CAPITOLO 10

La trasformata di Fourier

10.1 La trasformata di Fourier in $\mathbf{L^1}(\mathbb{R}^\mathbf{N})$

Daremo ora una introduzione alla teoria della trasformata di Fourier, enunciando le sue principali proprietà. Tale trasformata, introdotta dal matematico francese Joseph Fourier (1768-1830), ha consentito di risolvere numerose equazioni differenziali della fisica matematica ed è utilizzata nella teoria dei segnali continui. La sua versione discreta, cioè per successioni invece che per funzioni, è stata particolarmente utilizzata dopo l'introduzione, negli anni '60, della Trasformata di Fourier Rapida (FFT).

Definizione 10.1.1. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ (u funzione reale o complessa); la sua trasformata di Fourier $\widehat{u} : \mathbb{R}^N_\xi \to \mathbb{C}$ è la funzione limitata su $\mathbb{R}^N_\xi$ definita da

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N_x} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,;$$

chiaramente $\widehat{u}(\xi)$ è ben definita per ogni ξ e per la disuguaglianza di Hölder si ha $\|\widehat{u}\|_\infty \le \|u\|_1$.

Il moltiplicatore $e^{-2\pi i x\cdot\xi}$ si chiama *carattere*.

Osservazione 10.1.2. La trasformata di Fourier

$$\widehat{\ }:\ L^1(\mathbb{R}^N_x) \to L^\infty(\mathbb{R}^N_\xi)$$

è lineare e continua (anzi Lipschitziana).

Nel seguito indicheremo la trasformata di Fourier di u anche con il simbolo $\mathcal{F}u$.

Osservazione 10.1.3. In generale, assumendo $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ o $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_x)$, non è vero che $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^N_\xi)$.

Infatti, sia $N = 1$ e $u(x) = \chi_{[-1,1]}$ (la funzione caratteristica di $[-1,1]$); allora

$$\widehat{u}(\xi) = \begin{cases} 2\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi\xi)}{2\pi\xi} & \text{per } \xi \neq 0 \\ 2 & \text{per } \xi = 0\,. \end{cases}$$

Evidentemente $\widehat{u}$ è limitata, continua in $\mathbb{R}$ ed è infinitesima all'infinito (queste proprietà, come vedremo, valgono per le trasformate di Fourier di tutte le funzioni sommabili).
Osserviamo che, invece, la trasformata di Fourier $\widehat{u} \notin L^1(\mathbb{R}_\xi)$.

Osservazione 10.1.4. Nel caso $N = 1$, tenendo presente che l'integrale su $\mathbb{R}$ di una funzione dispari è nullo, si ottengono le seguenti proprietà:

(i) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è pari, allora $\widehat{u}$ è pari;

(ii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è dispari, allora $\widehat{u}$ è dispari;

(iii) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è reale e pari, allora $\widehat{u}$ è reale e pari;

(iv) Se $u \in L^1(\mathbb{R}_x)$ è reale e dispari, allora $\widehat{u}$ è immaginaria pura e dispari.

Proposizione 10.1.5. *Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ allora $(u * v)\widehat{\ } = \widehat{u}\,\widehat{v}$ ($\mathcal{F}$ stabilisce un omomorfismo tra $L^1(\mathbb{R}^N_x)$ munito del prodotto di convoluzione $*$ e $L^\infty(\mathbb{R}^N_\xi)$ munito del prodotto puntuale).*

Dimostrazione. Si tratta di un'applicazione del teorema di Fubini:

$$\begin{aligned}
(u*v)\widehat{\ }(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N_x} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(u*v)(x)\,d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_x}\left(\int_{\mathbb{R}^N_y} e^{-2\pi i x\cdot\xi}u(x-y)v(y)\,d\mathcal{L}^N(y)\right)d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_x}\left(\int_{\mathbb{R}^N_y} e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}u(x-y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}v(y)\,d\mathcal{L}^N(y)\right)d\mathcal{L}^N(x) \\
&= \widehat{u}(\xi)\int_{\mathbb{R}^N_y} e^{-2\pi i y\cdot\xi}v(y)\,d\mathcal{L}^N(y) = \widehat{u}(\xi)\,\widehat{v}(\xi).
\end{aligned}$$

□

10.2 La classe di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{N}})$ (delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito)

Il modo più semplice di sviluppare le altre proprietà basilari della trasformata di Fourier è di considerare la sua restrizione alla classe (densa in $L^1(\mathbb{R}^N)$) di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
Proveremo che se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ (ampliamento di $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$) allora $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 10.2.1.

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \wedge \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\alpha D^\beta u(x) \right| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N .$$

(u e tutte le sue derivate decrescono all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza di $|x|$)

Osservazione 10.2.2.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \,,$$

inoltre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è un sottospazio denso di $L^1(\mathbb{R}^N)$ $\big($e di $L^2(\mathbb{R}^N)\big)$.

La funzione

$$u(x) = e^{-|x|^2} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

è tale che

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \setminus C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \,.$$

Proposizione 10.2.3. *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}_\xi^N)$ e*

$$D_\xi^\beta \, \widehat{u}(\xi) = \widehat{v}(\xi) \qquad \forall \, \beta \in \mathbb{N}_0^N \,, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^N \,,$$

dove $v(x) = (-2\pi i x)^\beta \, u(x)$.

Dimostrazione.

$$D_\xi^\beta \, \widehat{u}(\xi) = D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) \, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} (-2\pi i x)^\beta e^{-2\pi i x \cdot \xi} u(x) \, d\mathcal{L}^N(x) = \widehat{v}(\xi)$$

dove

$$v(x) = (-2\pi i x)^\beta \, u(x) \,.$$

□

Proposizione 10.2.4. *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora*

$$(D_x^\beta u)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \, \widehat{u}(\xi) \qquad \forall \, \beta \in \mathbb{N}_0^N \,, \quad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^N \,.$$

Dimostrazione. Si integra per parti $(D_x^\beta u)\widehat{\ }(\xi)$ e si osserva che "i termini di frontiera" si annullano poiché u e le sue derivate appartengono a $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$. □

Osservazione 10.2.5. Questa proprietà consente di trasformare problemi differenziali in problemi algebrici.

Proposizione 10.2.6. *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^N)$, allora $\widehat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\xi^N)$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 10.2.3 $\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^N_\xi)$, sicché resta da provare che

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| \xi^\alpha \, D^\beta_\xi \, \widehat{u}(\xi) \right| < +\infty \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N_0 .$$

Per la Proposizione 10.2.4

$$\xi^\alpha \widehat{u}(\xi) = \frac{(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}} = \frac{(D^\alpha_x u)\widehat{\ }(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}}$$

e per la Proposizione 10.2.3

$$D^\beta_\xi \big(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big) = \frac{D^\beta_\xi (D^\alpha_x u)\widehat{\ }(\xi)}{(2\pi i)^{|\alpha|}} = \widehat{v}(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

dove $v(x) = (-1)^{|\beta|}(2\pi i)^{|\beta|-|\alpha|} x^\beta D^\alpha_x u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, sicché $D^\beta_\xi \big(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big)$ è limitata per ogni α e β.

Ricordato che, per la regola di Leibniz, $D^\beta_\xi \big(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi)\big) = \displaystyle\sum_{0 \le |\gamma| \le |\beta|} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma_\xi \xi^\alpha \cdot D^{\beta-\gamma}_\xi \widehat{u}(\xi)$

segue che $\xi^\alpha D^\beta_\xi \widehat{u}(\xi)$ è limitata per ogni α e β. □

Lemma 10.2.7. *(Lemma di Riemann-Lebesgue)*
Se $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ *allora* $\widehat{u} \in C^0(\mathbb{R}^N_\xi) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N_\xi)$ *e*

$$\lim_{|\xi| \to +\infty} \widehat{u}(\xi) = 0 .$$

Dimostrazione. Il lemma è vero se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$. Se $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$, poiché $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ è un sottospazio denso di $L^1(\mathbb{R}^N_x)$, esiste $(u_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ tale che $u_j \to u$ in $L^1(\mathbb{R}^N_x)$. Allora $\widehat{u}_j \rightrightarrows \widehat{u}$ (poiché $\|\widehat{u}_j - \widehat{u}\|_\infty = \left\|\widehat{u_j - u}\right\|_\infty \le \|u_j - u\|_1$) e la tesi segue immediatamente. □

Esempio 10.2.8. *(La trasformata della funzione gaussiana)*
Sia $u_a(x) = e^{-\pi a |x|^2}$, dove $a > 0$. Allora

$$\widehat{u}_a(\xi) = a^{-\frac{N}{2}} e^{-\pi \frac{|\xi|^2}{a}} .$$

Dimostrazione. Introdotto il cambiamento di variabili

$$x \to \frac{x}{\sqrt{a}}$$

possiamo assumere $a = 1$. Per il teorema di Fubini abbiamo $\big($indicato per semplicità $u_1(x) = e^{-\pi|x|^2}$ con $u(x)\big)$

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x \cdot \xi - \pi |x|^2} \, d\mathcal{L}^N(x) = \prod_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} exp\big(-2\pi i x_j \xi_j - \pi x_j^2\big) \, d\mathcal{L}^1(x_j),$$

ed è quindi sufficiente provare che il j-esimo fattore nel prodotto è uguale a $exp\big(-\pi \xi_j^2\big)$; pertanto basta considerare il caso $N = 1$.

Premessa: $\qquad \forall\, N \ge 1 : \qquad I_N = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi |x|^2} \, d\mathcal{L}^N(x) = 1;$

infatti, osservato che

$$exp\big(-\pi|x|^2\big) = exp\big(-\pi\sum_{j=1}^{N} x_j^2\big) = \prod_{j=1}^{N} exp\big(-\pi x_j^2\big)\,,$$

si ha, per il teorema di Fubini, $I_N = (I_1)^N$ e quindi, essendo $I_2 = (I_1)^2$ risulta $I_N = (I_2)^{\frac{N}{2}}$.
È allora sufficiente provare che $I_2 = 1$. Introdotte in $\mathbb{R}^2$ le coordinate polari (r, ϑ) si ha:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi|x|^2}\, d\mathcal{L}^2(x) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r\, d\mathcal{L}^1(r)\right) d\mathcal{L}^1(\theta) \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-\pi r^2} r\, d\mathcal{L}^1(r) = 1\,. \end{aligned}$$

La premessa è dunque provata.

Torniamo alla prova dell'esercizio.
Quando $N = 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} \cdot e^{-\pi x^2}\, d\mathcal{L}^1(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x) \;-\; i \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, \mathrm{sen}(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x)\,. \end{aligned}$$

Osservato che

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, \mathrm{sen}(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x) = 0$$

perché l'integrando è una funzione dispari della variabile x e l'integrale è esteso tra $-\infty$ e $+\infty$, risulta

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x)\,.$$

Da ciò segue, derivando rispetto a ξ,

$$\widehat{u}\,'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi x)\, e^{-\pi x^2}\, \mathrm{sen}(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x)$$

e integrando per parti

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} (-2\pi x)\, e^{-\pi x^2}\, \mathrm{sen}(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x) = \\ &\qquad = \Big[e^{-\pi x^2}\, \mathrm{sen}(2\pi x\xi)\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} - 2\pi\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} \cos(2\pi x\xi)\, d\mathcal{L}^1(x) = -2\pi\xi\widehat{u}(\xi)\,. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{\widehat{u}'(\xi)}{\widehat{u}(\xi)} = -2\pi\xi$$

da cui

$$\log|\widehat{u}(\xi)| = -\pi\xi^2 + c$$

e quindi

$$\widehat{u}(\xi) = c' e^{-\pi\xi^2}.$$

Inoltre, tenuto conto di quanto provato nella premessa, si ha

$$\widehat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, d\mathcal{L}^1(x) = 1 = c'$$

e pertanto

$$\widehat{u}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}.$$

□

Proposizione 10.2.9. *Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora vale la formula*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\,\widehat{v}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y)\, v(y)\, d\mathcal{L}^N(y).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\widehat{v}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\Big(\int_{\mathbb{R}^N} v(y)e^{-2\pi i y\cdot x}\, d\mathcal{L}^N(y)\Big)\, d\mathcal{L}^N(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{u}(y)v(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,.\end{aligned}$$

□

Definizione 10.2.10. Per $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$, definiamo in $\mathbb{R}^N$ la funzione $u^\vee$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$u^\vee(x) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, u(\xi)\, d\mathcal{L}^N(\xi) = \widehat{u}(-x)\,.$$

Sussiste il seguente

Teorema 10.2.11. $\big($*Teorema di inversione della trasformata di Fourier in* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{x}})\big)$
Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ allora $(\widehat{u})^\vee = u = (u^\vee)^\wedge$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ u si può rappresentare nel seguente modo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, \widehat{u}(\xi)\, d\mathcal{L}^N(\xi)\,.$$

Pertanto $^\vee$ è l'inversa di $\widehat{\ }$ (nel seguito indicheremo anche con $\mathcal{F}^{-1}$ l'inversa di $\mathcal{F}$).

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo, per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = e^{2\pi i x\cdot\xi - \pi\varepsilon^2|\xi|^2} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

Si ha, per la Proposizione 10.2.9,

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\,\widehat{u}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}\Phi_\varepsilon(\xi)\,\widehat{u}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi)=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\Phi}_e(y)\,u(y)\,d\mathcal{L}^N(y)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,d\mathcal{L}^N(y)=(\varphi_\varepsilon*u)(x)$$

essendo

$$\widehat{\Phi}_\varepsilon(y)=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i\xi\cdot y}\,e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\,e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\mathcal{L}^N(\xi)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i(y-x)\cdot\xi}\,e^{-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\,d\mathcal{L}^N(\xi)=\varepsilon^{-N}\,e^{-\pi\frac{|y-x|^2}{\varepsilon^2}}\qquad\text{(cfr. Esempio 10.2.8)}$$

e

$$\varphi_\varepsilon(z):=\varepsilon^{-N}\,e^{-\pi\frac{|z|^2}{\varepsilon^2}}\,.$$

Per il teorema di approssimazione dell'identità (essendo u continua e limitata in $\mathbb{R}^N$), osservato che $\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_\varepsilon(z)\,d\mathcal{L}^N(z)=1$,

$$\forall\,x\in\mathbb{R}^N\qquad(\varphi_\varepsilon*u)\,(x)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}u(x)\,.$$

D'altra parte, per il teorema della convergenza dominata, essendo

$$\widehat{u}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_\xi)\subset L^1(\mathbb{R}^N_\xi)\,,$$

per ogni $x\in\mathbb{R}^N$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi-\pi\varepsilon^2|\xi|^2}\widehat{u}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi)\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi)=(\widehat{u})^\vee(x).$$

□

Osservazione 10.2.12. Il teorema di inversione di Fourier vale più in generale per le $u\in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ che siano anche di classe $L^\infty(\mathbb{R}^N_x)\cap C^0(\mathbb{R}^N_x)$ con $\widehat{u}\in L^1(\mathbb{R}^N_\xi)$.

Teorema 10.2.13. *(Formula di Parseval)*
Siano $u,v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$, allora

$$\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\,\overline{v}(x)\,d\mathcal{L}^N(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{u}(\xi)\,\overline{\widehat{v}}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi),$$

(dove $\overline{v}$ indica la funzione complessa coniugata di v).

Dimostrazione. Per il teorema di inversione di Fourier

$$\int_{\mathbb{R}^N}u(x)\overline{v}(x)\,d\mathcal{L}^N(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\overline{v}(x)\left(\int_{\mathbb{R}^N}e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{u}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi)\right)d\mathcal{L}^N(x)$$
$$\text{(per il teorema di Fubini)}=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{u}(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}^N}e^{2\pi i x\cdot\xi}\overline{v}(x)\,d\mathcal{L}^N(x)\right)d\mathcal{L}^N(\xi)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}}(\xi)\,d\mathcal{L}^N(\xi).$$

□

Osservazione 10.2.14. *(Identità di Parseval)*
Se $u = v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ si ha
$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2 \ .$$

Corollario 10.2.15. *La trasformata di Fourier* $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_\xi)$ *è una isometria* $\big($*relativa alla metrica di* $L^2(\mathbb{R}^N)\big)$ *del sottospazio denso* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ *di* $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ *su* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_\xi)$*, di periodo* 4*.*

Dimostrazione. $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è di periodo 4, cioè
$$(\mathcal{F}^4 u)(x) = u(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N;$$
infatti si ha (per il teorema di inversione di Fourier)
$$(\mathcal{F}^2 u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} (\mathcal{F}u)(\xi)\, d\mathcal{L}^N(\xi) = u(-x)$$
e quindi
$$(\mathcal{F}^4 u)(x) = (\mathcal{F}^2 u)(-x) = u(x).$$
Da ciò si deduce che $\mathcal{F}$ è suriettiva; infatti fissato $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esiste $\mathcal{F}^3 v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che
$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^3 v) = v.$$
Inoltre dal teorema di inversione di Fourier si ha
$$\widehat{u} = 0 \implies u = 0\,,$$
e quindi $\mathcal{F}$ è iniettiva.
$\mathcal{F}$ è continua per il teorema del grafico chiuso e tale è $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. □

10.3 La trasformata di Fourier in $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^\mathrm{N})$

Per definire la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ usiamo la tecnica del prolungamento per continuità della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$. Ciò è possibile per la densità di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ in $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ e per la validità della formula
$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2 \qquad \text{per } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$$
(osserviamo, per inciso, che per la norma $L^1(\mathbb{R}^N_x)$ tale formula non è valida e quindi non si può definire la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N_x)$ con la tecnica del prolungamento per continuità. Tuttavia, come abbiamo già visto, per $u \in L^1(\mathbb{R}^N_x)$ si può definire direttamente la trasformata di Fourier).

Se $u \in L^2(\mathbb{R}^N_x)$, esiste $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ tale che
$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_2 = 0\,.$$
Dall'identità di Parseval in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ si ha
$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_m\|_2 = \left\|\widehat{u_n - u_m}\right\|_2 = \|u_n - u_m\|_2 \xrightarrow[n,m\to+\infty]{} 0\,,$$

pertanto $(\widehat{u}_n)$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$ e quindi convergente in $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$.
Definiamo **trasformata di Fourier di** $\mathbf{u} \in \mathbf{L^2}(\mathbb{R}^{\mathbf{N}}_{\mathbf{x}})$

$$\Phi u := \lim_{n\to+\infty} \widehat{u}_n \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N_\xi)\,.$$

Φu è ben definita $\big($è indipendente dalla scelta della successione $(u_n)\big)$.
La trasformazione $\Phi : L^2(\mathbb{R}^N_x) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$ definita da

$$\Phi u = \lim_{n\to+\infty} \widehat{u}_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N_x} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, u_n(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,,$$

dove $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_2 = 0$, è lineare.

<u>L'identità di Parseval vale in $L^2(\mathbb{R}^N)$</u> poiché

$$\|\Phi u\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|\widehat{u}_n\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_2 = \|u\|_2\ .$$

Questo implica che Φ è una trasformazione iniettiva di $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ in $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$, ed è una isometria.
La trasformata inversa di Fourier $^\vee$ si estende allo stesso modo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Infatti, la trasformazione $\Phi^{-1} : L^2(\mathbb{R}^N_\xi) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N_x)$ definita da

$$\Phi^{-1} u := \lim_{n\to+\infty} u_n^\vee = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N_\xi} e^{2\pi i x\cdot\xi}\, u_n(\xi)\, d\mathcal{L}^N(\xi)\,,$$

dove $(u_n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_\xi)$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_2 = 0$, è lineare.
Inoltre

$$\Phi^{-1}(\Phi u) = \left(\lim_{n\to+\infty} \widehat{u}_n\right)^\vee = \lim_{n\to+\infty} (\widehat{u}_n)^\vee = \lim_{n\to+\infty} u_n = u = \Phi\left(\Phi^{-1} u\right)\ .$$

Quindi Φ e Φ^{-1} sono isomorfismi isometrici di $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ su $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$.

È così provato il fondamentale

Teorema 10.3.1. *(Teorema di Plancherel)*
Esiste una isometria Φ di $L^2(\mathbb{R}^N_x)$ su $L^2(\mathbb{R}^N_\xi)$ che è univocamente determinata dalla richiesta

$$\Phi u = \mathcal{F} u \qquad \forall\, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N_x)\,.$$

Osservazione 10.3.2. Applicando l'identità di Parseval in $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\|u\|_2 = \|\Phi u\|_2$$

alle differenze $u_n - u$ si ha che

$$\Phi u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi u \ \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N) \qquad \text{se e solo se} \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \ \text{ in } L^2(\mathbb{R}^N)\,.$$

In particolare, se $\{K_n\}$ è una successione crescente di sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$ la cui unione sia $\mathbb{R}^N$ e se χ_{K_n} è la funzione caratteristica di K_n, abbiamo per ogni $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$

$$u\chi_{K_n} \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

e

$$u\chi_{K_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)\,.$$

Dunque $\mathcal{F}\left(u\chi_{K_n}\right)$ si calcola con l'integrale e

$$\mathcal{F}\left(u\chi_{K_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)\,,$$

cioè

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{K_n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = (\Phi u)(\xi) \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)\,.$$

Se il primo membro dell'uguaglianza precedente esiste anche nel senso della convergenza q.o., allora esso è proprio la trasformata $(\Phi u)(\xi)$.
Questa circostanza si verifica ad esempio quando, in una variabile, esiste il valor principale

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi}\, u(x)\, d\mathcal{L}^1(x)\,;$$

esso coincide q.o. con il valore $(\Phi u)(\xi)$ della trasformata di u.

Osservazione 10.3.3. Per concludere osserviamo che contrariamente a quanto accade in $L^2(\mathbb{R}^N)$, la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$ non è un isomorfismo isometrico di $L^1(\mathbb{R}^N_x)$ su $L^1(\mathbb{R}^N_\xi)$, e la trasformazione inversa di Fourier non può essere sempre definita.

10.4 Distribuzioni temperate

Per definire la trasformata di Fourier di una distribuzione occorre allargare lo spazio delle funzioni test ad uno spazio che si comporti bene rispetto alla trasformata. Lo spazio giusto di funzioni test non è $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ ma $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ ($\mathcal{D}(\mathbb{R}^N) \subsetneqq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$) in quanto se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\widehat{\phi}$ è la sua trasformata di Fourier allora $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Definizione 10.4.1. Siano $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Diremo che ϕ_j converge a ϕ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, e scriveremo $\phi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} \phi$, se

$$\lim_{j\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| x^\alpha (D^\beta \phi_j - D^\beta \phi)(x) \right| = 0 \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N\,.$$

Definizione 10.4.2. Sia $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ un funzionale lineare. Si dice che T è una *distribuzione temperata* se

$$\forall\, (\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \qquad \phi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad T(\phi_j) \underset{j}{\to} 0$$

(cioè se T è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$).

Lo spazio vettoriale delle distribuzioni temperate si indica con $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Tale spazio è il duale topologico di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Osservazione 10.4.3. Le distribuzioni temperate sono particolari distribuzioni in $\mathbb{R}^N$ che all'infinito hanno un comportamento più controllato di quanto possa accadere alla generica distribuzione (classica) e questo consente maggiore generalità alle funzioni test.
Inoltre le distribuzioni temperate risultano più idonee di quelle classiche per estendere la trasformata di Fourier. In questo modo molte proprietà della trasformata di Fourier per le funzioni si trasferiscono alla trasformata di Fourier per le distribuzioni temperate.

Osservazione 10.4.4. Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, la funzione $x \mapsto x^\alpha D^\beta u(x)$ è sommabile (e limitata). Infatti si ha

$$\left|x^\alpha D^\beta u(x)\right| \le \frac{|x|^{|\alpha|+2N}\left|D^\beta u(x)\right|}{1+|x|^{2N}}$$

e dalla sommabilità della funzione $\left(1+|x|^{2N}\right)^{-1}$ segue la sommabilità della funzione $x^\alpha D^\beta u(x)$.

Proposizione 10.4.5. *Ad ogni polinomio è associata una distribuzione temperata.*

Dimostrazione. Sia $P(x) = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha x^\alpha$ un polinomio. Si ha

$$|P(x)| \le C\left(1+|x|^k\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

dove $C = \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha$. Infatti per $|x| \le 1$ risulta $|P(x)| \le C$ e per $|x| \ge 1$ si ha $|x|^{|\alpha|} \le |x|^k$. Per l'Osservazione 10.4.4 per ogni $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ il prodotto $P\phi$ è sommabile. Possiamo allora considerare il funzionale lineare T_P su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ associato a P definito da

$$\langle T_P, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} P(x)\,\phi(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \qquad \forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Il funzionale T_P è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Infatti, se $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} 0$ risulta

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} P(x)\phi_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\right| &\le C\int_{\mathbb{R}^N}\left|\left(1+|x|^k\right)\phi_j(x)\right|\, d\mathcal{L}^N(x)\\ &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{1+|x|^{2N}}\, d\mathcal{L}^N(x)\right)\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|\left(1+|x|^k\right)\phi_j(x)\right| \to 0\end{aligned}$$

cioè $\langle T_P, \phi_j\rangle \underset{j}{\to} 0$. Pertanto T_P è una distribuzione temperata. □

Ricordiamo che per le distribuzioni classiche risulta $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, nel senso che ad ogni $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ si associa una particolare distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Tale risultato non vale per le distribuzioni temperate, come mostra il seguente esempio.

Esempio 10.4.6. Risulta $e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi \ge 0$, $\varphi \equiv 1$ in $[0,1]$ e $supp\,\varphi \subset]-2,2[$. Poniamo $\phi_j(x) = \dfrac{1}{2^j}\varphi\left(\dfrac{x}{j}\right)$ e osserviamo che il supporto di ϕ_j è contenuto in $]-2j,2j[$. Pertanto

$\phi_j \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, poiché per ogni scelta di interi positivi p, q risulta $x^p D^q \phi_j(x) = 2^{-j} j^{-q} x^p D^q \varphi\left(\frac{x}{j}\right)$ e quindi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p D^q \phi_j(x)| \le \frac{j^{p-q} 2^p}{2^j} \|D^q \varphi\|_\infty \to 0\,.$$

Tuttavia

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \phi_j(x)\, d\mathcal{L}^1(x) \ge \frac{1}{2^j} \int_0^j e^x\, d\mathcal{L}^1(x) = \frac{e^j - 1}{2^j} \to +\infty\,.$$

Proposizione 10.4.7. *Lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, cioè per ogni $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ esiste una successione $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} u$.*

Dimostrazione. Data $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ si consideri la successione $(u_j) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definita da

$$u_j(x) = u(x)\eta\left(\frac{|x|}{j}\right)$$

dove $\eta = \eta(s)$ è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ uguale a 1 nell'intervallo $[0,1]$ e nulla per $s > 2$. Risulta $u_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} u$. □

Osservazione 10.4.8. Osserviamo che se $(\varphi_j) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ allora

$$\varphi_j \xrightarrow[\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)]{} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} 0\,.$$

Infatti, per funzioni a supporto contenuto in un compatto comune la moltiplicazione per x^β non ha alcuna influenza sulla convergenza.
Da tale risultato segue che ogni distribuzione temperata, ristretta a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, è una distribuzione classica; si ha cioè $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

Sussiste inoltre il seguente risultato.

Proposizione 10.4.9. *Ogni distribuzione (classica) a supporto compatto (cfr. Definizione 5.5.1) è anche una distribuzione temperata.*

Proposizione 10.4.10. *Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste un polinomio $P = P(x)$ tale che*

$$\frac{u}{P} \in L^1(\mathbb{R}^N)$$

allora $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, cioè u è associata ad una distribuzione temperata.

Dimostrazione. Sia $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\phi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} 0$. Osservato che $P\phi_j \rightrightarrows 0$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$, risulta

$$\begin{aligned}|\langle T_u, \phi_j\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\phi_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x)}{P(x)} P(x)\phi_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\right| \\ &\le \sup_{\mathbb{R}^N} |P\phi_j| \int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{u(x)}{P(x)}\right| d\mathcal{L}^N(x) \xrightarrow[j]{} 0\end{aligned}$$

essendo $u/P \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Quindi T_u è una distribuzione temperata. □

Osservazione 10.4.11. Dalla proposizione precedente segue che ogni funzione "a crescita lenta", ossia decomponibile nel prodotto di un polinomio e di una funzione sommabile, definisce una distribuzione temperata. Tuttavia, una distribuzione temperata non può crescere esponenzialmente, come dimostra l'Esempio 10.4.6.

Si può provare il seguente risultato.

Proposizione 10.4.12. *Siano* $(\phi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. *Allora se* $\phi_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} \phi$ *risulta* $\widehat{\phi}_j \xrightarrow[\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)]{} \widehat{\phi}$.

Definizione 10.4.13. Sia $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. La trasformata di Fourier $\widehat{T}$ è la distribuzione temperata definita da

$$\langle \widehat{T}, \phi \rangle = \langle T, \widehat{\phi} \rangle \,, \qquad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\,.$$

Osserviamo che la definizione è ben posta essendo T una distribuzione temperata e $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, in quanto trasformata di una funzione $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$; inoltre, per la Proposizione 10.4.12, il funzionale $\widehat{T}$ così definito è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e quindi $\widehat{T}$ è una distribuzione temperata.

Esempio 10.4.14. Osservato che risulta

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \langle \delta, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

si ha $\widehat{\delta} = 1$, cioè la trasformata di Fourier della distribuzione δ coincide con la distribuzione associata alla funzione costante di valore 1 che appartiene a $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$.