burkholder

Il seguente risultato è importante per sé; noi ce ne serviremo nella dimostrazione del successivo teorema di Burkholder.

Teorema 6.8.1. (Krickeberg). *Ogni martingala limitata in L^1 è la differenza di due martingale positive.*

Dimostrazione. Sia (X_n) una martingala limitata in L^1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia X_n^+ la parte positiva di X_n, $X_n^+ := X_n \vee 0$. Ovviamente si ha, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X_n \leq X_n^+$; di qui, per ogni $n \in \mathbb{N}$, scende

$$\mathbb{E}_n\left(X_{n+1}\right) \leq \mathbb{E}_n\left(X_{n+1}^+\right) \,,$$

e, ricordando il Teorema 6.1.4,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n\left(X_{n+k}^+\right) &= \mathbb{E}_n\left[\{\mathbb{E}_{n+k}\left(X_{n+k+1}\right)\}^+\right] \\ &\le \mathbb{E}_n\,\mathbb{E}_{m+k}\left(X_{n+k+1}^+\right) = \mathbb{E}_n\left(X_{n+k+1}^+\right).\end{aligned}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, la successione $\{\mathbb{E}_n\left(X_{n+k+1}^+\right) : k \in \mathbb{N}\}$ è dunque crescente e positiva; pertanto, al tendere di k a $+\infty$ essa converge ad una v.a. positiva X'_n che risulta inoltre essere integrabile, perché

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}_n\left(X_{n+k}^+\right)\right)] = \mathbb{E}\left(X_{n+k}^+\right) \le \mathbb{E}\left(|X_{n+k}|\right) < +\infty$$

in virtú dell'ipotesi.

Si ha perciò, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$X_n \le X_n^+ = \mathbb{E}_n\left(X_n^+\right) \le \mathbb{E}_n\left(X_{n+k}^+\right) \le X'_n\,.$$

La successione (X'_n) è una martingala; infatti, applicando il teorema di convergenza monotona all'ovvia eguaglianza

$$\mathbb{E}_n\left(X_{n+k}^+\right) = \mathbb{E}_n\left(\mathbb{E}_{n+1}\left(X_{n+1+(k-1)}^+\right)\right),$$

si ottiene facendo tendere k a $+\infty$,

$$X'_n = \mathbb{E}_n\left(X'_{n+1}\right),$$

sicché (X'_n) è una martingala positiva tale che $X'_n \ge X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si ponga ora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X''_n := X'_n - X_n$, che, per quanto appena detto, è positiva. Inoltre, come differenza di due martingale, (X''_n) è anch'essa una martingala. □

Il seguente teorema è una generalizzazione del Teorema 6.5.5.

Teorema 6.8.2. (Burkholder). *Se la martingala* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *è limitata in* L^1, *cioè*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \|X_n\|_1 < +\infty$$

e se $(U_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *è un processo prevedibile, allora la martingala trasformata*

$$((U \cdot X)_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$$

converge q.c. nell'insieme $\{\sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |U_n| < +\infty\}$.

Dimostrazione. In virtú del teorema precedente non è restrittivo supporre che la martingala (X_n) sia positiva. Si ponga allora $X_n^* := \max_{j\le n} X_j$ e, per $j \in \mathbb{N}$, $Z_j := X_j/X_j^*$; si definisca ora $Y_0 := 0$ e, per $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n := \sum_{j=1}^n \{Z_j - \mathbb{E}_{j-1}\left(Z_j\right)\}.$$

Controlliamo che $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala; non vi è nulla da verificare per quanto riguarda la misurabilità di Y_n rispetto a $\mathcal{F}_n$ e la sua integrabilità.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_n(Y_{n+1}) &= \mathbb{E}_n\left[\sum_{j=1}^{n+1}\{Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\{Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\} + \mathbb{E}_n(Z_{n+1}) - \mathbb{E}_n(Z_{n+1}) = Y_n\,.\end{aligned}$$

Si noti che, per ogni indice $j \in \mathbb{N}$, è

$$\mathbb{E}_{j-1}(Z_j) \le \mathbb{E}_{j-1}\left(\frac{X_j}{X^*_{j-1}}\right) = \frac{1}{X^*_{j-1}}\,\mathbb{E}_{j-1}(X_j) = Z_{j-1},$$

cioè

$$Z_{j-1} \ge \mathbb{E}_{j-1}(Z_j) \tag{6.8.1}$$

D'altro canto, è

$$\begin{aligned}&E\left[\{Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}^2\right] = \mathbb{E}\left(Z_j^2\right) - \mathbb{E}\left[\{\mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}^2\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left(Z_j^2\right) - \mathbb{E}\left(Z_{j-1}^2\right) + \mathbb{E}\left[Z_{j-1}^2 - \{\mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}^2\right] \\ &\quad= \mathbb{E}\left(Z_j^2\right) - \mathbb{E}\left(Z_{j-1}^2\right) + \mathbb{E}\left[\{(Z_{j-1}) - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}\;\{(Z_{j-1}) + \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}\right]\,,\end{aligned}$$

e, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$0 \le Z_j \le 1, \qquad Z_{j-1} + \mathbb{E}_{j-1}(Z_j) \le 2\,,$$

onde, per la (6.8.1),

$$\mathbb{E}\left[\{Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\}^2\right] \le \mathbb{E}\left(Z_j^2\right) - \mathbb{E}\left(Z_{j-1}^2\right) + 2\,\{\mathbb{E}(Z_{j-1}) - \mathbb{E}(Z_j)\}\,. \tag{6.8.2}$$

Ora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j))^2\right] \\ &\qquad + \sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}\mathbb{E}\left[\{(Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j))\}\;\{(Z_k - \mathbb{E}_{k-1}(Z_k))\}\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(Z_j - \mathbb{E}_{j-1}(Z_j))^2\right] \\ &+ \sum_{\substack{j,k=1\\ j\ne k}}^{n}\{\mathbb{E}(Z_j\,Z_k) - \mathbb{E}(Z_j\,\mathbb{E}_{k-1}(Z_k)) - \mathbb{E}(Z_k\,\mathbb{E}_{j-1}(Z_j)) \\ &\qquad + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{j-1}(Z_j)\;\mathbb{E}_{k-1}(Z_k)\right]\}\;;\end{aligned}$$

supposto che sia $j < k$, si ha

$$\mathbb{E}(Z_j\,\mathbb{E}_{k-1}(Z_k)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}_{k-1}(Z_j\,Z_k)) = \mathbb{E}(Z_j\,Z_k)\,,$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_k\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_j\right)\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{k-1}\left(Z_k\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_j\right)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{k-1}\left(Z_k\right)\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_j\right)\right)\,,\end{aligned}$$

sicché

$$\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(Z_j - \mathbb{E}_{j-1}\left(Z_j\right)\right)^2\right]\,.$$

Pertanto, la (6.8.2) dà

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y_n^2\right) &\leq \mathbb{E}\left(Z_n^2\right) - \mathbb{E}\left(Z_0^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(Z_0\right) - 2\,\mathbb{E}\left(Z_n\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left(Z_n^2\right) + 2\,\mathbb{E}\left(Z_0\right) \leq 3\,.\end{aligned} \tag{6.8.3}$$

Dunque, $(Y_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala limitata in L^2.

Si ponga ora, per $j \in \mathbb{N}$, $V_j := X_{j-1}^*$; per costruzione, il processo $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ è prevedibile. Dimostriamo che

$$\begin{aligned}X_n &= V_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} V_j\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right) + \left(V \cdot Y\right)_n \\ &= X_n^* - \sum_{j=1}^{n} X_{j-1}^*\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right) + \left(V \cdot Y\right)_n\end{aligned} \tag{6.8.4}$$

La (6.8.4) è di verifica banale se $n = 0$; in generale, si ha dalla definizione delle v.a. Z_j

$$\begin{aligned}\Delta X_n := X_n - X_{n-1} &= X_n^*\,Z_n - X_{n-1}^*\,Z_{n-1} \\ &= Z_n\left(X_n^* - X_{n-1}^*\right) + X_{n-1}^*\left(Z_n - Z_{n-1}\right)\,,\end{aligned}$$

e

$$Z_n\left(X_n^* - X_{n-1}^*\right) = X_n^* - X_{n-1}^* =: \Delta X_n^*\,. \tag{6.8.5}$$

Ciò è sicuramente vero se $Z_n = 1$; se, invece, $Z_n < 1$, allora $X_n^* = X_{n-1}^*$ ed entrambi i membri della (6.8.5) sono nulli. Perciò

$$\begin{aligned}\Delta X_n &= \Delta X_n^* + X_{n-1}^*\left(Z_n - Z_{n-1}\right) \\ &= \Delta X_n^* + X_{n-1}^*\,\mathbb{E}_{n-1}\left(Z_n - Z_{n-1}\right) + X_{n-1}^*\left\{Z_n - \mathbb{E}_{n-1}\left(Z_n\right)\right\} \\ &= \Delta X_n^* - X_{n-1}^*\,\mathbb{E}_{n-1}\left(Z_{n-1} - Z_n\right) + X_{n-1}^*\left\{Z_n - \mathbb{E}_{n-1}\left(Z_n\right)\right\}\,,\end{aligned}$$

ciò che dimostra la (6.8.4).

Ricorrendo ora alla (6.8.4) si può scrivere

$$\begin{aligned}\left(U \cdot X\right)_n &= U_0\,X_0 + \sum_{j=1}^{n} U_j\left(X_j^* - X_{j-1}^*\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} U_j\,X_{j-1}^*\,\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right) + \sum_{j=1}^{n} U_j\,X_{j-1}^*\,\Delta Y_j\end{aligned} \tag{6.8.6}$$

La prima somma che compare nella (6.8.6) è convergente, al tendere di n a $+\infty$ nell'insieme

$$\{U^* \leq k\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

perché è maggiorata da

$$k \sum_{j=1}^{n} \left(X_j^* - X_{j-1}^* \right) \leq k \, X_n^*$$

e $X^* = \sup_{n \in \mathbb{N}} X_n^* < +\infty$ q.c. dato che (X_n) è limitata in L^1; infatti, la diseguaglianza massimale (6.3.2) implica

$$\mathbb{P}\left(X^* = +\infty\right) \leq \mathbb{P}\left(X^* \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left(X_n\right) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0.$$

In definitiva, la somma in questione converge nell'insieme

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{U^* \leq k\} = \{U^* < +\infty\}.$$

Per il termine successivo della (6.8.6) vale, per la (6.8.1),

$$\sum_{j=1}^{n} U_j \, X_{j-1}^* \, \mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} |U_j| \, X_{j-1}^* \, \mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right) ,$$

che è la somma parziale n–esima di una serie a termine positivi. Poiché

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{j-1}\left(Z_{j-1} - Z_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}\left(Z_{j-1}\right) - \mathbb{E}\left(Z_j\right)\right\} \leq 1$$

il teorema di Beppo Levi assicura che la serie in questione converge q.c. nell'insieme

$$\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\};$$

essa, dunque, converge q.c. nell'insieme

$$\bigcup_{k,h \in \mathbb{N}} \left(\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\}\right) = \{U^* < +\infty\} .$$

L'ultimo termine della (6.8.6) è

$$A_n := \sum_{j=1}^{n} U_j \, X_{j-1}^* \, \Delta Y_j \, ;$$

e, poiché (Y_n) è una martingala, anche $(A_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una martingala, com'è immediato controllare. Nell'insieme $\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\}$ $(k, h \in \mathbb{N})$ essa coincide con

$$\mathbf{1}_{\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\}} \sum_{j=1}^{n} U_j \, X_{j-1}^* \, \Delta Y_j \tag{6.8.7}$$

che è limitata in L^2. Infatti, nell'insieme $\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\}$, si ha

$$A_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(U_j \, X_{j-1}^* \, \Delta Y_j\right)^2 + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} U_j \, U_k \, X_{j-1}^* \, X_{k-1}^* \, \Delta Y_j \, \Delta Y_k \, .$$

Ora, per $j < k$, si ha, poiché (Y_n) è una martingala,

$$\begin{aligned}
&E\left[U_j\, U_k\, X^*_{j-1}\, X^*_{k-1}\, \Delta Y_j\, \Delta Y_k\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{k-1}\left(U_j\, U_k\, X^*_{j-1}\, X^*_{k-1}\, \Delta Y_j\, \Delta Y_k\right)\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[U_j\, U_k\, X^*_{j-1}\, X^*_{k-1}\, \Delta Y_j\, \mathbb{E}_{k-1}\left(Y_k - Y_{k-1}\right)\right] = 0\,.
\end{aligned}$$

D'altro canto, abbiamo dimostrato che (Y_n) è una martingala limitata in L^2, sicché, per il Teorema 6.1.3

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(A_n^2\right) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\left(U_j\, X^*_{j-1}\, \Delta Y_j\right)^2\right] \\
&\leq h^2\, k^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\Delta Y_j)^2\right] = h^2\, k^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{j-1}\left(\Delta Y_j\right)^2\right] \\
&= h^2\, k^2 \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_{j-1}\left(Y_j^2\right) - Y_{j-1}^2\right] \\
&= h^2\, k^2 \sum_{j=1}^{n} \left\{\mathbb{E}\left(Y_j^2\right) - \mathbb{E}\left(Y_{j-1}^2\right)\right\} \\
&= h^2\, k^2\, \mathbb{E}\left(Y_n^2\right) \leq 3\, h^2\, k^2\,.
\end{aligned}$$

Cosí, la martingala (6.8.7) è limitata in L^2 e quindi converge in

$$\{U^* \leq k\} \cap \{X^* \leq h\}\,.$$

Perciò, come sopra, converge q.c. in $\{U^* < +\infty\}$. □

Il teorema di Burkholder contiene come caso particolare il Teorema 6.5.5 sulla convergenza q.c. delle martingale limitate in L^1. Basta, infatti prendere $U_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per avere $(U \cdot X)_n = X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; di piú, esso ne costituisce un'effettiva generalizzazione.

Si osservi che il teorema di Burkholder consente anche di dare una nuova dimostrazione del teorema di Doob; infatti, nella dimostrazione che abbiamo appena visto si è utilizzato solo il fatto che una martingala limitata in L^2 converge q.c., ma ciò è un'ovvia conseguenza dei Teoremi 6.5.2 e 6.5.4.

6.9 Note al Capitolo 6

Sezione 6.1 Il concetto di martingala fu introdotto esplicitamente da Ville (1939). Il significato della parola "martingala" non è del tutto chiaro. La prima citazione di questo vocabolo sarebbe in Rabelais, *chausses à la martingale*. Il nome deriverebbe dal villaggio di Martigues nella Camargue. Tra gli altri significati ha quello di una parte dell'equipaggiamento di un cavallo da tiro; si veda in (Snell, 1982) la fotografia di Doob con una martingala, regalatagli dal suo primo studente Halmos. Come la parola sia venuta a significare una strategia di gioco, quella consistente nel puntare ogni volta il doppio della posta perso nella giocata precedente, non è noto. In quest'ultima accezione la parola "martingala" fu impiegata, secondo l'*Oxford Dictionary*, per la prima volta, almeno in inglese, da Thackeray nel 1854 nella frase *You have not* *played as yet? Do not do so; above all avoid a martingale if you do.* Tuttavia la versione elettronica dello stesso dizionario dà una citazione precedente della parola, nello stesso significato, risalente al 1815. Benché l'uso di questa parola, in ispecie in francese, debba essere ancora anteriore, la piú antica citazione di questa parola che mi sia nota è di Giacomo Casanova (1989) nelle sue memorie scritte in francese alla fine del Settecento. Si veda [167].

La nozione di sotto-martingala fu introdotta da Snell (1952).

Le martingale divennero uno strumento fondamentale nel campo delle probabilità nei lavori di J.L. Doob, al quale è dedicata la monografia (Dellacherie & Meyer, 1980); nelle parole di questi autori, Doob *a démontré presque tous les résultats fondamentaux et ... les a utilisés sur tous les champs de bataille du calcul des probabilités, de sorte qu'aucun probabiliste ne peut plus se permettre d'ignorer la théorie des martingales.*

La teoria della martingale si può studiare in molti libri; occorre però segnalare, tra tutti, quelli di Doob (1953) e di Dellacherie & Meyer (1980). Particolarmente lucida l'esposizione di Chatterji (1973). Molto buono per la chiarezza e la ricchezza di esempî, ai quali ho attinto liberamente, (Pintacuda, 1984), come pure, a livello piú alto, (Letta, 1984) e (Letta, 2016). Molto utili anche (Neveu, 1972), (Mazliak et al., 1999) e (Rogers & Williams, 1994).

Sono numerose le applicazioni delle martingale all'analisi; per un'introduzione a questo campo si può trovare un orientamento in (Letta & Pratelli, 1986) e (Durret, 1991).

Le *amart* costituiscono una generalizzazione del concetto di martingala (il nome sta per *amart=asymptotic martingale*); si dice che un processo adattato (X_n) è un'amart, se considerato l'insieme diretto $\mathcal{T}$ dei tempi d'arresto *finiti*, converge la famiglia $\{\mathbb{E}(X_T) : T \in \mathcal{T}\}$. Il concetto di amart fu introdotto da Austin et al. (1974). Si veda la monografia di Edgar & Sucheston (1992).

Un'altra generalizzazione rilevante è sicuramente quella costituita dalle martingale a valori vettoriali, il cui studio ha riflessi importanti per lo studio della geometria degli spazî di Banach; come introduzione si può consultare il Capitolo V in (Diestel & Uhl, 1977) e la bibliografia lí citata.

Sezione 6.2 L'importanza dei tempi d'arresto fu sottolineata da Doob. Ai tempi d'arresto e ai loro usi è dedicata la monografia (Egghe, 1984).

Sezione 6.3 L'importante teorema sulla trasformata di una martingala è dovuto a Burkholder (1966).

Sezione 6.4 Sull'integrabilità uniforme si veda l'ampio lavoro di Diestel (1991).

Sezione 6.5 La spiegazione della diversità della formulazione dell'ultima condizione nei Teoremi 6.5.2 e 6.5.3 trae origine dalla diversa natura delle condizioni che assicurano la compattezza relativa nella topologia debole degli spazî L^p nei casi $p > 1$ e $p = 1$; si vedano in proposito (Chatterji, 1973) e (Dunford & Schwartz, 1958).

Avvertiamo il lettore che la dimostrazione del fondamentale Teorema 6.5.5 è ancora inusuale nei libri di testo. La dimostrazione "canonica", che si può trovare nella maggior parte dei libri di testo, a partire da (Doob, 1953), passa attraverso il teorema di Doob sul numero delle ascese ("upcrossings") di una martingala. Per una dimostrazione di tale teorema si può consultare (Dubins, 1966). È interessante notare come la dimostrazione contenuta in (Doob, 1940) non ricorra ancora esplicitamente al concetto di ascesa. Qui abbiamo seguito essenzialmente (Lamb, 1973). Altri approcci sono stati introdotti da Isaac (1965), Báez–Duarte (1968), Chatterji (1973), Dinges (1973), Baxter (1974), Chen (1981), Al–Hussaini (1981). In alcuni libri di testo cominciano a comparire dimostrazioni differenti da quella "canonica", per esempio in (Dudley, 1989) si segue la dimostrazione di Lamb, mentre Stromberg (1994) adatta la dimostrazione di Baxter. Ancora differente è la dimostrazione riportata da Petersen (1983), e da lui attribuita, senza citazione, a J. Horowitz.

Si è visto nella dimostrazione del Teorema 6.5.4 e del Corollario 6.5.1 che la diseguaglianza massimale (6.3.2) implica la convergenza quasi certa della successione $(X_n = \mathbb{E}_n(X))$; Chatterji (1980) mostra che la diseguaglianza massimale

(a) non è necessariamente valida se l'insieme degli indici non è totalmente ordinato;

(b) non è necessaria per la convergenza quasi certa di $X_n = \mathbb{E}_n(X)$.

Sottosezione 6.7.1 Del teorema di Radon–Nikodym esistono varie dimostrazioni; in queste lezioni se ne sono incontrate due, quella di von Neumann nella Sezione 1.14 e quella di questa sottosezione. Si veda l'ampia trattazione di (Rao, 1987).

Sezione 6.8 Per il Teorema 6.8.1 si veda Krickeberg (1956).

6.10 Esercizî sul Capitolo 6

6.1. Nello spazio misurabile $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ si considerino le v.a.

$$X_n := n\,\mathbf{1}_{B_n^c} - \mathbf{1}_{B_n} ,$$

ove $B_n := \{1, 2, \dots, n\}$. Si determini la filtrazione naturale.

6.2. Nello stesse condizioni e con le stesse definizioni dell'esercizio precedente si consideri in $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ la misura di probabilità definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$\mathbb{P}(\{n\}) := \frac{1}{n(n+1)} ;$$

si mostri che (X_n) è una martingala.

6.3. Se (X_n) è una martingala e se

$$Y_n := n\,X_n - \sum_{j=1}^{n-1} X_j ,$$

allora (Y_n) è anch'essa una martingala.

6.4. Sia (X_n) una successione di v.a. di $L^1(\mathcal{F})$. Se

$$Y_n := X_1 + \sum_{j=2}^{n} (X_j - \mathbb{E}_{j-1}(X_j)) \ ,$$

(Y_n) è una martingala.

6.5. Se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala e se $j \leq k < n$, allora

$$\mathbb{E}\left[(X_n - X_k)\, X_j\right] = 0 \, .$$

6.6. Si consideri la passeggiata aleatoria $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, ove le v.a. X_n sono indipendenti e isonome con

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_n = -1) = q \, .$$

Si mostri che sono martingale le successioni (M_n) definita da

$$M_n := S_n - (p - q)\, n \, ,$$

e (V_n) definita da

$$W_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \, .$$

6.7. (a) Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti e centrate di L^1. Si definisca, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ e sia

$$T_n := \frac{S_n}{n}.$$

Allora (T_n) è una sottomartingala.

(b) Se (X_n) e (Y_n) sono due sottomartingale, è una sottomartingala anche (Z_n) ove, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $Z_n := X_n \vee Y_n$.

6.8. In uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti ed isonome aventi legge $N(0,1)$ e sia $\{\mathcal{F}_n\}$ la filtrazione naturale. Posto $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, si definisca, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n := \exp\left(S_n - \frac{n}{2}\right) .$$

Allora la successione (Y_n) è una martingala.

6.9. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e sia μ una misura su $(\Omega, \mathcal{F})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\{A_{nj} : j \in \mathbb{N}\}$ una partizione misurabile di Ω con $\mathbb{P}(A_{nj}) > 0$ per ogni $n, j \in \mathbb{N}$ e si consideri la tribú $\mathcal{F}_n$ generata da $\{A_{nj} : j \in \mathbb{N}\}$. Si supponga, inoltre, che la partizione $\{A_{(n+1)j}\}$ sia un raffinamento della precedente, in altre parole, che per ogni $k \in \mathbb{N}$, l'insieme $A_{(n+1)j}$ sia contenuto in un insieme A_{nj}. Si definisca ora

$$X_n := \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{\mu(A_{nj})}{\mathbb{P}(A_{nj})} \, \mathbf{1}_{A_{nj}} .$$

Allora $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala.

6.10. Nello spazio di probabilità $([0,1[,\mathcal{B}([0,1[),\lambda)$, ove λ è la restrizione della misura di Lebesgue, si considerino le funzioni di Rademacher R_n. Se

$$X_n := \prod_{j=1}^{n} (1+\alpha\, R_j)\ ,$$

si mostri che

(a) (X_n) è una martingala;

(b) se $|\alpha|<1$, allora (X_n) è una martingala positiva.

6.11. Nello stesso spazio di probabilità dell'esercizio precedente si consideri, per ogni $n\in\mathbb{N}$, la tribú $\mathcal{F}_n$ generata dagli intervalli

$$\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right[\qquad j=1,2,\dots,2^n;$$

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{F}\left(\left\{\left[\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right[: j=1,2,\dots,2^n\right\}\right)\ .$$

Allora è una martingala la successione (X_n), ove, per ogni $n\in\mathbb{N}$,

$$X_n := 2^n\,\mathbf{1}_{\left[1-\frac{1}{2^n},1\right[}\ .$$

6.12. Nello spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sia (X_n) una sottomartingala tale che sia costante la successione $(\mathbb{E}(X_n))$ delle speranze; allora (X_n) è una martingala.

6.13. Siano $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ due martingale quadratiche rispetto alla stessa filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ nello spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

(a) Per ogni $k\le n$ si ha $\mathbb{E}_k(X_k\,Y_n)) = X_k\,Y_k$;

(b) $\mathbb{E}(X_n\,Y_n) - \mathbb{E}(X_0\,Y_0) = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}\left[(X_j - X_{j-1})\ (Y_j - Y_{j-1})\right]$.

6.14. Non tutte le successioni (X_n) che sono uniformemente integrabili sono tali che $|X_n|\le Y$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ ove Y è integrabile. Sia dia l'esempio di una successione (X_n) che sia uniformemente integrabile, ma per la quale non valga la condizione in esame.

6.15. Se $\alpha,\beta\ge 0$ e $p\ge 1$, allora

$$(\alpha+\beta)^p \le 2^{p-1}\ (\alpha^p+\beta^p)\ .$$

6.16. Ogni sottoinsieme limitato $\mathcal{K}$ di L^p, con $p>1$, costruito su uno spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ è uniformemente integrabile.

6.17. Si consideri lo spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ con $\Omega=[0,1]$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}([0,1])$ e $P=\lambda$, la restrizione della misura di Lebesgue. Sia (x_n) una successione strettamente crescente di punti di $[0,1]$ con $x_0 = 0 < x_1 < x_2 \dots < x_n < \dots$ e $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$. Si prenda

$$f_n := \frac{1}{x_n - x_{n-1}}\,\mathbf{1}_{]x_{n-1},x_n[}\qquad (n\in\mathbb{N})\ .$$

La successione (f_n) è limitata in L^1, ma non è uniformemente integrabile.

6.18. Sia X una v.a. di $L^1(\mathcal{F})$; allora, la famiglia

$$\{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(X) : \mathcal{G} \text{ è una sotto–tribú di } \mathcal{F}\}$$

è uniformemente integrabile.

6.19. Siano $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ due famiglie (contenute in L^1) uniformemente integrabili; è, allora, uniformemente integrabile anche la famiglia

$$\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 := \{f + g : f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2\} \; .$$

6.20. Sia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione crescente e tale che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty \, .$$

Se $\mathcal{K}$ è un insieme di L^1 per il quale esiste una costante $H > 0$ tale che, per ogni $X \in \mathcal{K}$,

$$\int \varphi \circ |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq H \, ,$$

allora $\mathcal{K}$ è uniformemente integrabile.

Questo esempio rappresenta una situazione tipica perché vale il seguente

Teorema 6.10.1. *Per un sottoinsieme $\mathcal{K}$ di L^1 sono equivalenti le proprietà:*

(a) *$\mathcal{K}$ è uniformemente integrabile;*

(b) *esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari e convessa tale che*

$$\varphi(0) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$$

per la quale

$$\sup_{X\in\mathcal{K}} \mathbb{E}\left(\varphi \circ |X|\right) < +\infty \, .$$

Per questo teorema, dovuto a de la Vallée Poussin (1915), si veda (Rao, 1981).

6.21. (a) Se $(X_n, \mathcal{F}_n)$ è una martingala ereditaria (per ogni $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \mathbb{E}_n(X)$ con $X \in L^1$), e se

$$X^* := \sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \, ,$$

allora vale la diseguaglianza, pure detta *massimale*: per ogni $\lambda > 0$, è

$$\mathbb{P}\left(X^* \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int\limits_{\{X^*\geq\lambda\}} |X| \, \mathrm{d}\mathbb{P} \leq \frac{1}{\lambda} \, \|X\|_1 \, .$$

(b) Si supponga, inoltre, che $X \in L^p$ con $p > 1$; allora $X^* \in L^p$ e vale la diseguaglianza

$$\|X^*\|_p \leq q \, \|X\|_p$$

ove, al solito, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

6.22. Si faccia scendere la diseguaglianza di Kolmogorov (**??**) dalla diseguaglianza massimale (6.3.2).

6.23. Siano $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ spazî misurabili, e, per ogni j, μ_j e ν_j misure di probabilità su $(\Omega_j, \mathcal{F}_j)$ con $\mu_j \ll \nu_j$. Considerato lo spazio prodotto $(\Omega, \mathcal{F})$, ove

$$\Omega := \prod_{j=1}^{n} \Omega_j \quad \text{e} \quad \mathcal{F} := \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$$

sono lo spazio prodotto e la tribú prodotto, rispettivamente, e le misure prodotto

$$\mu := \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n \quad \text{e} \quad \nu := \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \cdots \otimes \nu_n\,;$$

per $j = 1, 2, \dots, n$ siano $\mu^{(j)}$ e $\nu^{(j)}$ le restrizioni di μ e ν alla tribú

$$\mathcal{F}^{(j)} := \{A \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n : A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_j\}\ .$$

Allora,

(a) μ è assolutamente continua rispetto a ν, $\mu \ll \nu$ e, per ogni $j = 1, 2, \dots, n$, $\mu^{(j)}$ è assolutamente continua rispetto a $\nu^{(j)}$, $\mu^{(j)} \ll \nu^{(j)}$, con densità

$$f_j := \frac{d\mu^{(j)}}{d\nu^{(j)}}\,;$$

(b) si calcoli $\mathbb{E}\left(f_{j+1} \mid \mathcal{F}^{(j)}\right)$ nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$.

6.24. Se S e T sono tempi d'arresto, allora

$$\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{S \wedge T}\,.$$

Appartengono a questa tribú gli insiemi $\{S \le T\}$, $\{S < T\}$ e $\{S = T\}$.

6.25. Se S e T sono tempi d'arresto rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n\}$, tale è anche $S+T$. Se k è un numero naturale, anche $k\,T$ è un tempo d'arresto.

6.26. Se T è un tempo d'arresto, X_T è misurabile rispetto alla tribú $\mathcal{F}_T$.

6.27. Siano (X_n) una martingala quadratica, e S e T due tempi d'arresto limitati con $S \le T \le N$. Allora

(a) tanto X_S quanto X_T appartengono a L^2;

(b) $\mathbb{E}\left[(X_T - X_S)^2 \mid \mathcal{F}_S\right] = \mathbb{E}\left(X_T^2 \mid \mathcal{F}_S\right) - X_S^2$;

(c) $\mathbb{E}\left[(X_T - X_S)^2\right] = \mathbb{E}\left(X_T^2\right) - \mathbb{E}\left(X_S^2\right)$.

6.28. Sia $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ una martingala quadratica. Allora (M_n^2) è una sottomartingala. Si consideri la decomposizione di Doob di (M_n^2),

$$M_n^2 = X_n + A_n\,,$$

dove (X_n) è una martingala e (A_n) un processo crescente. Si mostri che

$$\mathbb{E}\left(M_n^2\right) = \mathbb{E}\left(A_n\right)\ .$$

6.29. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siano (X_n) una successione di v.a. di L^1 e $(\mathcal{F}_n)$ la filtrazione naturale. Se

$$\mathbb{E}_n(X_{n+1}) = \alpha\, X_n + \beta\, X_{n-1} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}$$

con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\alpha + \beta = 1$ si cerchi $\gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$Y_n := \gamma\, X_n + X_{n-1} \qquad \text{per } n \in \mathbb{N}, \quad Y_0 = X_0$$

sia una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)$.

6.30. Per una successione $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ di L^1 adattata a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ sono equivalenti le seguenti proprietà:

(a) (X_n) è una martingala;

(b) per ogni tempo d'arresto limitato T si ha $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$.

6.31. Una sottomartingala (X_n), positiva e limitata in L^2, cioè

$$X_n \geq 0, \quad \mathbb{E}(X_n^2) \leq K \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \text{ per un opportuno } K > 0,$$

converge in L^2.

6.32. (a) Sia $(X_n, \mathcal{F}_n)$ una sottomartingala limitata in L^1 ($\|X_n\|_1 \leq K$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Si mostri che la successione di integrali

$$\left(\int_A X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} \right)$$

ammette limite finito per ogni insieme $A \in \mathcal{F}_n$ e che la funzione d'insieme $\nu_n : \mathcal{F}_n \to \mathbb{R}$, definita mediante

$$\nu_n(a) := \lim_{\substack{k\to n \\ k\geq n}} \int_A X_n \, \mathrm{d}\mathbb{P} \qquad A \in \mathcal{F}_n\,,$$

è una misura su $\mathcal{F}_n$ finita e assolutamente continua rispetto alla restrizione P_n di P a $\mathcal{F}_n$.

(b) Esiste una martingala (U_n) rispetto alla stessa filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ tale che $X_n^+ \leq U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(c) Infine sia $(-X_n, \mathcal{F}_n)$ una martingala; sono allora equivalenti le affermazioni:

(c1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$;

(c2) vale la rappresentazione $X_n = U_n - V_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ove (U_n) e (V_n) sono martingale *positive* rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)$.

6.33. Si consideri una passeggiata aleatoria di Bernoulli. Con la notazione usuale, si mostri che per ogni $j > 0$ (ma anche per ogni $j < 0$ il tempo di primo passaggio per la posizione $x = j$,

$$T_j := \inf\{n \in \overline{\mathbb{N}} : G_n = j\}$$

è un tempo d'arresto q.c. finito.

6.34. Siano (X_n) una successione di v.a. indipendenti, isonome e centrate di $L^2(\mathcal{F})$, $(\mathcal{F}_n)$ la filtrazione naturale e T un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ integrabile. Posto, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$, si mostri che

(a) che le v.a. $Y_n := X_n \mathbf{1}_{\{T \geq n\}}$ sono in L^2 e che sono ortogonali, vale a dire $\mathbb{E}(Y_k Y_n) = 0$ se $k \neq n$;

(b) che la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ è convergente in L^2;

(c) che $S_T = \sum_{n \in \mathbb{N}} Y_n$;

(d) che vale la relazione, detta *teorema di* Blackwell–Girsbick,

$$\mathbb{E}\left(S_T^2\right) = \mathbb{E}\left(X_1^2\right) \mathbb{E}(T)$$

e che S_T è centrata.

6.35. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ una martingala limitata, $|X_n| \leq H$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_+$. Si ponga

$$Y_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(X_j - X_{j-1}\right) ;$$

allora

(a) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ è una martingala;

(b) $(Y_n, \mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ converge tanto q.c. quanto in L^2.

6.36. Sia P la probabilità dell'esercizio (6.2) e (X_n) la martingala dello stesso esercizio, con $B_n := \{1, 2, \dots, n\}$. Si definisca una funzione $Y : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mediante

$$Y(k) := \begin{cases} k+1, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ -k, & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

e si ponga

$$Z_n(k) := Y(k) \mathbf{1}_{B_n}(k) + c_n \mathbf{1}_{B_n^c}(k) ,$$

ove $c_n = 1$ o $c_n = 0$ secondo che n sia dispari o pari, rispettivamente. Si mostri che, se $U_n = (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$, allora

(a) (Z_n) è la trasformata di (X_n) mediante (U_n),

$$Z_n = (U \cdot X)_n ,$$

(b) Z_n converge q.c. ma non è limitata in L^1, sicché non si può usare il teorema di Doob.

6.37. Un'urna contiene inizialmente 2 palline, delle quali una è bianca e l'altra è nera. Ad ogni istante, si estrae una pallina e la si sostituisce con 2 dello stesso colore. Pertanto al tempo $t = n$ l'urna conterrà $n + 2$ palline, delle quali $B_n + 1$ sono bianche (B_n è il numero di palline bianche estratte sino al tempo $t = n$).

(a) Si mostri che
$$\mathbb{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

(b) posto
$$X_n := \varphi(n)\ (B_n + 1)\ ,$$
ove $\varphi(n)$ è un numero reale (che dipende da n), si calcoli $\varphi(n)$ in modo che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una martingala rispetto alla filtrazione $\{\mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N}\}$, ove $\mathcal{F}_n$ è la tribú generata dalle variabili aleatorie $B_1, B_2, \ldots, B_n$;

(c) si mostri che con il valore di $\varphi(n)$ determinato sopra, la martingala (X_n) converge quasi certamente;

(d) si determini la legge della variabile aleatoria X, limite quasi certo di (X_n).

6.38. Sia (X_n) una successione di variabili aleatorie integrabili a valori in $\mathbb{Z}$, indipendenti e con la stessa legge. Si supponga che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia
$$\mathbb{E}(X_n) = m < 0, \qquad \mathbb{P}(X_n = 1) > 0, \qquad \mathbb{P}(X_n \geq 2) = 0\,.$$
Si ponga $S_0 := 0$ e, per $n \geq 1$, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$. Posto
$$W := \sup_{n\geq 0} X_n\,,$$

(a) si mostri che $W < +\infty$ q.c.;

(b) definita la trasformata di Laplace di X_1,
$$M(s) := \mathbb{E}\left(e^{s\,X_1}\right)\ ,$$
e posto $\psi(s) := \ln M(s)$, si mostri che è convessa la funzione ψ cosí definita;

(c) si mostri che $\psi(s) < +\infty$ per ogni $s \geq 0$, si calcolino il limite
$$\lim_{s\to+\infty} \psi(s)$$
e il valore della derivata $\psi'(0)$ e si mostri che esiste un unico punto $s_0 > 0$ tale che sia $\psi(s_0) = 0$;

(d) se, per ogni $n \geq 1$, $Z_n := \exp(s_0\, S_n)$, ove s_0 è stato determinato in (c), si mostri che(Z_n) è una martingala rispetto alla filtrazione naturale e si calcoli il limite quasi certo di $\{Z_n\}$ per $n \to +\infty$;

(e) sia k un numero naturale, $k \in \mathbb{N}$ e sia τ_k il primo istante in cui (S_n) assume il valore k,
$$\tau_k := \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : S_n = k\}\,.$$
Si dimostri che, quasi certamente,
$$\lim_{n\to+\infty} Z_{n\wedge\tau_k} = e^{s_0\,k}\, \mathbf{1}_{\{\tau_k<+\infty\}}\,;$$

(f) si calcoli $\mathbb{P}\left(\tau_k < \infty\right)$ e si determini la legge di W.

6.39. Nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia (X_n) una successione di v.a. di legge $N(0, \sigma^2)$, con $\sigma > 0$. Sia $\{\mathcal{F}_n\}$ la filtrazione naturale e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ di ponga, al solito, $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$. Sia ψ la funzione generatrice dei momenti di X_1,

$$\psi(t) := \mathbb{E}\left[\exp\left(t\, X_1\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\,\sigma^2 t^2\right) ,$$

e si ponga, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n^t := \exp\left(t\, S_n - \frac{1}{2}\, n\sigma^2 t^2\right) .$$

(a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, (Z_n^t) è una martingala rispetto alla filtrazione naturale;

(b) si mostri che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, (Z_n^t) converge q.c., ma non in L^1.

6.40. Sia $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una filtrazione nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; per una successione adattata $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di v.a. di L^1 sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

(a) $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottomartingala;

(b) vale la seguente *decomposizione moltiplicativa*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad X_n = A_n\, M_n\, ,$$

ove $(M_n, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala e (A_n) è un processo prevedibile crescente tale che $A_1 := 1$: per ogni $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \geq A_n$ e A_n è $\mathcal{F}_n$–misurabile.