

Capitolo 7

Applicazione del calcolo dei residui

Il Teorema dei residui fornisce un modo per calcolare integrali curvilinei e anche diversi tipi di integrali di funzioni reali, senza conoscere una primitiva dell'integrando.

7.1 Calcolo di integrali curvilinei

1. Calcoliamo:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)} dz$$

Per calcolare l'integrale richiesto utilizziamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato al disco unitario di centro -1 : infatti la curva su cui è eseguito l'integrale è la frontiera di tale dominio regolare. Ora, le singolarità della funzione integranda f sono tutti e soli gli zeri (semplici) del denominatore (sono i poli semplici di f):

$$\begin{array}{lll} z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}, & z_2 = e^{i\pi} = -1, & z_3 = e^{-i\frac{\pi}{3}} \\ z_4 = 2, & z_5 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}, & z_6 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{array}$$

Evidentemente, l'unica singolarità di f interna a $|z+1|=1$ è $z_2 = -1$.

Allora:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^3+1)(z^3-8)}, -1 \right)$$

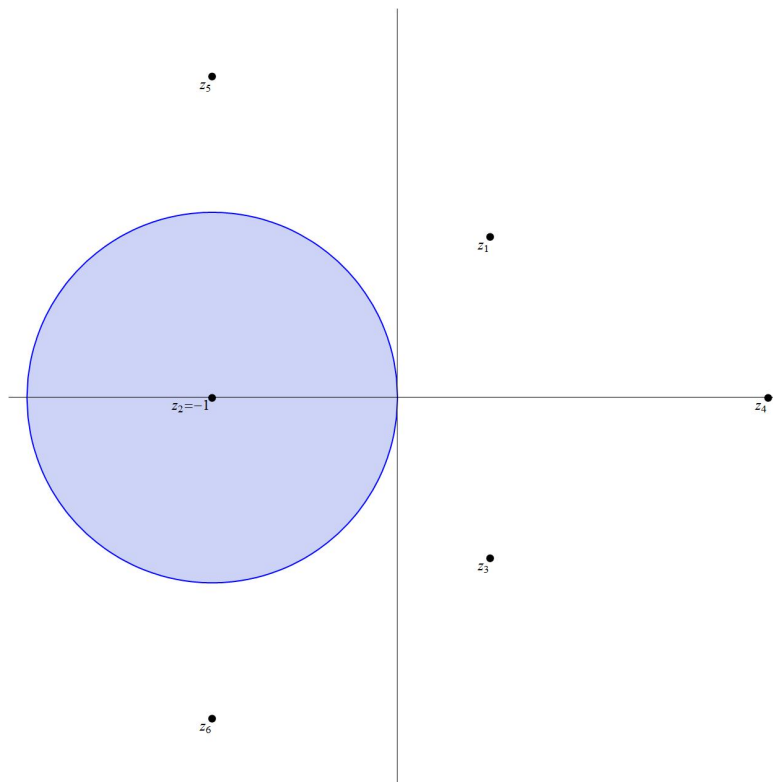


Figura 7.1: Poli semplici di f

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)}, -1 \right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \cdot \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{1}{(z^2 - z + 1)(z^3 - 8)} = -\frac{1}{27} \end{aligned}$$

Dunque, per il primo Teorema dei residui [6.3.1](#):

$$\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z^3 + 1)(z^3 - 8)} dz = -\frac{2\pi i}{27}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda; si ha:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^5)$$

Da cui:

$$e^z - e^{-z} = 2z + \frac{z^3}{3} + o(z^5)$$

Dunque lo sviluppo in serie di Laurent della funzione integranda è:

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = 2 \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} + o(z)$$

Allora $z = 0$ è un polo del terzo ordine,

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{z^4}, 0 \right) = \frac{1}{3},$$

e quindi l'integrale richiesto vale, per il primo Teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3}$$

3. Calcoliamo:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z} dz$$

Esplicitiamo lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $1/\sin^3 z$ in un intorno di $z = 0$. Innanzitutto:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \right),$$

pertanto:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3 \left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right)^3}.$$

Osserviamo che il termine

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)}$$

a secondo membro si può vedere come somma della serie geometrica di ragione:

$$w := \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots$$

Pertanto, trascurando i termini di ordine superiore al terzo:

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right)} = 1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3)$$

Ne segue:

$$\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \dots \right) \right)^3} = \left[1 + \frac{z^2}{3!} + o(z^3) \right]^3 = 1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3)$$

dove gli unici termini di grado inferiore al terzo sono 1 e il triplo prodotto tra il quadrato di 1 e $z^2/3!$. Allora:

$$\frac{1}{\sin^3 z} = \frac{1}{z^3} \left[1 + \frac{3z^2}{3!} + o(z^3) \right] = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{o(z^3)}{z^3}$$

L'ultimo addendo rappresenta la parte regolare di $1/\sin^3 z$ (contiene tutte le potenze ad esponente positivo dello sviluppo in serie di Laurent); osservando la parte singolare ricaviamo che $z = 0$ è polo del terzo ordine e che:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{\sin^3 z}, 0 \right) = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere, per il primo Teorema dei residui 6.3.1, che:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin^3 z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

4. Calcoliamo:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz$$

dove γ è la curva di equazione parametrica:

$$z(\vartheta) = \left(2 + \cos \frac{\vartheta}{2} \right) e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, 4\pi]$$

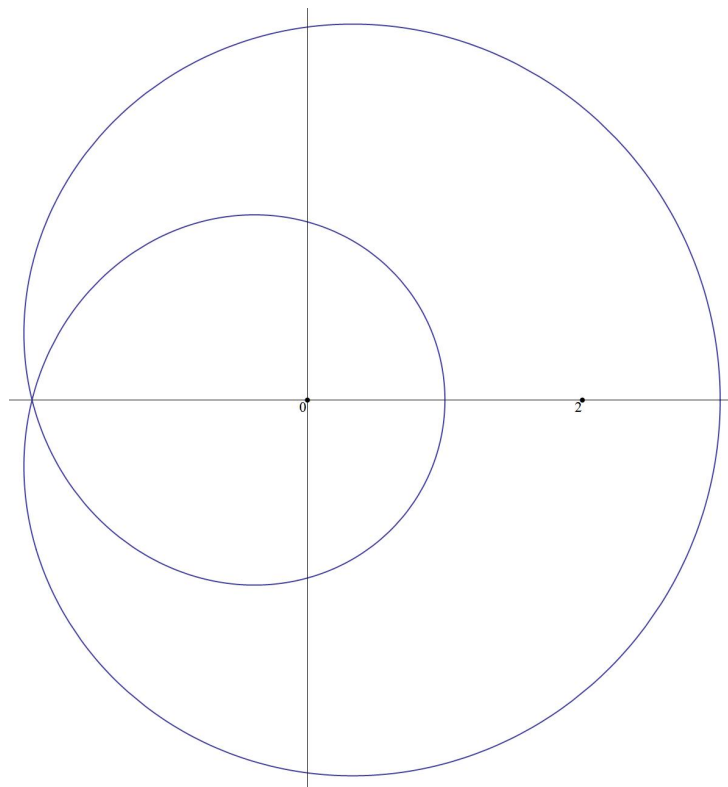


Figura 7.2: sostegno di γ

Le singolarità della funzione integranda f sono 0 e 2, entrambi poli semplici. Infatti, usando la decomposizione in frazioni parziali, si ha:

$$\frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} = z^3 + \frac{3}{z} - \frac{1}{z-2}$$

Osservato che la curva γ è chiusa ma non semplice, per calcolare l'integrale richiesto, usiamo il primo Teorema dei residui generalizzato 6.4.2:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz = 2\pi i \left[(n(\gamma, 0) \cdot \text{Res}(f(z), 0)) + (n(\gamma, 2) \cdot \text{Res}(f(z), 2)) \right]$$

dove con $n(\gamma, z)$ indichiamo l'indice di avvolgimento della curva γ attorno al punto $z \notin \gamma$. Come si può notare dalla figura, si ha:

$$n(\gamma, 0) = 2, \quad n(\gamma, 2) = 1$$

I residui nei due poli semplici 0 e 2 si deducono direttamente dalla precedente decomposizione in frazioni parziali della funzione integranda e risulta:

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = 3, \quad \operatorname{Res}(f(z), 2) = -1$$

Pertanto:

$$\int_{+\gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 2z - 6}{z^2 - 2z} dz = 10\pi i$$

7.2 Calcolo di integrali definiti tra 0 e 2π di funzioni razionali di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$

Integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta,$$

dove l'integrando è una funzione razionale di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$, possono essere ricondotti ad integrali curvilinei su $|z| = 1$ usando le formule di Eulero (1.7) e (1.8). Agli integrali curvilinei si potrà applicare poi il primo Teorema dei residui 6.3.1, come illustrato nei successivi esempi.

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Poniamo $z = e^{i\vartheta}$. Applicando la formula di Eulero per il coseno otteniamo:

$$\cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Allora, tenuto conto che $d\vartheta = dz/iz$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta &= \int_{|z|=1} \frac{1}{5 + 2 \left(z + \frac{1}{z} \right)} \frac{dz}{iz} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz \end{aligned}$$

Quest'ultimo integrale può essere calcolato con il primo Teorema dei residui applicato alla funzione integranda (che denoteremo con f) sulla circonferenza unitaria. Le singolarità al finito di f sono i due poli

semplici $z_1 = -2$ e $z_2 = -1/2$, ma solo z_2 cade nel disco unitario; risulta:

$$\operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2(z+2)\left(z + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

Ne segue:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(f(z), -\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Come nell'esercizio precedente, trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n}} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2^{2n} z} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Applicando la formula del binomio di Newton, risulta:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} z^k \cdot \frac{1}{z^{2n-k}}$$

da cui si ha:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k} \frac{1}{z^{2n-2k+1}}$$

Quest'ultima somma rappresenta lo sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ in un intorno di $z = 0$. Essendo $\operatorname{Res}(f(z), 0)$ il coefficiente di $\frac{1}{z}$, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), 0) &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{n! n!} = \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \\ &= \frac{2n \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2) (2n \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2)} = \\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \vartheta \, d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta \quad (0 < p < 1).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z - pz^2 - p + p^2z} \, dz = \\ &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz. \end{aligned}$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Tale funzione presenta due singolarità di tipo polare del primo ordine; poiché $0 < p < 1$, l'unica singolarità interna a $|z| = 1$ è $z = p$. Risulta:

$$\operatorname{Res}(f(z), p) = \lim_{z \rightarrow p} (z-p) \cdot \frac{1}{(z-p)(1-pz)} = \frac{1}{1-p^2}.$$

Allora, per 6.3.1:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-p)(1-pz)} \, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), p) = \frac{2\pi i}{1-p^2}.$$

In definitiva abbiamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{p^2 - 2p \cos \vartheta + 1} \, d\vartheta = \frac{2\pi}{1-p^2} \quad (0 < p < 1).$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} \, d\vartheta \quad (a > b > 0).$$

Trasformiamo l'integrale definito di funzione reale in un integrale curvilineo nella variabile $z := e^{i\vartheta}$ mediante la formula di Eulero per il coseno (1.7):

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} \, d\vartheta = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2} \, dz.$$

Denotiamo la funzione integranda all'ultimo membro con $f(z)$. Il denominatore della funzione f presenta due zeri reali del secondo ordine:

$$z_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad z_2 = -\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

Osservato che $z_1 \cdot z_2 = 1$ e che, essendo $a > b > 0$, z_1 è esterno alla circonferenza unitaria, e (di conseguenza) z_2 è interno alla circonferenza unitaria, calcoliamo solo il residuo di f in z_2 :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \left[(z - z_2)^2 \cdot \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \frac{4z}{b^2(z - z_1)^2} = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{4(z - z_1) - 8z}{b^2(z - z_1)^3} = \\ &= \frac{a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(a + b \cos \vartheta)^2} d\vartheta &= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{4z}{(bz^2 + 2az + b)^2} dz = \\ &= 2\pi \text{Res}(f(z), z_2) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

5. Calcolare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin \vartheta} d\vartheta.$$

7.3 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali

La seguente proposizione riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Proposizione 7.3.1 (Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali). *Siano $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente m e $n \geq m + 2$; supponiamo inoltre $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la funzione razionale*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

è integrabile su \mathbb{R} e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right), \quad (7.1)$$

dove i punti z_j sono gli zeri di $Q(z)$ con $\operatorname{Im}(z_j) > 0$ ($j = 1, 2, \dots, \nu$).

Dimostrazione. Trattandosi di funzioni razionali a coefficienti reali, perché $Q(x)$ abbia solo zeri complessi n dev'essere pari, $n = 2\nu$, ed allora le radici si presentano a coppie coniugate.

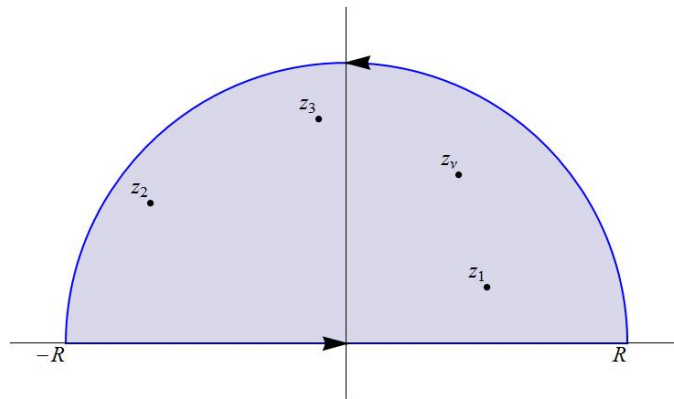
Sia $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $B_R(0)$ contenga tutte le n radici in \mathbb{C} del polinomio $Q(z)$. Siano z_1, \dots, z_ν le radici di $Q(z)$ con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 0\}.$$

D è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Ora, la frontiera di D è unione dell'intervallo $[-R, R]$ e della semicirconferenza $\gamma_R^+(0)$, con orientazione come in figura:



Perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right).$$

Per provare la tesi, dimostriamo che:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$$

Ora $\gamma_R^+(0)$ ha rappresentazione parametrica:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

perciò:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} d\vartheta.$$

Per l'ipotesi:

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} = o\left(\frac{1}{R^2}\right);$$

Ne deduciamo che, per $R \rightarrow +\infty$:

$$\frac{P(Re^{i\vartheta})}{Q(Re^{i\vartheta})} iRe^{i\vartheta} = o\left(\frac{1}{R}\right);$$

perciò l'integrale lungo la semicirconferenza è infinitesimo per $R \rightarrow +\infty$, il che prova la proposizione. \square

Osservazione 7.3.2. Evidenziamo che la dimostrazione è consistita nell'aggiungere all'intervallo limitato $[-R, R]$ (con $R > 0$ sufficientemente grande) della retta reale una semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine. In tal modo è formata una curva regolare, semplice e chiusa, frontiera di un dominio regolare cui si applica il teorema dei residui. Successivamente si passa al limite per $R \rightarrow +\infty$.

1. Calcoliamo:

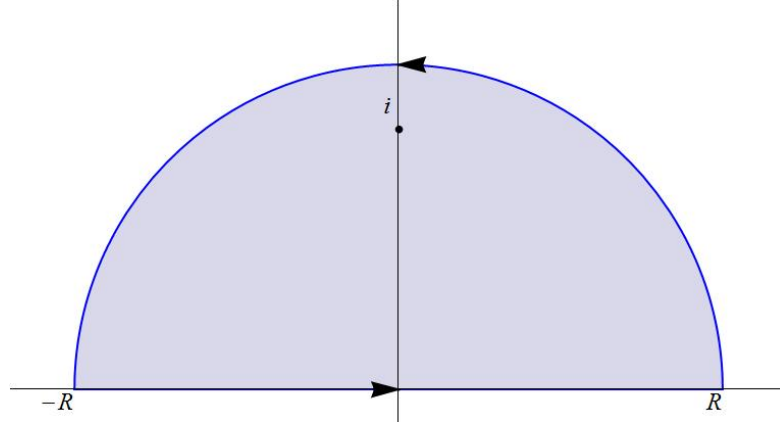
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^2}.$$

Tale funzione presenta due poli semplici in corrispondenza degli zeri del denominatore:

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i$$



Per 7.3.1, consideriamo i poli con parte immaginaria positiva, in questo caso solo $z_1 = i$, e fissiamo un semidisco di raggio $R > |i| = 1$.

Risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i).$$

Il residuo di f in i vale:

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

In definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

2. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa

$$f(z) := \frac{1}{1+z^4}.$$

Gli zeri del denominatore sono le radici quarte di -1 , cioè:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & z_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), & z_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i). \end{aligned}$$

Si tratta di poli semplici per f . Considerando i due poli a parte immaginaria positiva (ovvero z_0 e z_1), dalla 7.3.1 si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)].$$

Calcoliamo i residui di f in z_0 e z_1 :

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_0}{4}, \\ \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{4z^3} = -\frac{z_1}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(vedere l'esercizio 3 del paragrafo 7.7).

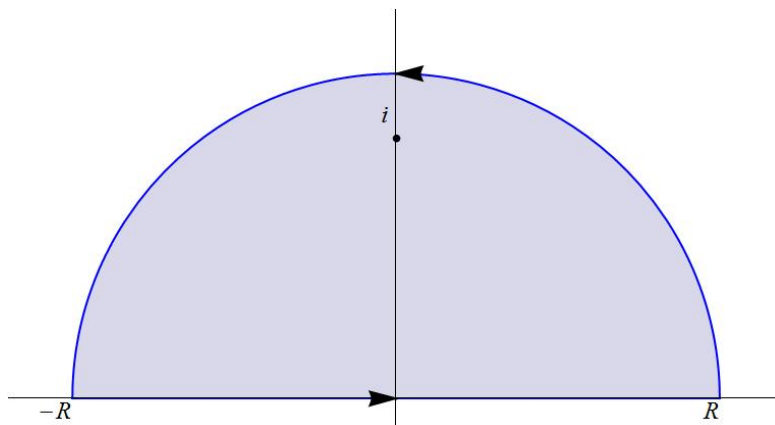
3. Calcoliamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{1}{(1+z^2)^2}$$

Essa ha in $z_1 = i$ e in $z_2 = -i$ due poli del secondo ordine; applichiamo il primo teorema dei residui 6.3.1 alla funzione f sul semidisco di raggio $R > 1$ in figura:



Per 6.2.1, abbiamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1+z^2)^2} \cdot (z-i)^2 \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} -\frac{2}{(z+i)^3} = \frac{1}{4i} \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale da calcolare vale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(1+z^2)^2}, i \right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}$$

4. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Osserviamo che la funzione integranda è pari, pertanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx$$

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{z^2}{(1+z^2)^3}$$

che ha un polo del terzo ordine in $z = i$. Allora, per 7.3.1:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z), i)$$

Calcoliamo il residuo richiesto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), i) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z^2}{(1+z^2)^3} \cdot (z-i)^3 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d^2}{dz^2} \left[\frac{z^2}{(z+i)^3} \right] = -\frac{i}{16} \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^3} dx = \frac{\pi}{16}.$$

7.4 Teoremi di Jordan del grande e del piccolo cerchio. Lemma di Jordan

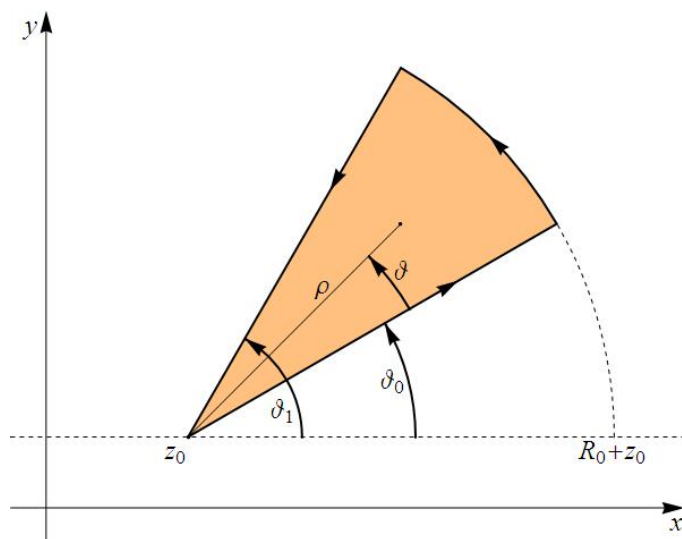
Nelle applicazioni risultano utili i seguenti risultati di Jordan, grazie ai quali, in molti casi, si possono calcolare i limiti per $R \rightarrow +\infty$ o per $r \rightarrow 0^+$ di integrali su archi di circonferenza nel piano complesso di raggi R o r .

Teorema 7.4.1 (di Jordan, del grande cerchio). *Sia $\gamma_{R_0}(z_0)$ un arco di circonferenza di raggio $R_0 > 0$ e centro in z_0 , limitato agli estremi dalle semirette per z_0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_R(z_0)$ per $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ e per ogni $R \geq R_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (z - z_0) f(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0).$$



Dimostrazione. L'equazione parametrica di $\gamma_R(z_0)$ è:

$$z = z_0 + Re^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in [\vartheta_0, \vartheta_1].$$

Risulta

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{Re^{i\vartheta}} iRe^{i\vartheta} d\vartheta = i(\vartheta_1 - \vartheta_0) \quad (7.2)$$

e

$$\int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{1}{R} \cdot R \, d\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_0. \quad (7.3)$$

Per ipotesi, fissato un arbitrario $\varepsilon > 0$, esiste $k > 0$ tale che, per $|z - z_0| > k$, si ha:

$$|(z - z_0) f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per $R > k$ otteniamo, tenuto conto di (7.2) e (7.3):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz - il(\vartheta_1 - \vartheta_0) \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz - l \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} [f(z)(z - z_0) - l] dz \right| \leq \\ & \leq \int_{+\gamma_R(z_0)} |f(z)(z - z_0) - l| \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \int_{+\gamma_R(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} (\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

il che prova il teorema. \square

Teorema 7.4.2 (di Jordan, del piccolo cerchio). *Sia $\gamma_{r_0}(z_0)$ un arco di circonferenza di raggio $r_0 > 0$ e centro in z_0 , limitato agli estremi dalle semirette per z_0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_r(z_0)$ per $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ e per ogni $0 < r \leq r_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = l \in \mathbb{C}$$

allora risulta

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, per $0 < r = |z - z_0| < \delta$, si ha:

$$|(z - z_0) f(z) - l| < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0}.$$

Allora, per $r < \delta$, tenuto conto di (7.2) e (7.3), risulta:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz - il(\vartheta_1 - \vartheta_0) \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz - l \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz \right| = \\ & = \left| \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0} [f(z)(z - z_0) - l] dz \right| \leq \\ & \leq \int_{+\gamma_r(z_0)} |f(z)(z - z_0) - l| \left| \frac{dz}{z - z_0} \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \int_{+\gamma_r(z_0)} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{\varepsilon}{\vartheta_1 - \vartheta_0} (\vartheta_1 - \vartheta_0) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Per definizione di limite, quindi:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r(z_0)} f(z) dz = il(\vartheta_1 - \vartheta_0),$$

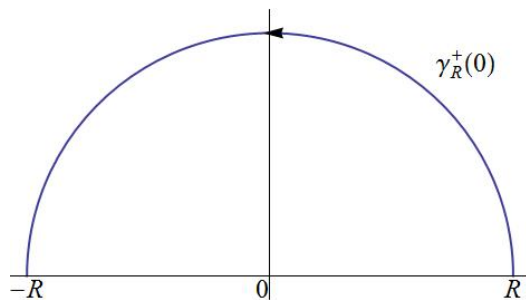
il che prova il teorema. □

Lemma 7.4.3 (di Jordan). *Sia $\gamma_{R_0}(0)$ un arco di circonferenza di raggio $R_0 > 0$ e centro in 0, limitato agli estremi dalle semirette per 0 di anomalia ϑ_0 e ϑ_1 ($\vartheta_0 < \vartheta_1$). Se, $f(z)$ essendo olomorfa su $\gamma_R(0)$ per $\vartheta_0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ e per ogni $R \geq R_0$, si ha uniformemente rispetto a ϑ*

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0,$$

allora si hanno i seguenti risultati:

- (i) se $\vartheta_0 = 0$ e $\vartheta_1 = \pi$,

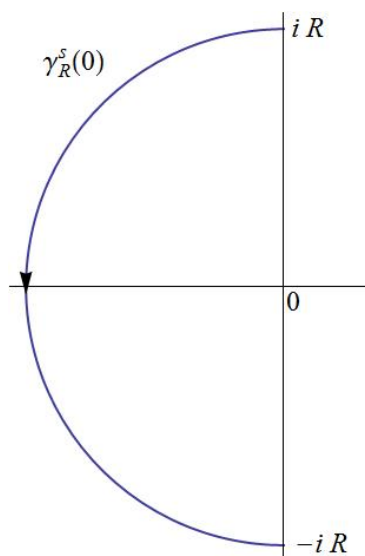


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^+(0)$ è la semicirconferenza superiore;

(ii) se $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_1 = \frac{3}{2}\pi$,

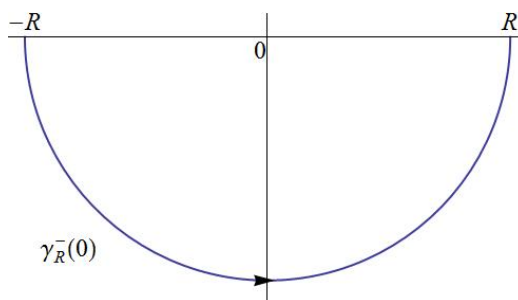


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^s(0)} f(z) e^{\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^s(0)$ è la semicirconferenza a sinistra;

(iii) se $\vartheta_0 = \pi$ e $\vartheta_1 = 2\pi$,

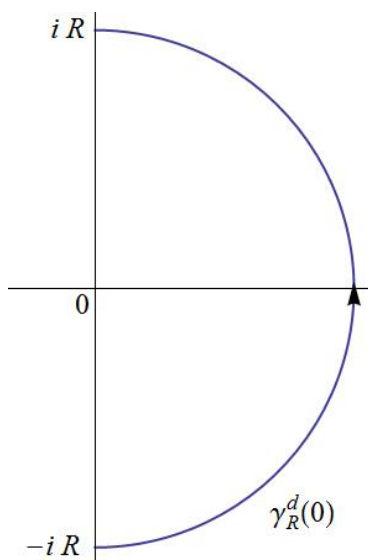


risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^-(0)} f(z) e^{-i\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^-(0)$ è la semicirconferenza inferiore;

(iv) se $\vartheta_0 = -\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$,



risulta

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^d(0)} f(z) e^{-\alpha z} dz = 0 \quad \forall \alpha > 0,$$

dove $\gamma_R^d(0)$ è la semicirconferenza a destra.

Dimostrazione.

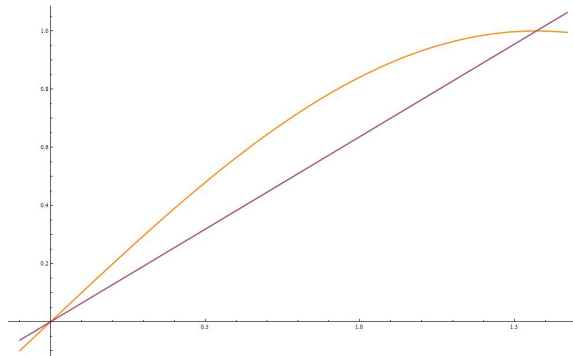
(i) Consideriamo la rappresentazione parametrica di $\gamma_R^+(0)$:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta} = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi].$$

Vale:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\vartheta}) e^{i\alpha R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\
 &= \left| \int_0^\pi f(Re^{i\vartheta}) e^{i\alpha R \cos \vartheta} \cdot e^{-\alpha R \sin \vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\
 &\leq \int_0^\pi \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| e^{-\alpha R \sin \vartheta} \cdot R d\vartheta = \\
 &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \vartheta} d\vartheta.
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Risulta $\sin \vartheta \geq \frac{2}{\pi} \vartheta$ per $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (considerare il grafico di $\sin \vartheta$ e la congiungente i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, di equazione $y = \frac{2}{\pi} \vartheta$).



Da (7.4) segue:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R(\frac{2}{\pi} \vartheta)} d\vartheta = \\
 &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1 - e^{-\alpha R}}{2\alpha R}.
 \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{z \in \gamma_R^+(0)} |f(z)| = 0$$

e $\alpha > 0$ per ipotesi, per $R \rightarrow +\infty$ otteniamo la tesi.

(ii) Consideriamo la rappresentazione parametrica di $\gamma_R^s(0)$:

$$z(\vartheta) = Re^{i\vartheta} = R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta), \quad \vartheta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right].$$

Vale:

$$\begin{aligned} \left| \int_{+\gamma_R^s(0)} f(z)e^{\alpha z} dz \right| &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta}) e^{\alpha R(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\ &= \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} f(Re^{i\vartheta}) e^{\alpha R \cos \vartheta} \cdot e^{i\alpha R \sin \vartheta} \cdot Rie^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \\ &\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| e^{\alpha R \cos \vartheta} \cdot R d\vartheta \stackrel{\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}}{\leq} \\ &= R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \vartheta'} d\vartheta' = \\ &= 2R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \vartheta'} d\vartheta' \leq \\ &\leq 2R \sup_{z \in \gamma_R^s(0)} |f(z)| \cdot \pi \cdot \frac{1 - e^{-\alpha R}}{2\alpha R} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per $R \rightarrow +\infty$.

I casi (iii) e (iv) sono lasciati da dimostrare per esercizio. □

7.5 Calcolo di integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per una funzione esponenziale. Formula di Heaviside

Il risultato che segue riguarda il calcolo di integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Proposizione 7.5.1. *Siano $P(x)$, $Q(x)$ polinomi a coefficienti reali di grado rispettivamente m e $n \geq m + 2$ e sia $\alpha > 0$; supponiamo, inoltre, $Q(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res} \left(\frac{P(z)e^{i\alpha z}}{Q(z)}, z_j \right), \quad (7.5)$$

dove i punti z_j sono gli zeri di $Q(z)$ con $\text{Im}(z_j) > 0$ ($j = 1, \dots, \nu$).

Dimostrazione. Sia $R > 0$ sufficientemente grande in modo che $B_R(0)$ contenga tutte le n , $n = 2\nu$, radici in \mathbb{C} del polinomio $Q(z)$. Siano z_1, \dots, z_ν le radici di $Q(z)$ con parte immaginaria strettamente positiva e consideriamo l'insieme:

$$D := \overline{B}_R(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

D è un dominio regolare; allora per 6.3.1 vale:

$$\int_{+\partial D} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right).$$

Poiché $+\partial D = (+\gamma_R^+(0)) \cup [-R, R]$, si ha:

$$\underbrace{\int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z} dz}_{(I)} + \underbrace{\int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx}_{(II)} = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right).$$

Passando al limite per $R \rightarrow +\infty$, l'integrale (I) è infinitesimo, per 7.4.3 punto (i), mentre l'integrale (II) tende all'integrale improprio in (7.5), da cui la tesi. \square

Corollario 7.5.2 (Formula di Heaviside). *Sotto le stesse ipotesi di 7.5.1, se gli zeri z_1, \dots, z_ν di $Q(z)$ con $\text{Im}(z_j) > 0$ ($j = 1, \dots, \nu$) sono semplici, vale la seguente formula di Heaviside:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{\nu} \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}. \quad (7.6)$$

Dimostrazione. Poiché z_j è polo semplice, da (6.5) si ottiene:

$$\text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}, z_j \right) = \frac{P(z_j) e^{i\alpha z_j}}{Q'(z_j)}.$$

\square

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx, \quad \alpha > 0.$$

La funzione integranda presenta due singolarità polari del primo ordine, i e $-i$; applicando 7.5.2 risulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \left[\frac{e^{i\alpha z}}{2z} \right]_{z=i} = \pi e^{-\alpha}.$$

Osserviamo che, esplicitando l'esponenziale complesso in termini di seno e coseno, otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi e^{-\alpha} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x) + i \sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

Eguagliando parte reale e immaginaria di primo e ultimo membro si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} dx = 0 \quad (\alpha > 0).$$

Osservazione 7.5.3. Dalla considerazione precedente, si evince come calcolare *integrali impropri di funzioni reali razionali moltiplicate per le funzioni coseno o seno*. In generale, basta osservare che, per l'integrando in (7.5), si ha

$$\frac{P(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(\alpha x) + i \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(\alpha x).$$

7.6 Integrandi che presentano singolarità sulla retta reale

Finora abbiamo assunto che l'integrando f non abbia singolarità sulla retta reale; ciò ha consentito di integrare f sull'asse reale. Modificando la curva di integrazione, possiamo eliminare tale richiesta, come illustrato negli esempi che seguono.

1. Calcoliamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

L'integrale proposto è improprio, definito come il limite di

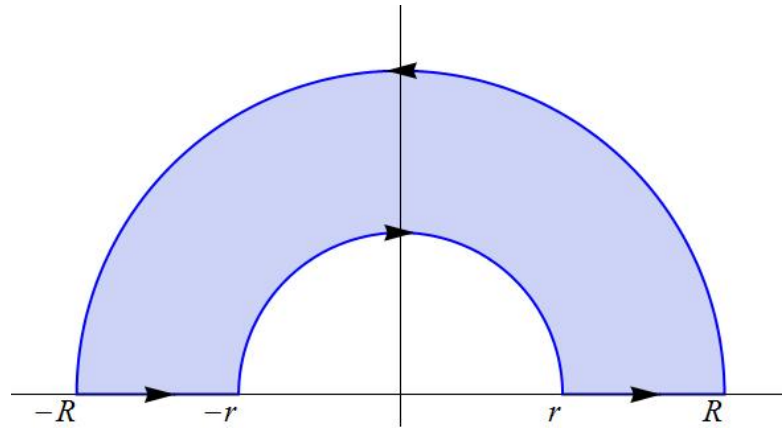
$$\int_{-R}^R \frac{\sin x}{x} dx$$

per $R \rightarrow +\infty$. Osserviamo che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in \mathbb{R} .

Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$$

nella semicorona circolare contenuta nel semipiano positivo $C^+(0, r, R)$: in tale dominio regolare f è olomorfa, allora per il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:



grale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial C^+(0, r, R)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

La frontiera di $C^+(0, r, R)$ orientata positivamente è così formata:

$$+\partial C^+(0, r, R) = [r, R] \cup (+\gamma_R^+(0)) \cup [-R, -r] \cup (-\gamma_r^+(0))$$

Allora:

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \quad (7.7)$$

Osserviamo che:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = - \int_{-r}^{-R} \frac{e^{ix}}{x} dx \stackrel{t=-x}{=} - \int_r^R \frac{e^{-it}}{-t} (-dt) \stackrel{x=t}{=} - \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx$$

Sostituendo in (7.7) risulta:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz &= - \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{-ix}}{x} dx = \\ &= -2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx, \end{aligned} \quad (7.8)$$

dove abbiamo utilizzato la formula di Eulero per la funzione seno (1.8). Ora, applicando il lemma 7.4.3(i) e il teorema 7.4.2 si ha:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = o, \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi. \quad (7.9)$$

Facendo tendere $R \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow 0^+$ in (7.8), tenuto conto delle (7.9) otteniamo:

$$-i\pi = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Poiché la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, abbiamo in definitiva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

2. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$$

Applicando la formula di Eulero per la funzione seno (1.8):

$$\begin{aligned} \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{e^{3ix} - e^{-3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix}}{8i} = \\ &= -\frac{1}{4} [\sin(3x) - 3\sin x], \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{\sin^3 x}{x^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3}.$$

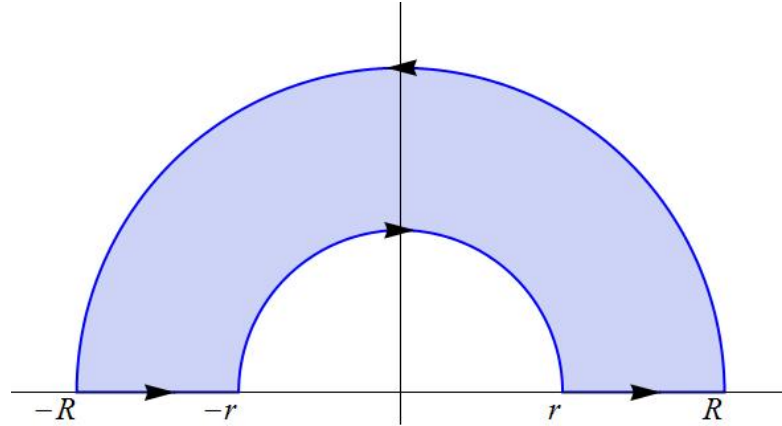
Consideriamo allora la funzione (che presenta al numeratore uno zero in $z = 0$):

$$f(z) := \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$$

sulla semicorona circolare D in figura:

Poiché $f(z)$ è olomorfa in D , per il Teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

$$\int_{+\partial D} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di ∂D , otteniamo:

$$\int_{-r}^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz +$$

$$+ \int_{-R}^{-r} \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0$$

dove abbiamo indicato con $\gamma_R^+(0)$ e $\gamma_r^+(0)$ la semicirconfenza esterna e la semicirconfenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$\int_r^R \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 2}{x^3} dx - \int_r^R \frac{e^{-3ix} - 3e^{-ix} + 2}{x^3} dx =$$

$$= - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz + \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz$$

da cui:

$$2i \int_r^R \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{x^3} dx =$$

$$= - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz + \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz. \quad (7.10)$$

Ora:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = 0$$

perché il numeratore è limitato nel semipiano delle y positive. Applicando la regola di L'Hôpital otteniamo:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} = -3$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = 0 \quad (7.11)$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3} dz = -3\pi i \quad (7.12)$$

Per $r \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow +\infty$, da (7.10), per (7.11) e (7.12), si ha:

$$2i \int_0^{+\infty} \frac{\sin(3x) - 3 \sin x}{x^3} dx = -3\pi i$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3}{8}\pi.$$

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx.$$

Tenendo presente che $x - \sin x = o(x^3)$, la funzione integranda è integrabile in $[0, +\infty[$. Ora,

$$x - \sin x = \operatorname{Re}(x + ie^{ix}),$$

pertanto consideriamo la funzione (che presenta al numeratore uno zero in $z = 0$):

$$f(z) := \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}$$

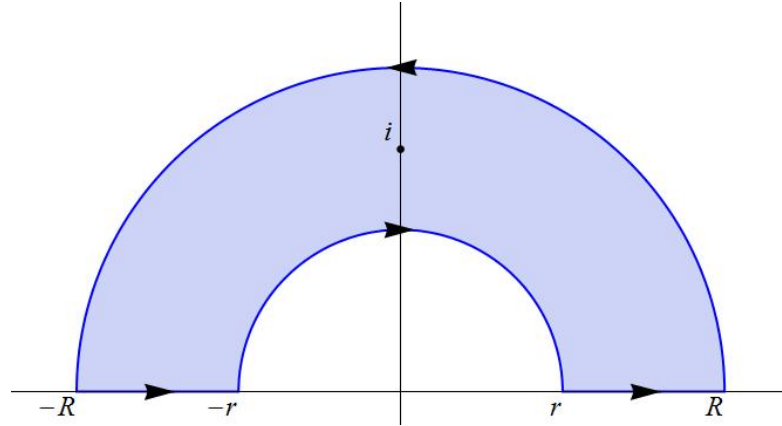
sulla semicorona circolare D in figura:

con $r < 1 < R$. La funzione $f(z)$ presenta in D una sola singolarità: il polo semplice $z = i$. Per il primo Teorema dei residui:

$$\int_{+\partial D} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}, i \right) = 2\pi i \cdot \frac{ie^{-1}}{2},$$

essendo

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)}, i \right) = \frac{ie^{-1}}{2}$$



Scomponendo l'integrale lungo i tratti regolari di ∂D , otteniamo:

$$\int_r^R \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx + \\ - \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = -\frac{\pi}{e}.$$

dove abbiamo indicato con $\gamma_R^+(0)$ e $\gamma_r^+(0)$ la semicirconferenza esterna e la semicirconferenza interna (rispettivamente). Ne segue:

$$2 \int_r^R \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz + \\ - \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz - \frac{\pi}{e} \quad (7.13)$$

Allora, per il teorema del grande cerchio 7.4.1:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = 0 \quad (7.14)$$

e, per il teorema del piccolo cerchio 7.4.2:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+\gamma_r^+(0)} \frac{z + ie^{iz} - i}{z^3(z^2 + 1)} dz = \frac{\pi}{2} \quad (7.15)$$

Per $r \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow +\infty$, da (7.13), per (7.14) e (7.15), si ha:

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{e}$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e} \right].$$

4. Calcoliamo il *valor principale (v.p.)* del seguente integrale improprio¹:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx.$$

La funzione integranda è un infinitesimo di ordine 3 sia per $x \rightarrow -\infty$ che per $x \rightarrow +\infty$, ma per $x \rightarrow -1$ è un infinito del primo ordine.

¹Integrali impropri e loro valor principale (v.p.) secondo Cauchy.

Definizione 7.6.1. Sia f definita sulla retta reale e consideriamo l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Consideriamo i limiti:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx \tag{7.16}$$

e

$$\lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} f(x) dx. \tag{7.17}$$

Se il limite (7.16) esiste, esso si chiama *valor principale secondo Cauchy* dell'integrale improprio e si scrive:

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

Se il limite (7.17) esiste, si dice che l'integrale improprio converge e si scrive:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} f(x) dx.$$

Osservazione 7.6.2. Se esiste il limite (7.17) allora esiste il limite (7.16) e vale l'uguaglianza

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

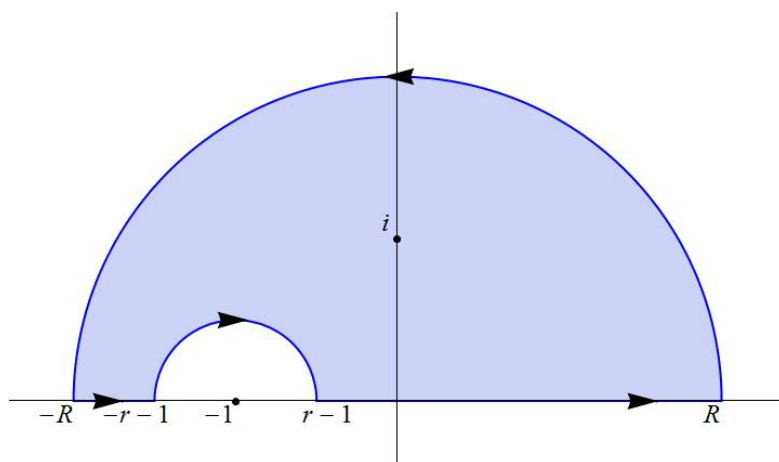
Tuttavia, l'esistenza di (7.16) non implica in generale l'esistenza di (7.17). Infatti

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = 0$$

ma non esistono i due limiti

$$\lim_{R_1 \rightarrow +\infty} \int_{-R_1}^0 x dx, \quad \lim_{R_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{R_2} x dx.$$

Pertanto la funzione integranda è integrabile in un intorno di $\pm\infty$, ma non è integrabile in un intorno del punto -1 . Oltre che in -1 , il denominatore si annulla in i e $-i$ (zeri semplici). Consideriamo un dominio regolare a cui applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 che non contenga il punto -1 . Una scelta naturale è quella di considerare un semidisco del semipiano superiore centrato in 0 e di raggio $R > 1$ (contenente i), privato di un semidisco centrato in -1 e di raggio $r < 1$ sufficientemente piccolo.



Detto $D_{r,R}$ tale insieme, applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a

$$f(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}$$

in $D_{r,R}$ (dominio regolare):

$$\int_{+\partial D_{r,R}} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i)$$

Ripartendo la frontiera di $D_{r,R}$ e considerandone l'orientazione positiva, come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz + \int_{-R}^{-1-r} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx + \\ & - \int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz + \int_{-1+r}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \quad (7.18) \\ & = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2(i - 1)} \end{aligned}$$

essendo:

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{1}{2i - 2}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{+\gamma_r^+(-1)} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)} dz &\xrightarrow{r \rightarrow 0^+} i \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

per 7.4.1 e 7.4.2 rispettivamente. Quindi, per $R \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow 0^+$, da (7.18), per (7.19), otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx + \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \frac{\pi}{2},$$

pertanto

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x + 1)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

5. Calcoliamo il valor principale del seguente integrale improprio:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx. \quad (7.20)$$

La funzione integranda è integrabile in un intorno di $\pm\infty$, ma non è integrabile in un intorno del punto 1, poiché è infinitesima di ordine 3 per $x \rightarrow -\infty$ e $x \rightarrow +\infty$, ma per $x \rightarrow 1$ è un infinito del primo ordine. Consideriamo la funzione

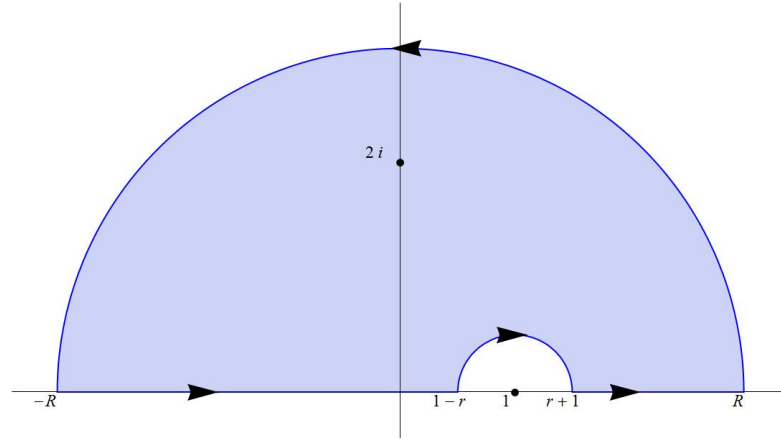
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)};$$

1, $2i$ e $-2i$ sono zeri semplici del denominatore.

Consideriamo il dominio regolare $D_{R,r}$ come in figura ($R > 2$ e $r < 1$).

Applichiamo il primo Teorema dei residui 6.3.1 a $f(z)$ in $D_{R,r}$:

$$\int_{+\partial D_{R,r}} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 2i)$$



Poiché $z = 2i$ è polo semplice per $f(z)$, si ha:

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} = \frac{e^{-2}}{4i(2i - 1)}.$$

Ripartendo la frontiera di $D_{R,r}$ e considerandone l'orientazione positiva come in figura, otteniamo:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz + \int_{-R}^{1-r} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx + \\ & - \int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz + \int_{1+r}^R \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \quad (7.21) \\ & = \frac{\pi}{2e^2(2i - 1)} = -\frac{\pi(2i + 1)}{10e^2}. \end{aligned}$$

Da 7.4.3(i) e 7.4.2 segue:

$$\begin{aligned} & \int_{+\gamma_R^+(0)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ & \int_{+\gamma_r^+(1)} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)(z - 1)} dz \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} i \frac{e^i \pi}{5}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Allora, per $R \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow 0^+$ in (7.21) e tenuto conto di (7.22), risulta (essendo $e^i = \cos 1 + i \sin 1$):

$$\begin{aligned} & (\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \\ & = \frac{i\pi e^i}{5} - \frac{\pi(2i + 1)}{10e^2} = -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2} + i \left(2\pi \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2} \right). \end{aligned}$$

Il valor principale (7.20) è dato dalla parte immaginaria dell'integrale precedente:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = 2\pi \frac{e^2 \cos 1 - 1}{10e^2}$$

e quindi:

$$(\text{v.p.}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = -\pi \frac{2e^2 \sin 1 + 1}{10e^2}.$$

7.7 Integrali di funzioni polidrome

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

La funzione integranda è integrabile su $[0, +\infty[$ in quanto per $x \rightarrow 0^+$ è infinita di ordine arbitrariamente piccolo e per $x \rightarrow +\infty$ è infinitesima di ordine maggiore di 1. Consideriamo la funzione di variabile complessa:

$$f(z) := \frac{\log z}{z^2 + a^2}$$

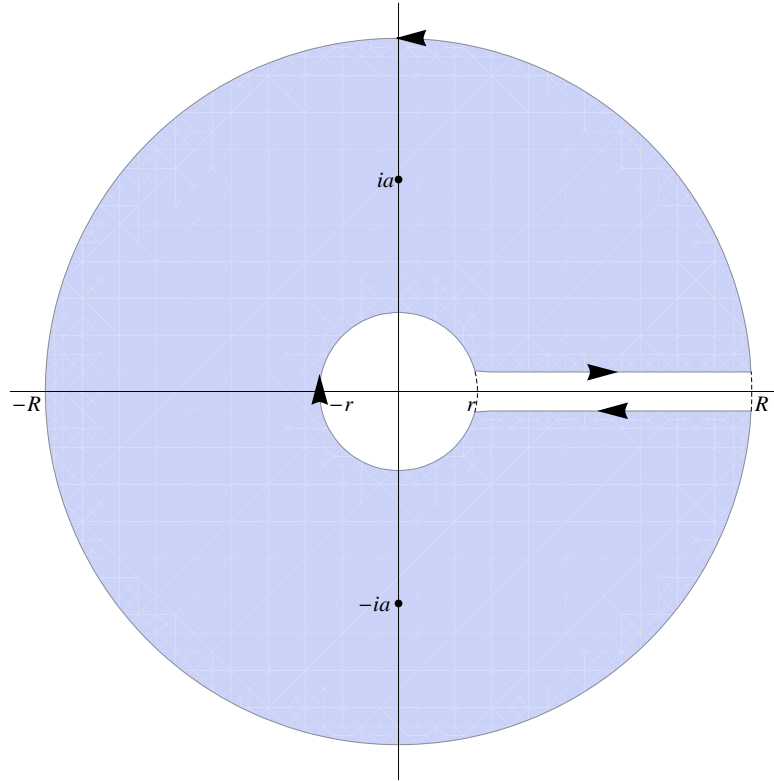
e scegliamo per l'argomento principale di z la limitazione $\text{Arg} z \in [0, 2\pi[$ (cioè \log è definito nell'insieme semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$). Il punto $z = 0$ è di diramazione per la funzione f , che presenta due poli semplici in ia e $-ia$. Consideriamo il dominio regolare D in figura ($r < a < R$).

Applicando il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), -ia)] \quad (7.23)$$

Vale:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), ia) &= \frac{\log a + \frac{\pi}{2} \cdot i}{2ia}, \\ \text{Res}(f(z), -ia) &= -\frac{\log a + \frac{3\pi}{2} \cdot i}{2ia} \end{aligned}$$



da cui:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{\log a + \frac{\pi}{2} \cdot i - \log a - \frac{3\pi}{2} \cdot i}{2ia} = -\frac{\pi^2}{a} i \quad (7.24)$$

Per i teoremi di Jordan del piccolo e grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, per $r \rightarrow 0^+$ e $R \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{-\partial B_r(0)} f(z) dz = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{+\partial B_R(0)} f(z) dz = 0.$$

Perciò, facendo tendere $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$, da (7.23) e (7.24), otteniamo:

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + a^2} dx = -\frac{\pi^2}{a} i$$

dove il secondo addendo al numeratore del secondo integrale è dovuto al fatto che si è compiuto un giro intorno all'origine (punto di diramazione

per la funzione logaritmo naturale). Ora:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log x + 2\pi i}{x^2 + a^2} dx &= - \int_0^{+\infty} \frac{2\pi i}{x^2 + a^2} dx = \\ &= -\frac{2\pi i}{a} \left[\arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} = -\frac{2\pi i}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{a} i \end{aligned}$$

e quindi abbiamo, in conclusione, l'ovvia identità:

$$-\frac{\pi^2}{a} i = -\frac{\pi^2}{a} i$$

e non abbiamo ottenuto informazioni utili al calcolo dell'integrale proposto.

L'analisi di quanto rilevato con la precedente scelta di $f(z)$ porta a considerare la funzione:

$$f(z) := \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2}$$

sullo stesso dominio regolare D . Abbiamo, per il primo teorema dei residui 6.3.1:

$$\int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i [\text{Res}(f(z), ia) + \text{Res}(f(z), -ia)]$$

Vale:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), ia) &= \frac{\log^2 a - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \log a}{2ia}, \\ \text{Res}(f(z), -ia) &= -\frac{\log^2 a - \frac{9}{4}\pi^2 + 3i\pi \log a}{2ia} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz &= 2\pi i \cdot \\ &\cdot \frac{\log^2 a - \frac{\pi^2}{4} + i\pi \log a - \log^2 a + \frac{9}{4}\pi^2 - 3i\pi \log a}{2ia} = \\ &= \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a). \end{aligned}$$

Esplicitando l'integrale a sinistra come somma di integrali sulle quattro curve regolari che formano ∂D , otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz &= \int_r^R \frac{\log^2 x}{x^2 + a^2} dx + \int_{+\partial B_R(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz + \\ &\quad - \int_r^R \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{x^2 + a^2} dx - \int_{+\partial B_r(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz = \\ &= \int_{+\partial B_R(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz - \int_{+\partial B_r(0)} \frac{\log^2 z}{z^2 + a^2} dz + \\ &\quad + \int_r^R \frac{4\pi^2 - 4\pi i \log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a) \end{aligned}$$

Osserviamo che uniformemente rispetto ad $\text{Arg} z$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \cdot f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} z \cdot f(z) = 0$$

quindi, per i teoremi del piccolo e del grande cerchio 7.4.2 e 7.4.1, gli integrali sulle circonferenze tendono a 0 per $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$; ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi^2}{a} (\pi - i \log a) &= \int_0^{+\infty} \frac{4\pi^2 - 4\pi i \log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= 4\pi^2 \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right]_0^{+\infty} - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \\ &= \frac{2\pi^3}{a} - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \end{aligned}$$

L'integrale all'ultimo membro è proprio quello proposto e quindi, con ovvi calcoli:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} \log a.$$

2. Calcoliamo:

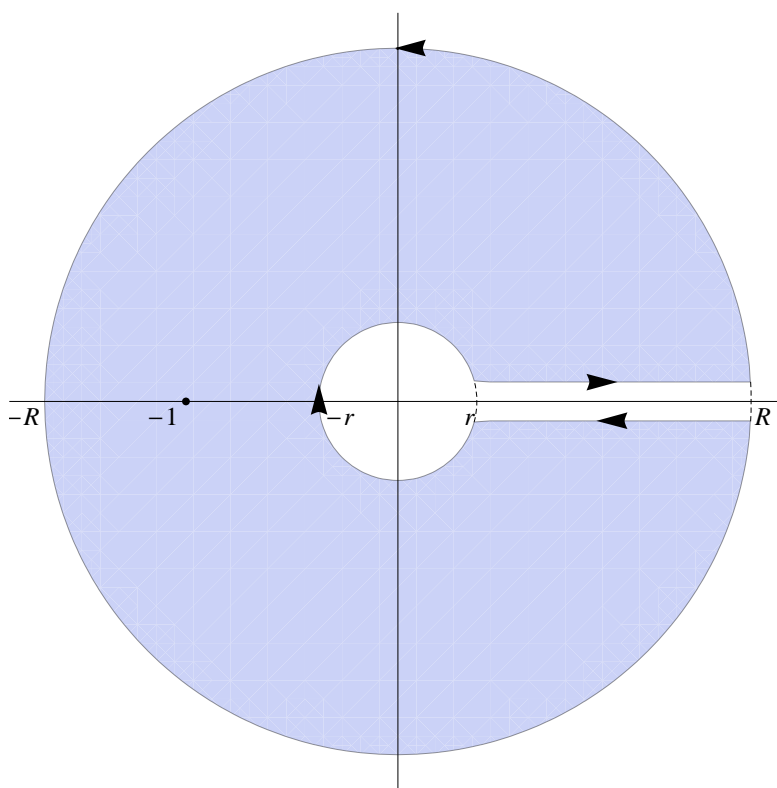
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx \quad (0 < \lambda < 1).$$

Osserviamo che per $x \rightarrow +\infty$ la funzione integranda è un infinitesimo di ordine $2 - \lambda > 1$ e per $x \rightarrow 0^+$ è un infinito di ordine $1 - \lambda < 1$,

pertanto l'integrale converge. Consideriamo la funzione:

$$f(z) := \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}$$

e scegliamo per l'argomento principale di z la limitazione $\text{Arg}z \in [0, 2\pi[$ (cioè \log è definito nell'insieme semplicemente connesso $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$). Il punto $z = 0$ è di diramazione per f , mentre $z = -1$ è un polo del primo ordine. Consideriamo il dominio regolare D in figura (dove $R > 1$ e $r < 1$):



Risulta:

$$\text{Res}(f(z), -1) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} = (-1)^{\lambda-1} = (e^{i\pi})^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)i\pi}$$

Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 applicato a f su D si ha:

$$\begin{aligned} & \int_r^R \frac{e^{(\lambda-1)\log x}}{1+x} dx + \int_{+\partial B_R(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z} dz + \int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x} dx + \\ & + \int_{-\partial B_r(0)} \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z} dz = 2\pi i e^{(\lambda-1)i\pi} \end{aligned} \tag{7.25}$$

Il terzo integrale a primo membro risulta essere:

$$\int_R^r \frac{e^{(\lambda-1)(\log x + 2\pi i)}}{1+x} dx = -e^{(\lambda-1)2\pi i} \int_r^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$$

Osserviamo che, per $|z| = R$:

$$\left| z \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right| \leq \frac{R^\lambda}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

e, per $|z| = r$:

$$\left| z \cdot \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} \right| \leq \frac{r^\lambda}{1-r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

e i due limiti risultano uniformi rispetto ad $\text{Arg}z$. Facendo tendere $r \rightarrow 0$ e $R \rightarrow +\infty$ in (7.25) otteniamo, per i teoremi del grande cerchio 7.4.1 e del piccolo cerchio 7.4.2:

$$2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx - e^{(\lambda-1)2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i}}{1 - e^{(\lambda-1)2\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)} \quad (7.26)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per $e^{(\lambda-1)\pi i}$ e applicando la formula di Eulero per il seno (1.8).

3. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Posto $t := x^{2n}$ (quindi $dt = 2nx^{2n-1}dx$) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2n} \cdot t^{\frac{1}{2n}-1} dt = \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{2n}-1}}{1+t} dt = \\ &= \frac{1}{2n} \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}, \end{aligned}$$

per (7.26) (con $\lambda = 1/2n$).

4. Calcoliamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3} \left(\frac{1}{x} - 1\right)} dx.$$

Posto $t := \frac{1}{x} - 1$ (quindi $dx = -\frac{1}{(1+t)^2} dt$) otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} - 1\right)}} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{\frac{1}{3}}} dx = \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{1}{\frac{1}{t+1} \cdot t^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{(1+t)^2}\right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{1}{3}}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

per (7.26) (con $\lambda = 2/3$).

7.8 Integrali di Fresnel

Due integrali impropri classici sono gli *integrali di Fresnel*:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, \quad \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

Gli zeri della funzione $\cos(t^2)$ in $[0, +\infty[$ sono i punti:

$$t_k = \sqrt{(2k+1)\frac{\pi}{2}}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

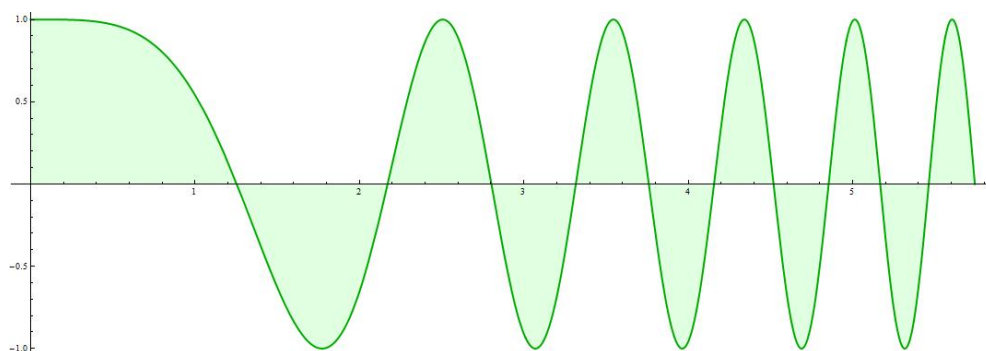


Figura 7.3: Grafico di $\cos(t^2)$; osserviamo che $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$.

Gli zeri di $\sin(t^2)$ in $[0, +\infty[$ sono i punti:

$$t_k = \sqrt{k\pi}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

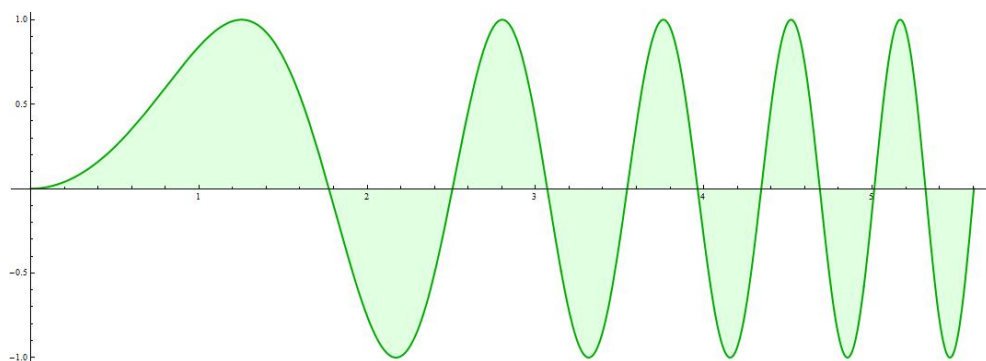


Figura 7.4: Grafico di $\sin(t^2)$; osserviamo che $t_{k+1} - t_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow +\infty$.

Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^{-z^2} \in H(\mathbb{C})$$

e il settore polare chiuso

$$D_R = \left\{ (\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

Sia ora

$$A = \left(R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = R e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Per il teorema dell'integrale nullo di Cauchy 2.8.3:

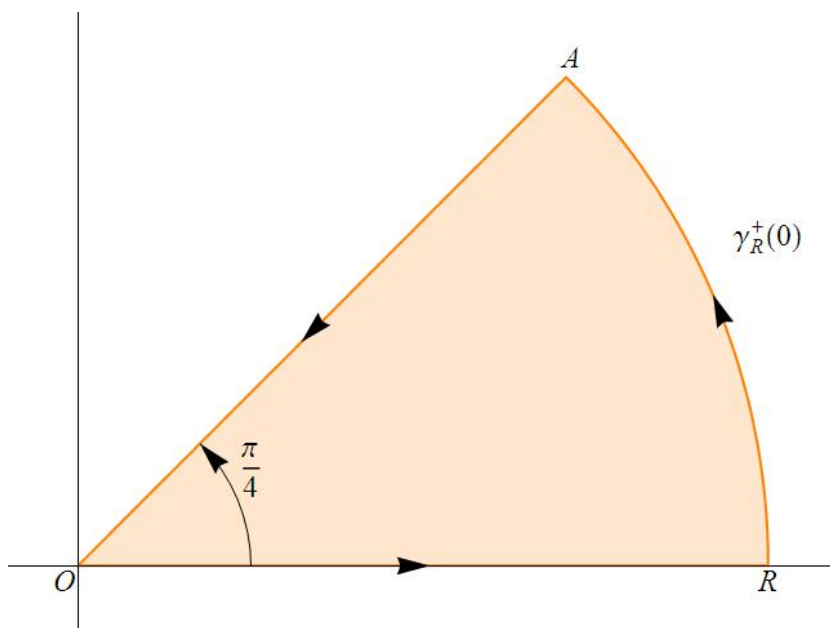
$$\int_{+\partial D_R} e^{-z^2} dz = 0,$$

da cui, suddividendo ∂D_R come in figura:

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz + \int_{+AO} e^{-z^2} dz = 0 \quad (7.27)$$

Poiché $\gamma_R^+(0)$ ha rappresentazione parametrica

$$z = R e^{i\vartheta}, \quad \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right],$$



si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\vartheta}} R i e^{i\vartheta} d\vartheta \right| = \\
 &= \left| \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 (\cos 2\vartheta + i \sin 2\vartheta)} R i e^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \quad (7.28) \\
 &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\vartheta} d\vartheta
 \end{aligned}$$

Poniamo $2\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (quindi $d\vartheta = -\frac{d\varphi}{2}$); da (7.28) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cos 2\vartheta} d\vartheta = \\
 &= -\frac{R}{2} \int_{\pi/2}^0 e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi \leq \\
 &\leq \frac{R}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \left[\frac{e^{-R^2 \frac{2}{\pi} \varphi}}{-R^2 \frac{2}{\pi}} \right]_0^{\pi/2} = \\
 &= \frac{R}{2} \left[\frac{e^{-R^2} - 1}{-R^2 \frac{2}{\pi}} \right] = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}),
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ per ogni $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; di conseguenza:

$$\int_{+\gamma_R^+(0)} e^{-z^2} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Ora, il segmento OA (bisettrice) ha rappresentazione parametrica:

$$z = te^{i\frac{\pi}{4}}, \quad t \in [0, R].$$

Perciò:

$$\begin{aligned} \int_{+AO} e^{-z^2} dz &= \int_R^0 e^{-t^2 e^{i\frac{\pi}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} dt = \int_R^0 e^{-it^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) dt = \\ &= \frac{i+1}{\sqrt{2}} \int_R^0 [\cos(t^2) - i \sin(t^2)] dt = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) + \sin(t^2)] dt - \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^R [\cos(t^2) - \sin(t^2)] dt. \end{aligned}$$

Per $R \rightarrow +\infty$ la (7.27) porta a:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} [\cos(t^2) + \sin(t^2)] dt + \\ &+ \frac{i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} [\cos(t^2) - \sin(t^2)] dt \end{aligned}$$

(osserviamo che, poiché il primo membro è convergente, anche il secondo membro è convergente). Uguagliando parte reale e immaginaria si ottiene il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt - \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = 0 \end{array} \right. ,$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad (7.29)$$

e

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (7.30)$$

1. Calcoliamo:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

Operando il cambio di variabile

$$x = t^2 \quad (dx = 2t dt)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2) + \cos(t^2)}{t} \cdot 2t dt = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} [\sin(t^2) + \cos(t^2)] dt. \end{aligned}$$

Ora, da (7.29) e (7.30):

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt + \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Perciò l'integrale richiesto vale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

7.9 Somma di alcune serie

Definizione 7.9.1 (funzione meromorfa). Un'applicazione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *meromorfa* se è olomorfa in Ω , eccetto che per singolarità polari.

Teorema 7.9.2. Sia f meromorfa in tutto il piano complesso \mathbb{C} avente solo un numero finito di poli z_1, \dots, z_ν , con $z_j \notin \mathbb{Z}$ per ogni $j = 1, \dots, \nu$. Supponiamo $|f(z)| = o(|z|^{-\alpha})$ per $z \rightarrow \infty$, con $\alpha > 1$. Definiamo

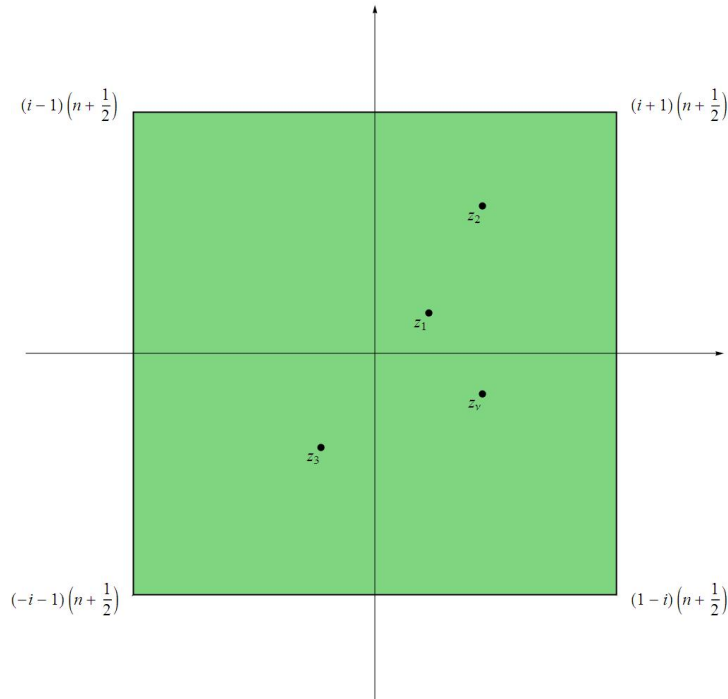
$$g(z) := \pi f(z) \cot(\pi z), \quad h(z) := \frac{\pi f(z)}{\sin(\pi z)}.$$

Allora

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j), \quad (7.31)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = - \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(h(z), z_j). \quad (7.32)$$

Dimostrazione. Proviamo l'uguaglianza (7.31) (la (7.32) si prova analogamente). Sia n un intero positivo sufficientemente grande, tale che γ_n sia il bordo del quadrato di vertici $\left(n + \frac{1}{2}\right)(1+i)$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1+i)$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1-i)$, $\left(n + \frac{1}{2}\right)(1-i)$, contenente tutti i poli di f .



Per il primo Teorema dei residui 6.3.1 si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^n \text{Res}(g(z), k).$$

Poiché g ha poli semplici in ciascun $z = k$, si ha

$$\text{Res}(g(z), k) = \lim_{z \rightarrow k} \left[(z - k) \cdot \pi f(z) \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right] = f(k),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dall'applicazione del Teorema di L'Hôpital alla funzione $\frac{\pi(z-k)}{\sin(\pi z)}$. Pertanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = \sum_{j=1}^{\nu} \text{Res}(g(z), z_j) + \sum_{k=-n}^n f(k)$$

e quindi conseguiremo la tesi se dimostriamo che

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{+\gamma_n} g(z) dz = 0.$$

A tal fine, proviamo che esiste una costante positiva A , indipendente da n , tale che $|\cot(\pi z)| \leq A$ per ogni $|z| > n$.

Sia allora $z = x + iy$, quindi $i\pi z = i\pi x - \pi y$; risulta

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se $y \geq \frac{1}{2}$.

Analogamente, si ha

$$|\cot(\pi z)| \leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{-\pi y} - e^{\pi y}} = \frac{1 + e^{2\pi y}}{1 - e^{2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}},$$

se $y \leq -\frac{1}{2}$.

Ora, siano $-\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}$ e $z = n + \frac{1}{2} + iy$. Allora risulta

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &= \left| \cot \left(\pi \left(n + \frac{1}{2} + iy \right) \right) \right| = \left| \cot \left(\frac{\pi}{2} + i\pi y \right) \right| = \\ &= |\tanh(\pi y)| \leq \tanh \left(\frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

poiché la funzione $\tanh(\pi y)$ ha derivata positiva e quindi è monotona crescente.

Se $z = -n - \frac{1}{2} + iy$, si ha

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &= \left| \cot \left(\pi \left(-n - \frac{1}{2} + iy \right) \right) \right| = \left| \cot \left(-\frac{\pi}{2} + i\pi y \right) \right| = |\tanh(\pi y)| \leq \\ &\leq \tanh \left(\frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Posto

$$A := \max \left\{ \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}, \tanh \left(\frac{\pi}{2} \right) \right\},$$

si ha $|\cot(\pi z)| \leq A$ su γ_n , dove A è indipendente da n . Di conseguenza, per l'ipotesi su f , si ha

$$\left| \int_{+\gamma_n} g(z) dz \right| = \left| \int_{+\gamma_n} \pi f(z) \cot(\pi z) dz \right| \leq \pi \cdot o(n^{-\alpha}) \cdot A \cdot \underbrace{(8n + 4)}_{l(\gamma_n)},$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per $n \rightarrow +\infty$. Ciò conclude la dimostrazione. \square

Il Teorema 7.9.2 consente di calcolare la somma di alcune serie bilatere, calcolando la somma dei residui di particolari funzioni ausiliarie.

1. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2};$$

$z = \pm ia$ sono poli semplici per f . Detta

$$g(z) = \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z),$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g(z), ia) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{\pi}{(z - ia)(z + ia)} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a); \\ \operatorname{Res}(g(z), -ia) &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \frac{\pi}{z^2 + a^2} \cot(\pi z) = \\ &= \lim_{z \rightarrow -ia} (z + ia) \frac{\pi}{(z - ia)(z + ia)} \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\ &= -\frac{\pi}{2a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

2. Calcoliamo la somma della serie

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k + a)^2}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Consideriamo

$$f(z) = \frac{1}{(z+a)^2};$$

$z = -a$ è un polo del secondo ordine per f . Detta

$$h(z) = \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)},$$

calcoliamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(h(z), -a) &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left[(z+a)^2 \frac{\pi}{(z+a)^2 \sin(\pi z)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow -a} \frac{d}{dz} \left[\frac{\pi}{\sin(\pi z)} \right] = -\frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)} \end{aligned}$$

Per il teorema 7.9.2 possiamo concludere:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \frac{\pi^2 \cos(\pi a)}{\sin^2(\pi a)}.$$

7.10 Indicatore logaritmico. Principio dell'argomento. Teorema di Rouché. Un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra

Uno dei più eleganti risultati della Teoria dei residui riguarda l'indicatore logaritmico.

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Ω , allora la funzione $\frac{f'(z)}{f(z)}$ si chiama *derivata logaritmica* di f (vedi (2.9)) e risulta olomorfa negli stessi punti di $f(z)$, purché $f(z) \neq 0$.

Lemma 7.10.1.

- (i) *Se z_0 è uno zero di ordine ν per f , allora la derivata logaritmica di f ha un polo del primo ordine in z_0 , con residuo*

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = \nu;$$

- (ii) se z_0 è un polo di ordine p per f , allora la derivata logaritmica di f ha un polo del primo ordine in z_0 , con residuo

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = -p.$$

Dimostrazione.

- (i) Per ipotesi, esistono un intorno di z_0 ed una funzione g , ivi olomorfa, tali che

$$f(z) = (z - z_0)^\nu g(z),$$

con $g(z_0) \neq 0$. Allora

$$f'(z) = \nu(z - z_0)^{\nu-1}g(z) + (z - z_0)^\nu g'(z),$$

da cui (nell'intorno di z_0 , privato di z_0):

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\nu}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte singolare e la parte regolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di f , perciò z_0 è un polo semplice e risulta:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_0 \right) = a_{-1} = \nu.$$

- (ii) Per ipotesi z_0 è polo di ordine p per f , pertanto lo sviluppo di Laurent (in un intorno di z_0 , privato di z_0), è dato da:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^p a_{-k} (z - z_0)^{-k},$$

con $a_{-p} \neq 0$. Ne segue che:

$$f(z)(z - z_0)^p = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^{k+p} + \sum_{k=1}^p a_{-k} (z - z_0)^{-k+p} =: g(z) \text{ (olomorfa)}.$$

Ora, $g(z_0) = a_{-p} \neq 0$ e

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^p}.$$

Calcoliamo:

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z - z_0)^p - g(z)p(z - z_0)^{p-1}}{(z - z_0)^{2p}},$$

da cui:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{p}{z - z_0}.$$

Il primo e il secondo addendo rappresentano rispettivamente la parte regolare e la parte singolare della serie di Laurent della derivata logaritmica di f , perciò z_0 è un polo semplice e risulta:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = a_{-1} = -p.$$

□

Teorema 7.10.2 (dell'indicatore logaritmico). *Sia $f(z)$ meromorfa in Ω e sia $D \subset \Omega$ un dominio regolare. $f(z)$ abbia in $\overset{\circ}{D}$ solo un numero finito di poli β_1, \dots, β_s , con ordini di molteplicità p_1, \dots, p_s ; inoltre, sia $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \partial D$ ed $f(z)$ abbia in $\overset{\circ}{D}$ gli zeri $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ con ordini di molteplicità ν_1, \dots, ν_r . Allora:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f, \quad (7.33)$$

dove Z_f e P_f sono rispettivamente il numero degli zeri e dei poli di f in $\overset{\circ}{D}$, contati con la loro molteplicità.

Dimostrazione. Alla derivata logaritmica di f possiamo applicare il primo Teorema dei residui 6.3.1 nel dominio regolare D e otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \sum_{j=1}^r \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \alpha_j\right) + \sum_{h=1}^s \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, \beta_h\right) = \\ &= \sum_{j=1}^r \nu_j + \sum_{h=1}^s (-p_h) = \sum_{j=1}^r \nu_j - \sum_{h=1}^s p_h = \\ &= Z_f - P_f, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il lemma 7.10.1 applicato ai poli semplici di f'/f , α_j e β_h ($j = 1, \dots, r$, $h = 1, \dots, s$). □

L'integrale che compare al primo membro di (7.33) si chiama *indicatore logaritmico* di f .

Il precedente teorema in letteratura è noto anche come *Principio dell'argomento*. Vediamo perché.

Supponiamo che ∂D sia formata da un'unica curva regolare γ semplice e chiusa di equazione parametrica

$$z = z(t), \quad t \in [a, b],$$

con $z(a) = z(b)$. Risulta

$$\begin{aligned} Z_f - P_f &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{d}{dz} [\log(f(z))] dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} [\log(f(z))]_{z(a)}^{z(b)} = \frac{1}{2\pi i} [\log|f(z)| + i\text{Arg}(f(z))]_{z(a)}^{z(b)} = \\ &= \frac{[\text{Arg}(f(z))]_{+\gamma}}{2\pi}, \end{aligned}$$

cioè, la differenza tra il numero di zeri e quello di poli di $f(z)$ in \mathring{D} è data dalla variazione dell'argomento principale di $f(z)$ lungo γ percorsa nel verso positivo, moltiplicata per il fattore $1/2\pi$.

Teorema 7.10.3 (di Rouché). *Siano f e g meromorfe in Ω .*

Se $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \gamma$, dove γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in Ω , e se f e g non hanno né zeri né poli su γ , allora:

$$Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g},$$

dove Z_f e Z_{f+g} (rispettivamente P_f e P_{f+g}) indicano il numero finito di zeri (rispettivamente di poli) di f e $f+g$ dentro γ , contati con la loro molteplicità.

Dimostrazione. Osserviamo che $f+g$ non ha zeri su γ . Infatti, se $z_0 \in \gamma$ fosse uno zero di $f+g$, si avrebbe:

$$f(z_0) + g(z_0) = 0 \Rightarrow f(z_0) = -g(z_0) \Rightarrow |f(z_0)| = |g(z_0)|,$$

il che è in contraddizione con l'ipotesi. Ora, la funzione $|f| - |g|$ è continua sul compatto γ , quindi, per il teorema di Weierstrass:

$$\exists m > 0 \text{ t.c. } |f(z)| - |g(z)| \geq m \quad \forall z \in \gamma.$$

Sia $\lambda \in [0, 1]$. Risulta

$$|f(z) + \lambda g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| \geq m > 0 \quad \forall z \in \gamma;$$

allora l'integrale

$$I(\lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f'(z) + \lambda g'(z)}{f(z) + \lambda g(z)} dz$$

è ben definito. Osserviamo che, per 7.10.2, $I(0) = Z_f - P_f$ e $I(1) = Z_{f+g} - P_{f+g}$: se proviamo che $I(\lambda)$ è costante in $[0, 1]$, conseguiremo la tesi.

Per il Teorema 7.10.2

$$I(\lambda) = Z_{f+\lambda g} - P_{f+\lambda g} \in \mathbb{Z} \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

e quindi l'applicazione $\lambda \mapsto I(\lambda)$, continua sul connesso $[0, 1]$, assume valori interi relativi: pertanto $I(\lambda)$ è necessariamente costante in $[0, 1]$. Da ciò segue $I(0) = I(1)$, ovvero la tesi. \square

Corollario 7.10.4. *Siano $f, g \in H(\Omega)$. Se $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \gamma$, dove γ è una curva generalmente regolare, semplice e chiusa, con sostegno contenuto in Ω , allora*

$$Z_f = Z_{f+g}$$

(cioè f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri dentro γ , contati con la loro molteplicità).

Dimostrazione. Poiché $f, f + g \in H(\Omega)$, si ha $P_f = P_{f+g} = 0$; applicando 7.10.3 si ottiene la tesi. \square

1. Calcoliamo quanti zeri ha il polinomio

$$P(z) = z^5 - 2z + 16$$

nella corona circolare aperta

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Definiamo:

$$f(z) := 16, \quad g(z) := z^5 - 2z$$

Sulla circonferenza $|z| = 1$ si ha:

$$|g(z)| = |z^5 - 2z| = |z^4 - 2| \leq |z^4| + 2 = 3 < 16 = |f(z)|.$$

Su $B_1(0)$ le funzioni f e g verificano le ipotesi di 7.10.4, pertanto $f(z) + g(z) = P(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f(z) = 16$ nel disco unitario; quindi non c'è alcuno zero di $P(z)$ in $B_1(0)$.

Siano ora

$$f(z) := z^5, \quad g(z) := 16 - 2z.$$

Osserviamo che sulla circonferenza $|z| = 2$ si ha:

$$|g(z)| = |16 - 2z| \leq 16 + |2z| \leq 16 + 4 = 20 < 32 = |f(z)|.$$

In $B_2(0)$ le funzioni soddisfano le ipotesi di 7.10.4, pertanto $f(z) + g(z) = P(z)$ ha lo stesso numero di zeri di $f(z) = z^5$ nel disco $B_2(0)$; in questo caso $f(z)$ ha uno zero di molteplicità 5 in $z = 0 \in B_2(0)$, perciò $P(z)$ ha 5 zeri in $B_2(0)$.

Possiamo allora concludere che il polinomio $P(z)$ ha tutti gli zeri in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Teorema 7.10.5 (di Hurwitz). *Sia $f_n \in H(\Omega)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$ e $f_n \rightrightarrows f$ sui compatti contenuti in Ω .*

Allora $f \equiv 0$ in Ω o $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in \Omega$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che f non sia identicamente nulla su Ω e che abbia uno zero isolato in $z_0 \in \Omega$. Sia $r > 0$ tale che

$$|f(z)| \geq m > 0 \quad \forall z \in \partial B_r(z_0).$$

Poiché $f_n \rightrightarrows f$ sui compatti di Ω , in particolare su $\partial B_r(z_0)$, abbiamo:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} \quad \forall z \in \partial B_r(z_0)$$

per n sufficientemente grande. Allora, per un tale n , si ha:

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{m}{2} < m \leq |f(z)| \quad \forall z \in \partial B_r(z_0).$$

Applicando il corollario 7.10.4 a $f_n - f$ e f , abbiamo che f e $(f_n - f) + f = f_n$ hanno lo stesso numero di zeri in $B_r(z_0)$. Questo contraddice l'ipotesi che f_n non ha zeri in Ω . \square

Diamo ora un'altra dimostrazione del Teorema fondamentale dell'Algebra, usando 7.10.4.

Teorema 7.10.6 (fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ha n radici in \mathbb{C} , contate con la loro molteplicità.*

Dimostrazione. Consideriamo il polinomio:

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_n \neq 0$$

e definiamo:

$$f(z) := z^n, \quad g(z) := \frac{1}{a_n} (a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}).$$

Osserviamo che $P(z) = a_n [f(z) + g(z)]$; poiché

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| = 0,$$

allora

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } \left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \quad \forall |z| \geq R.$$

In particolare, sulla circonferenza $|z| = R$ si ha $|g(z)| < |f(z)|$; allora, per [7.10.4](#), le funzioni f e $P = a_n [f + g]$ hanno lo stesso numero di zeri in $B_R(0)$. Ora, la funzione $f(z) = z^n$ ha n zeri nell'intero piano complesso; ne segue che anche $P(z)$ ha in \mathbb{C} n radici, contate con la loro molteplicità. \square

