Capitolo 3

Olomorfia e analiticità

3.1 Olomorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi. Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa

Lemma 3.1.1. *Sia $\varphi(z,t)$ continua nelle due variabili z (complessa) e t (reale). Sia γ una curva generalmente regolare il cui sostegno sia contenuto nel dominio di definizione di φ. Allora, se φ è C^1 nella variabile t, la funzione di t:*

$$\Phi(t) := \int_\gamma \varphi(z,t)\, dz$$

è C^1 nella variabile t e la sua derivata è data da:

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi(z,t)}{\partial t}\, dz.$$

Dimostrazione. Fissiamo t_0 e consideriamo il rapporto incrementale:

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_\gamma [\varphi(z,t) - \varphi(z,t_0)]\, dz$$

(a) Se φ è a valori in $\mathbb{R}$, per il Teorema del valor medio esiste t_z, dipendente da z e compreso tra t e t_0, tale che:

$$\frac{\varphi(z,t) - \varphi(z,t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial \varphi(z,t_z)}{\partial t}$$

Allora:
$$\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}=\int_\gamma \frac{\partial\varphi(z,t_z)}{\partial t}\,dz$$

Ne segue:
$$\left|\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}-\int_\gamma \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}\,dz\right| \le \int_\gamma \left|\frac{\partial\varphi(z,t_z)}{\partial t}-\frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}\right| |dz| \quad (3.1)$$

Per la uniforme continuità di $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ su $\gamma\times[t_0,t]$, si può applicare il teorema di passaggio al limite per $t\to t_0$ sotto il segno d'integrale al secondo membro della (3.1) e si ha:
$$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{\Phi(t)-\Phi(t_0)}{t-t_0}-\int_\gamma \frac{\partial\varphi(z,t)}{\partial t}\,dz\right|=0.$$

Dunque esiste il limite che definisce $\dfrac{d\Phi}{dt}(t_0)$: la tesi segue per l'arbitrarietà di t_0.

(b) Se $\varphi=u+iv$, si applica il punto (a) separatamente a u e v.

Inoltre, la continuità di $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$ implica la continuità di $\dfrac{d\Phi}{dt}$. □

Proposizione 3.1.2 (Olomorfia di integrali curvilinei rispetto a parametri complessi)**.** *Sia $\varphi(z,\zeta)$ continua nella variabile z (complessa) e olomorfa nella variabile $\zeta=\xi+i\eta$. Supponiamo che $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}(z,\zeta)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}(z,\zeta)$ siano continue. Sia γ una curva generalmente regolare il cui sostegno sia contenuto nel dominio di definizione di φ. Allora l'integrale curvilineo:*
$$\Phi(\zeta):=\int_\gamma \varphi(z,\zeta)\,dz$$
è una funzione olomorfa rispetto a ζ ed ha derivata in senso complesso:
$$\Phi'(\zeta)=\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}\,dz=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\zeta}\,dz.$$

Dimostrazione. Applichiamo 3.1.1, prima con $t=\xi$ e poi con $t=\eta$, all'integrale che definisce $\Phi(\zeta)$; otteniamo:
$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}\,dz,\qquad \frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\eta}=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\eta}\,dz$$

da cui:
$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}+i\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\eta}=\int_\gamma\left[\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}+i\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\eta}\right]dz. \tag{3.2}$$
Per l'ipotesi di olomorfia di $\varphi(z,\zeta)$ rispetto a ζ risulta (condizioni di monogeneità in forma complessa):
$$\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}+i\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\eta}=0.$$
Sostituendo nell'integrale al secondo membro di (3.2) otteniamo:
$$\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}+i\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\eta}=0$$
cioè Φ verifica le condizioni di monogeneità in forma complessa. Inoltre $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}$ sono continue per ipotesi: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}$ e $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\eta}$ risultano C^0, dunque Φ è C^1. Per la caratterizzazione delle funzioni olomorfe (Teorema di Cauchy-Riemann 2.1.6), Φ è olomorfa e, per la sua derivata in senso complesso, si ha:
$$\Phi'(\zeta)=\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi}=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}\,dz=\int_\gamma\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\zeta}\,dz,$$
osservato che:
$$\Phi'(\zeta)=\frac{\partial\Phi(\zeta)}{\partial\xi},\qquad\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\xi}=\frac{\partial\varphi(z,\zeta)}{\partial\zeta}.$$
□

La proposizione precedente è utile per provare la formula integrale per le derivate di una funzione olomorfa, a partire dalla sua rappresentazione integrale di Cauchy.

Teorema 3.1.3 (Formula integrale di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa)**.**
Siano $f\in H(\Omega)$ e $D\subset\Omega$ un dominio regolare. Allora:
$$f^{(k)}(\zeta)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}\,dz\qquad\forall\,k\in\mathbb{N}_0,\forall\,\zeta\in\mathring{D} \tag{3.3}$$
Dimostrazione. Per il Teorema di Goursat, $f\in C^\infty(\Omega)$. Procediamo per induzione su $k\in\mathbb{N}_0$. Per $k=0$ la tesi è vera, come provato in 2.8.4:
$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz\qquad\forall\,\zeta\in\mathring{D}.$$

Per $k = 1$, per la proposizione 3.1.2:

$$f'(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\zeta}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(z)}{z-\zeta}\right)dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^2}\,dz$$

Supponiamo vera la tesi per $k = n-1$:

$$f^{(n-1)}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^n}\,dz$$

Allora, per la proposizione 3.1.2:

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{d}{d\zeta}f^{(n-1)}(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{f(z)}{(z-\zeta)^n}\right)dz =$$
$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_{+\partial D}\frac{f(z)}{(z-\zeta)^{n+1}}\,dz$$

Dunque la tesi è valida per $k = n$, il che prova il teorema per induzione. □

1. Provare che:

$$\int_{|z|=r}\frac{\sin z}{z^2}\,dz = 2\pi i;$$
$$\int_{|z|=r}\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i.$$

3.2 Serie di potenze in $\mathbb{C}$

La teoria della successioni e serie di funzioni di variabile complessa non presenta novità rispetto al caso reale. Valgono le nozioni di convergenza puntuale e uniforme per le successioni di funzioni e di convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale per le serie di funzioni complesse, basta utilizzare il modulo al posto del valore assoluto. Per lo studio delle funzioni olomorfe è fondamentale lo studio delle serie di potenze in campo complesso.

Definizione 3.2.1 (serie di potenze in $\mathbb{C}$)**.** Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ una successione di numeri complessi e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. La serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(z-z_0)^k \tag{3.4}$$

si dice *serie di potenze* con coefficienti a_k e di punto iniziale z_0.

Si definisce il *raggio di convergenza* ρ di (3.4) come segue:

$$\rho := \sup \left\{ r \in [0, +\infty[\, : \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k < +\infty \right\}$$

Come nel caso reale $\rho \in [0, +\infty]$. Vale il seguente teorema.

Teorema 3.2.2 (Proprietà delle serie di potenze in $\mathbb{C}$). *Data la serie di potenze (3.4) di raggio di convergenza $\rho \in [0, +\infty]$ valgono:*

(i) se $\rho = 0$ allora la serie (3.4) converge solo per $z = z_0$;

(ii) se $\rho = +\infty$ allora la serie (3.4) converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ e converge totalmente in ogni disco $B_r(z_0)$;

(iii) se $0 < \rho < +\infty$ allora la serie (3.4) converge assolutamente per ogni $z \in B_\rho(z_0)$ (disco di convergenza), converge totalmente in ogni intorno chiuso di z_0 contenuto in $B_\rho(z_0)$ e non converge per alcuno z tale che $|z - z_0| > \rho$;

(iv) posto $l := \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$, si ha $\rho = 1/l$, con le convenzioni che se $l = 0$ allora $\rho = +\infty$ e se $l = +\infty$ allora $\rho = 0$. Da questa formula segue che anche la serie derivata di (3.4) ha raggio di convergenza ρ.

Osserviamo che, se $a_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed esiste $\lim_{k\to+\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = l$, allora il raggio di convergenza della serie (3.4) è $\rho = 1/l$ (con la usuale convenzione).

3.3 Teorema di Taylor. Teorema di convergenza di Weierstrass. Olomorfia della somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza

Definizione 3.3.1 (funzione analitica). Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; f si dice *analitica* in Ω se:

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \exists\, R > 0 \quad \text{e} \quad \exists\, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \quad \text{t.c.}$$

$$\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega \quad \text{e} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \forall\, z \in B_R(z_0).$$

Quindi una funzione è analitica se si può esprimere localmente come somma di una serie di potenze.

Teorema 3.3.2 (di Taylor)**.** *Sia $f \in H(\Omega)$. Allora f è analitica in Ω e per ogni $\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$ si ha:*

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\zeta - z_0)^k \quad \forall\, \zeta \in B_R(z_0)$$

dove:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Dimostrazione. Per 2.8.4 risulta:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz \qquad \forall\, \zeta \in B_R(z_0).$$

Si ha:

$$\frac{f(z)}{z - \zeta} = \frac{f(z)}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \tag{3.5}$$

Poiché $z \in \partial B_R(z_0)$, si ha $|z - z_0| = R$; inoltre $|\zeta - z_0| < R$, perciò:

$$\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

Dunque, tornando alla (3.5), riconosciamo nel secondo fattore all'ultimo membro la somma della serie geometrica (nella variabile z)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

Sostituendo in (3.5) otteniamo la rappresentazione in serie di potenze del nucleo di Cauchy:

$$\frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

da cui:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - \zeta}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k dz$$

Sia ora

$$h := \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

Allora, per il Teorema del Weierstrass applicato a $|f|$ sul compatto $\partial B_R(z_0)$:

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k \right| \leq \frac{|f(z)|}{R} \sum_{k=0}^{+\infty} h^k \leq \left(\max_{z \in \partial B_R(z_0)} |f(z)| \right) \frac{1}{R} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} h^k$$

La serie integranda è dominata da una serie numerica convergente: per il criterio di Weierstrass essa è totalmente e quindi uniformemente convergente rispetto a z e si può integrare per serie. Ne segue che:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} \cdot \frac{(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^k} \, dz = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz \right) (\zeta - z_0)^k \right] = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (\zeta - z_0)^k, \end{aligned}$$

per il teorema 3.1.3. □

Proposizione 3.3.3. *Se D è un dominio regolare e $f \in C^0(\partial D)$, la funzione definita da:*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - \zeta} \, dz \qquad \forall\, \zeta \in \mathring{D},$$

è olomorfa in $\mathring{D}$.

Dimostrazione. Segue da 2.8.5 e da 3.1.2. □

Teorema 3.3.4 (di convergenza di Weierstrass)**.** *Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni olomorfe in Ω. Supponiamo che per ogni dominio regolare $D \subseteq \Omega$ risulti $f_n \rightrightarrows f$ su D. Allora $f \in H(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $D \subseteq \Omega$ un dominio regolare. Per il Teorema di rappresentazione integrale di Cauchy applicato a ciascuna f_n si ha:

$$f_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f_n(z)}{z - \zeta} \, dz \qquad \forall\, \zeta \in \mathring{D}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ora, su $\partial D \subset D$, si ha $f_n \rightrightarrows f$ (continua), perciò è possibile effettuare il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$f(\zeta) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f_n(z)}{z-\zeta}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(z)}{z-\zeta}\, dz =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z-\zeta}\, dz \qquad \forall\, \zeta \in \mathring{D}.$$

Dalla proposizione 3.3.3, $f \in H(\mathring{D})$ e dunque, per l'arbitrarietà di D, $f \in H(\Omega)$. □

Teorema 3.3.5 (olomorfia della (funzione) somma di una serie di potenze nel disco aperto di convergenza)**.** *Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e poniamo:*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Sia ρ il raggio di convergenza positivo (incluso $\rho = +\infty$) della serie. Allora:

(i) *$S(z)$ è olomorfa nel disco aperto di convergenza $B_\rho(z_0)$;*

(ii) *gli a_k sono i coefficienti della serie di Taylor di punto iniziale z_0 di $S(z)$ in quanto:*

$$a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Dimostrazione. Consideriamo, per ogni $n \in \mathbb{N}_0$:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k.$$

$S_n(z)$ è un polinomio in z, dunque è una funzione olomorfa. Sia ora $0 < R < \rho$; allora la successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge totalmente, quindi uniformemente, a S in $\overline{B}_R(z_0)$. Poiché $S(z) = \lim_{n\to+\infty} S_n(z)$, per il Teorema di Weierstrass 3.3.4 $S(z)$ è olomorfa in $B_\rho(z_0)$. Resta così provata (i). Si ha, per $z \in B_\rho(z_0)$:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}$$
$$\vdots$$
$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}.$$

Dunque:

$$S^{(k)}(z_0) = a_k k! \ \Rightarrow \ a_k = \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}$$

Perciò:

$$S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k,$$

e questo prova (ii). □

Dai teoremi 3.3.2 e 3.3.5 segue che una funzione risulta olomorfa se e solo se essa è analitica.

Diamo ora gli *sviluppi in serie di Taylor (di M^cLaurin) di alcune funzioni elementari nel campo complesso.*

1. Funzione esponenziale:

$$\boldsymbol{e^z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

2. Funzione seno:

$$\mathbf{sin}\ \boldsymbol{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

3. Funzione coseno:

$$\mathbf{cos}\ \boldsymbol{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

4. Funzione seno iperbolico:

$$\mathbf{sinh}\ \boldsymbol{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

5. Funzione coseno iperbolico:

$$\mathbf{cosh}\ \boldsymbol{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

6. Serie geometrica:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \qquad \forall\, |z| < 1$$

7.

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^k \qquad \forall\, |z| < 1$$

8.

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{2k} \qquad \forall\, |z| < 1$$

9.

$$\mathbf{Log\ (1+z)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{k+1}}{k+1} \qquad \forall\, |z| < 1$$

10. Funzione logaritmo principale di z:

$$\mathbf{Log\ z} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1} \qquad \forall\, |z-1| < 1$$

Proposizione 3.3.6 (disuguaglianza di Cauchy per le derivate di una funzione olomorfa)**.** *Siano* $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ *e* $\overline{B}_R(z_0) \subset \Omega$*. Allora esiste* $M_R > 0$ *tale che:*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} \cdot M_R.$$

Dimostrazione. Sia $D := \overline{B}_R(z_0)$. Risulta, per 3.1.3:

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}}\, dz \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0, \forall\, \zeta \in \mathring{D}$$

Per $\zeta = z_0$:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

da cui:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{+\partial D} \frac{|f(z)|}{R^{k+1}}\, |dz|$$

Poiché $|f|$ è continua sul compatto ∂D, esiste $\max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|$; perciò:

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} \left(\max_{|z-z_0|=R} |f(z)| \right) \frac{1}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R$$

Semplificando e ponendo $M_R := \max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z)|$ otteniamo la tesi. $\square$

3.4 Prodotto e divisione di serie di potenze

1. *Serie di potenze del prodotto di due funzioni olomorfe*
Siano $f_1 \in H(B_{r_1}(0))$ e $f_2 \in H(B_{r_2}(0))$. Rappresentiamo localmente le funzioni f_1 e f_2 rispettivamente con le serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$$

Il prodotto $f_1 \cdot f_2$ localmente (nel disco aperto più piccolo) può essere rappresentato dalla serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k,$$

dove i c_k sono dati da:

$$c_k = \frac{(f_1 \cdot f_2)^{(k)}(0)}{k!}.$$

Osserviamo che

$$(f_1 \cdot f_2)^{(k)}(z) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} f_1^{(\nu)}(z) f_2^{(k-\nu)}(z)$$

(per la formula di Leibniz per le derivate successive del prodotto di funzioni). Poiché:

$$\binom{k}{\nu} = \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} \text{ e } f_1^{(\nu)}(0) = \nu! \cdot a_\nu, \quad f_2^{(k-\nu)}(0) = (k-\nu)! \cdot b_{k-\nu}$$

segue che:

$$\begin{aligned} c_k =& \sum_{\nu=0}^{k} \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} \cdot \nu! \cdot a_\nu \cdot (k-\nu)! \cdot b_{k-\nu} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 \end{aligned}$$

cioè i c_k sono i coefficienti del prodotto secondo Cauchy delle due serie iniziali. Quindi la serie di potenze che rappresenta localmente il prodotto $f_1 \cdot f_2$ è data dal prodotto secondo Cauchy delle serie di potenze che rappresentano localmente f_1 e f_2 rispettivamente.

2. *Divisione di serie di potenze*
Siano

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \ldots$$

con raggio di convergenza r_1 e

$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k + \ldots \tag{3.6}$$

con raggio di convergenza r_2. Supponiamo $b_0 \neq 0$. Allora esiste $r_3 > 0$ tale che, per $|z| < r_3$, convergono entrambe le serie e la serie (3.6) non ha zeri in questo disco. Infatti, sia z_0 uno zero di (3.6) con distanza minima dall'origine; definiamo:

$$r_3 := \min \{r_1, r_2, |z_0|\} .$$

Tale r_3 soddisfa le richieste. Consideriamo ora

$$f(z) := \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots} \quad \forall\, |z| < r_3.$$

$f \in H(B_{r_3}(0))$; perciò esiste $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ tale che $f(z)$ può essere espressa localmente con la serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots .$$

Un modo per ottenere i coefficienti c_k (più realisticamente, i primi coefficienti c_k) è di scrivere:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

da cui:

$$(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots .$$

Perciò per trovare i coefficienti c_k andrà risolto il sistema:

$$\begin{cases} c_0 b_0 = a_0 \\ c_0 b_1 + c_1 b_0 = a_1 \\ c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 = a_2 & \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0 \\ \vdots \\ c_0 b_k + c_1 b_{k-1} + \ldots + c_k b_0 = a_k \end{cases}$$

3. (Sviluppo in serie di Taylor della funzione tangente). Consideriamo la funzione

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Per trovare i coefficienti c_k di $\tan z$ eguagliamo:

$$\frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Impostiamo e risolviamo il sistema (con a_k e b_k coefficienti delle serie di Taylor rispettivamente di $\sin z$ e $\cos z$):

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 - \frac{1}{2!} = -\frac{1}{3!} \\ c_4 = 0 \\ c_5 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{1}{5!} \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = \frac{1}{3} \\ c_4 = 0 \\ c_5 = \frac{2}{15} \\ \dots \end{cases}$$

Osseviamo che i c_{2k} sono nulli, essendo $\tan z$ funzione dispari. In definitiva:

$$\boldsymbol{\tan z} = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots \quad \forall\, |z| < \frac{\pi}{2}.$$

4. Consideriamo la funzione

$$\frac{1}{\cos z}, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

e calcoliamone i coefficienti c_k della serie di Taylor a partire da:

$$(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots) = 1, \quad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

da cui il sistema:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ -\frac{1}{2!} + c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ \frac{1}{4!} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} + c_4 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = 0 \\ c_4 = \frac{5}{24} \\ \dots \end{cases}$$

Notiamo che i c_{2k+1} sono nulli, poiché la funzione è pari. In definitiva:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\cos} \boldsymbol{z}} = 1 + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{5}{4!}z^4 + \cdots \quad \forall\, |z| < \frac{\pi}{2}.$$