CAPITOLO 2

Elementi della teoria (matematica) del potenziale (scalare): l'equazione di Laplace, di Poisson e problemi connessi

2.1 Funzioni armoniche in Ω

Definizione 2.1.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$.

$$u \quad armonica \quad in \quad \Omega \overset{\text{def}}{\iff} u \in C^2(\Omega) \quad e \quad \Delta u = 0 \quad (equazione\, di\, Laplace) \quad in\, \Omega.$$

Nel caso $N = 2$ la parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche.

Esempio 2.1.2. *(Funzioni armoniche che dipendono dalla distanza da un punto fissato (soluzioni radiali dell'equazione di Laplace))*
Fissiamo

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2)$$

e sia

$$0 < r = \left|x - x^0\right| = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2}$$

la distanza euclidea di $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$ da x^0; sia

$$u\big(\left|x - x^0\right|\big) = \varphi(r)$$

e imponiamo che sia armonica in $\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$.
Poiché

$$\begin{aligned} \partial_j u &= \varphi'(r) \cdot \partial_j r = \varphi'(r) \cdot \frac{x_j - x_j^0}{r} \\ \partial_{jj} u &= \varphi''(r) \cdot \frac{(x_j - x_j^0)^2}{r^2} + \varphi'(r) \cdot \frac{r^2 - (x_j - x_j^0)^2}{r^3} \end{aligned}$$

$\Big($dove $\varphi'(r) = \dfrac{d\varphi}{dr}(r)$ e $\varphi''(r) = \dfrac{d^2\varphi}{dr^2}(r)\Big)$ si ha

$$0 = \Delta u = \varphi''(r) + \frac{N-1}{r} \cdot \varphi'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} \cdot \frac{d}{dr}\big(r^{N-1} \cdot \varphi'(r)\big)$$

$\Big($ i.e. il Δ quando agisce su una funzione radiale $\varphi = \varphi(r)$ si trasforma nell'operatore $\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{N-1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr}$ o equivalentemente nell'operatore $\dfrac{1}{r^{N-1}} \cdot \dfrac{d}{dr}\big(r^{N-1} \cdot \dfrac{d}{dr}\big)\Big)$.
Allora, poiché $r \in \,]0, +\infty[$,

$$r^{N-1} \cdot \varphi'(r) = cost.$$

Ne segue che

$$\varphi(r) = \begin{cases} a\, \log r + b & \text{se } N = 2 \\ \\ a\, r^{2-N} + b & \text{se } N \geq 3 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, sono funzioni armoniche in $\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$.

Teorema 2.1.3. *(Proprietà (uguaglianza) del valor medio per le funzioni armoniche) Sia u armonica in Ω; allora*

$$\forall\, \overline{B}_R(y) \subset \Omega \qquad u(y) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,,$$

o (equivalentemente)

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

(i.e. u verifica la proprietà del valor medio).

Dimostrazione. Sia $\varrho \in \,]0, R]$ e consideriamo $B_\varrho(y)$. Osservato che $u \in C^2\big(\overline{B}_\varrho(y)\big)$ e che u è armonica in $B_\varrho(y)$, dall'identità (si veda l'Osservazione 1.10.2)

$$\int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \int_{B_\varrho(y)} \Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) = 0$$

segue che

$$0 = \int_{\partial B_\varrho(y)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

e quindi, posto $\omega = \dfrac{\xi - y}{\varrho}$, ove $\varrho = |\xi - y|$, si ha

$$d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = d\mathcal{H}^{N-1}(y + \varrho\omega) = \varrho^{N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega),$$

pertanto

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{|\omega|=1} \frac{du}{d\varrho}(y+\varrho\omega)d\mathcal{H}^{N-1}(y+\varrho\omega) \\ &= \varrho^{N-1}\frac{d}{d\varrho}\int_{|\omega|=1} u(y+\varrho\omega)d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \\ &= \varrho^{N-1}\frac{d}{d\varrho}\left[\varrho^{1-N}\int_{\partial B_\varrho(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right]. \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione

$$\Phi(\varrho) := \varrho^{1-N}\int_{\partial B_\varrho(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = \mathit{cost} \qquad \forall\, \varrho \in]0,R],$$

per cui

$$\varrho^{1-N}\int_{\partial B_\varrho(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = R^{1-N}\int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

e passando al limite per $\varrho \to 0^+$ si ha la tesi [5].
D'altra parte, da

$$\varrho^{N-1}u(y) = \frac{1}{N\omega_N}\int_{\partial B_\varrho(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),$$

integrando rispetto a ϱ tra 0 ed R si ottiene

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N}\int_{B_R(y)} u(x)\,d\mathcal{L}^N(x). \quad \square$$

2.2 Funzioni subarmoniche e superarmoniche in Ω

Definizione 2.2.1. *(Funzioni subarmoniche in Ω.)*

$$u \quad \textit{subarmonica} \quad \textit{in} \quad \Omega \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u \in C^0(\Omega) \quad e \quad \forall\, \overline{B}_R(y) \subset \Omega:$$

$$u(y) \le \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}}\int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \textit{oppure}$$

$$u(y) \le \frac{1}{\omega_N R^N}\int_{B_R(y)} u(x)\,d\mathcal{L}^N(x).$$

(disuguaglianza del valor medio)

Osservazione.

$$u \in C^2(\Omega) \quad e \quad \Delta u \ge 0 \quad in \quad \Omega \Longrightarrow u \quad subarmonica \quad in \quad \Omega$$

(basta ripercorrere la dimostrazione del teorema precedente).
Nel seguito indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la **classe delle funzioni subarmoniche in** Ω.

[5] essendo u continua su $\partial B_\varrho(y)$,

$$\exists \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{1}{N\omega_N \varrho^{N-1}}\int_{\partial B_\varrho(y)} u(\xi)\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = u(y)$$

(vedi, e.g., G.Gilardi, *Analisi due*, McGraw-Hill, Milano, 1993).

Definizione 2.2.2. *(Funzioni superarmoniche in Ω.)*

$$u \quad superarmonica \quad in \quad \Omega \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u \in C^0(\Omega) \quad e \quad \forall\, \overline{B}_R(y) \subset \Omega :$$
$$u(y) \geq \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad oppure$$
$$u(y) \geq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$
(disuguaglianza del valor medio)

Osservazione.

$$u \in C^2(\Omega) \quad e \quad \Delta u \leq 0 \quad in \quad \Omega \Longrightarrow u \quad superarmonica \quad in \quad \Omega.$$

Osservazione.

$$u \quad subarmonica \quad in \quad \Omega \Longleftrightarrow -u \quad superarmonica \quad in \quad \Omega.$$

Nel seguito proveremo che se $u \in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio, allora u è armonica in Ω. Pertanto si ha

u *armonica in* Ω $\Longleftrightarrow$ u *subarmonica e superarmonica in* Ω .

2.3 Principio del massimo (minimo) forte e debole

Teorema 2.3.1. *(Principio del massimo forte per le funzioni subarmoniche.) Sia Ω aperto connesso non vuoto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \in \sigma(\Omega)$. Supponiamo che*

$$\exists\, y \in \Omega \quad t.c. \quad u(y) = \sup_{\Omega} u.$$

Allora

u *è costante in* Ω.

Teorema 2.3.2. *(Principio del minimo forte per le funzioni superarmoniche.) Sia u superarmonica in Ω e supponiamo che*

$$\exists\, y \in \Omega \quad t.c. \quad u(y) = \inf_{\Omega} u.$$

Allora

u *è costante in* Ω.

Dimostrazione. È sufficiente provare il primo principio perché il secondo ne segue; infatti:

$$u \quad superarmonica \quad in \quad \Omega \Longleftrightarrow -u \quad subarmonica \quad in \quad \Omega;$$

quindi, da $u(y) = \inf_{\Omega} u$, si ha

$$-u(y) = -\inf_{\Omega} u = \sup_{\Omega}(-u).$$

Dimostriamo allora il primo principio.
Posto $M = u(y) = \sup_{\Omega} u$ e $\Omega_M = \{x \in \Omega;\, u(x) = M\}$, osserviamo che $\Omega_M \neq \emptyset$ ($y \in \Omega_M$ per ipotesi) e che, essendo $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$, Ω_M è un chiuso relativamente ad Ω. D'altra parte, preso $z \in \Omega_M$ (i.e. $u(z) = M$), per la disuguaglianza del valor medio applicata alla funzione subarmonica $u - M$, si ha, per $\overline{B}_R(z) \subset \Omega$,

$$0 = u(z) - M \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(z)} [u(x) - M]\, d\mathcal{L}^N(x) \leq 0,$$

cioè $u(x) - M = 0$ per ogni $x \in B_R(z)$, per cui $B_R(z) \subset \Omega_M$. Allora Ω_M è anche aperto relativamente ad Ω, che è connesso, pertanto $\Omega_M = \Omega$, cioè $u(x) = M$ per ogni $x \in \Omega$. □

Teorema 2.3.3. *(Principio del massimo (risp. minimo) debole per le funzioni subarmoniche (risp. superarmoniche).)*
Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** *di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^0(\overline{\Omega})$ e subarmonica (risp. superarmonica) in Ω.*
Allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \qquad \left(\textit{risp.} \quad \inf_{\overline{\Omega}} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Conseguenza importante: Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica in Ω.
Allora

(i) $\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$,

(ii) $\sup_{\overline{\Omega}} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$ *(teorema del massimo (per il) modulo).*

(Per quanto riguarda il teorema del massimo modulo è sufficiente osservare che $|u| = \max\{u, -u\}$, oppure, che essendo u armonica (regolare) allora $|u|$ è subarmonica (regolare)).

Osservazione. Sia Ω aperto connesso non vuoto **limitato** di $\mathbb{R}^N$, e siano

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \quad \text{armonica in } \Omega \qquad \text{e} \qquad v \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

tali che

$$v \leq u \quad su \quad \partial\Omega.$$

Allora

$$v \leq u \quad in \quad \overline{\Omega}.$$

Dimostrazione. La funzione $u - v \in C^0(\overline{\Omega})$ ed è superarmonica in Ω; per il principio del minimo debole

$$\inf_{\overline{\Omega}}(u - v) = \inf_{\partial\Omega}(u - v) \geq 0$$

e quindi

$$v \leq u \quad in \quad \overline{\Omega}. \quad \square$$

2.4 Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson (o per l'equazione di Laplace nel caso omogeneo, f $\equiv 0$)

Problema 2.4.1. Sia Ω aperto connesso non vuoto, **limitato** di $\mathbb{R}^N$; assegnate $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ determinare, se esiste, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in } \Omega & \text{(equazione di Poisson)} \\ \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \text{(condizione al contorno, di Dirichlet)} \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. *(Teorema di unicità)*
Se esiste $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione del Problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson, essa è unica.

Dimostrazione. Se $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ sono soluzioni dello stesso problema, allora $w = u_1 - u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} \Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega \\ \\ w|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Allora, essendo

$$0 = \inf_{\partial\Omega} w \leq w(x) \leq \sup_{\partial\Omega} w = 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

si ha $w \equiv 0$ in $\overline{\Omega}$, da cui $u_1 = u_2$ (oppure da $\max\limits_{\overline{\Omega}} |w| = \max\limits_{\partial\Omega} |w| = 0 \Longrightarrow w = 0$). □

Osservazione. L'unicità è conseguenza, sostanzialmente, del principio del massimo nell'ipotesi di limitatezza per Ω. Notiamo che se Ω non è limitato, l'unicità può non sussistere.
Sia $N = 2$ e $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \in \mathbb{R}, -\pi < x_2 < \pi\}$;
il problema omogeneo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione $u \equiv 0$, ma e.g. anche

$$u(x_1, x_2) = k e^{x_1} \operatorname{sen} x_2 \quad \forall\, k \in \mathbb{R}$$

è soluzione.

2.5 Soluzione fondamentale per l'operatore di Laplace

Useremo ora la II identità di Green per trovare una formula integrale per la soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson.
A tale scopo introduciamo la

Definizione 2.5.1. Soluzione fondamentale per il Δ (operatore di Laplace)
Sia $x^0 \in \mathbb{R}^N$ fissato; definiamo [6] "**soluzione fondamentale (di polo x^0) per il** Δ" la funzione (radiale)

$$\Gamma(x-x^0) = \Gamma(\left|x-x^0\right|) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\log\left|x-x^0\right| & \text{se } N=2 \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N}\left|x-x^0\right|^{2-N} & \text{se } N \geq 3 \end{cases} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}.$$

Nel seguito, per semplicità di esposizione, ci riferiremo solo a Γ in dimensione $N \geq 3$.

Osservazione 2.5.2. Osserviamo che

(i) $\Gamma(\cdot - x^0) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{x^0\})$;

(ii) $\Delta_x \Gamma(x-x^0) = 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^0\}$;

(iii) $\Gamma(x-x^0)$ è sommabile in ogni $B_R(x^0)$;

(iv) $\forall\, i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} \partial_i \Gamma(x-x^0) &= \frac{1}{N(2-N)\omega_N}\frac{2-N}{2}\left|x-x^0\right|^{-N} 2(x_i - x_i^0) \\ &= \frac{1}{N\omega_N}\left|x-x^0\right|^{-N}(x_i - x_i^0)\,, \end{aligned}$$

pertanto $\partial_i \Gamma(x-x^0)$ è sommabile in ogni $B_R(x^0)$;

(v) $\forall\, i, j = 1, \ldots, N$

$$\partial_{ij}\Gamma(x-x^0) = \frac{1}{N\omega_N}\left[-N\left|x-x^0\right|^{-N-2}(x_j - x_j^0)(x_i - x_i^0) + \left|x-x^0\right|^{-N}\delta_{ij}\right]$$

dove $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j\,, \\ 1 & \text{se } i = j\,. \end{cases}$

Nel seguito (Osservazione 3.3.7) vedremo che, nel senso delle distribuzioni in $\mathbb{R}^N$, $\Delta_x \Gamma(x-x^0) = \delta_{x^0}$ ove δ_{x^0} è la (distribuzione) delta di Dirac di polo x^0.

[6] cfr. Osservazione 3.3.7

2.6 Rappresentazione di Green

Teorema 2.6.1. *(Rappresentazione di Green)*
Sia $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1 a tratti e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, allora
$\forall\, x^0 \in \Omega$

$$u(x^0) = \int_\Omega \Gamma(x-x^0)\Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial\Omega} \big[u(\xi)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(\xi-x^0) - \Gamma(\xi-x^0)\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Dimostrazione. Fissato $x^0 \in \Omega$, dalla II identità di Green, con

$$v(x) = \Gamma(x-x^0)\big|_{\overline{\Omega\setminus\overline{B}_\varrho(x^0)}}$$

ove $\overline{B}_\varrho(x^0) \subset \Omega$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varrho(x^0)} &\big[\Gamma(x-x^0)\Delta u(x) - u(x)\underbrace{\Delta_x\Gamma(x-x^0)}_{=0}\big]\, d\mathcal{L}^N(x)\\ &= \int_{\partial\Omega}\big[\Gamma(\xi-x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi-x^0)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\\ &\quad + \int_{\partial B_\varrho(x^0)}\big[\Gamma(\xi-x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi) - u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi-x^0)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\lim_{\varrho\to 0^+}\int_{\Omega\setminus\overline{B}_\varrho(x^0)}\Gamma(x-x^0)\Delta u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_\Omega \Gamma(x-x^0)\Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,,$$

in quanto $\Gamma(x-x^0)$ è sommabile in un intorno di x^0 e (poiché $\Delta u \in C^0(\overline{\Omega})$) Δu è limitata;
inoltre

$$\begin{aligned}0 \le \left|\int_{\partial B_\varrho(x^0)}\Gamma(\xi-x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right| &= \left|\int_{\partial B_\varrho(x^0)}\Gamma(\varrho)\nabla u(\xi)\cdot\nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\right|\\ &\le \frac{1}{N(N-2)\omega_N}\varrho^{2-N}\sup_{\overline{\Omega}}|\nabla u|\, N\omega_N\varrho^{N-1} \xrightarrow[\varrho\to 0^+]{} 0\,;\end{aligned}$$

infine (osservato che $\nu(\xi)$ è interno a $B_\varrho(x^0)$)

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi-x^0)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) &= -\Gamma'(\varrho)\int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\\ &= -\frac{1}{N\omega_N\varrho^{N-1}}\int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi),\end{aligned}$$

per cui

$$\exists \lim_{\varrho\to 0^+}\int_{\partial B_\varrho(x^0)} u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi-x^0)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) = -u(x^0).$$

In definitiva (passando al limite per $\varrho \to 0^+$) si ha:

$$\begin{aligned}u(x^0) &= \int_\Omega \Gamma(x-x^0)\Delta u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\big[u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi-x^0) - \Gamma(\xi-x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi). \qquad \square\end{aligned}$$

Conseguenza importante. *Se inoltre* $\Delta u = 0$ *in* Ω*, si ha*

$$\forall\, x^0 \in \Omega \quad u(x^0) = \int_{\partial\Omega} \big[u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi - x^0) - \Gamma(\xi - x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\big]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,. \tag{2.1}$$

Osservazione 2.6.2. La formula (2.1) è utile per discutere la "regolarità" delle funzioni armoniche:
le funzioni armoniche sono C^∞*, le derivate di qualsiasi ordine di una funzione armonica sono funzioni armoniche.*

Osservazione 2.6.3. La (2.1) esprimendo u in Ω in termini dei suoi dati di Cauchy u e $\dfrac{\partial u}{\partial\nu}$ su $\partial\Omega$ rappresenta la soluzione del problema di Cauchy in Ω, purché una tale soluzione esista (vedremo nel seguito che **il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in generale non ha soluzione** (nemmeno localmente)).
D'altra parte, per il teorema di unicità per il problema di Dirichlet per $\Delta u = 0$, la soluzione è univocamente determinata dal solo valore di u su $\partial\Omega$.
Per ottenere un integrale su $\partial\Omega$ che dipenda solamente dai valori alla frontiera e non anche dalla derivata normale introdurremo la cosiddetta funzione di Green di Ω.

2.7 Funzione di Green

Sia $h \in C^2(\overline{\Omega})$ e $\Delta h = 0$ in Ω. Applicando la II identità di Green ad u e h, si ha

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi)\frac{\partial h}{\partial\nu}(\xi) - h(\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\right]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi).$$

Sommando, membro a membro, con (2.1) si ha

$$u(x^0) = \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi)\frac{\partial G}{\partial\nu}(\xi, x^0) - G(\xi, x^0)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi)\right]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \qquad \forall\, x^0 \in \Omega,$$

avendo posto

$$G(\xi, x^0) = \Gamma(\xi - x^0) + h(\xi).$$

Definita

$$G : \overline{\Omega} \times \Omega \to \mathbb{R}$$
$$(y, x^0), \text{con } y \neq x^0, \mapsto G(y, x^0) = \Gamma(y - x^0) + h(y),$$

se

$$G(\xi, x^0) \equiv 0 \quad \forall\, \xi \in \partial\Omega\,,\; x^0 \in \Omega$$

(e in questo caso G si chiama **funzione di Green (relativa ad** Ω **e** Δ**)**) si ha

$$u(x^0) = \int_{\partial\Omega} u(\xi)\frac{\partial G}{\partial\nu}(\xi, x^0)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall\, x^0 \in \Omega. \tag{2.2}$$

Osserviamo che per determinare G si deve risolvere in Ω un particolare problema di Dirichlet omogeneo:

$$\begin{cases} \Delta h = 0 & \text{in } \Omega \\ h(\xi) = -\Gamma(\xi - x^0) & \forall \xi \in \partial\Omega \quad (x^0 \in \Omega) \end{cases}$$

pertanto (in virtù del teorema di unicità) la funzione di Green se esiste è **unica**.

L'idea è quindi che la risoluzione di una classe di problemi di Dirichlet omogenei in Ω consente di determinare G e risolvere, tramite la (2.2), tutti i problemi di Dirichlet, omogenei e non.

La funzione di Green relativa a $\mathbf{B_R(0)}$.
Sia $\Omega = B_R(0)$; consideriamo la riflessione rispetto alla sfera $\partial B_R(0)$:

$$y \in \overline{B}_R(0) \setminus \{0\} \to \overline{y} = \frac{R^2}{|y|^2} y$$
$$y = 0 \to \overline{y} = \infty.$$

Definiamo per ogni $y \in \overline{B}_R(0)$, $x^0 \in B_R(0)$ con $y \neq x^0$

$$G(y, x^0) = \begin{cases} \Gamma\big(|y - x^0|\big) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma\big(|\overline{y} - x^0|\big) & \text{se } y \neq 0 \\ \Gamma\big(|x^0|\big) - \Gamma(R) & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Osservato che per $y \neq 0$ si ha:

$$\left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma\left(|\overline{y} - x^0|\right) = \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-N} \Gamma\left(\left|\frac{R^2}{|y|^2} y - x^0\right|\right) = \Gamma\left(\left|\frac{R}{|y|} y - \frac{|y|}{R} x^0\right|\right),$$

possiamo scrivere, per ogni $y \in \overline{B}_R(0)$, $x^0 \in B_R(0)$ con $y \neq x^0$

$$\mathbf{G(y, x^0) = \Gamma\left(\sqrt{|y|^2 + |x^0|^2 - 2y \cdot x^0}\right) - \Gamma\left(\sqrt{R^2 + \left(\frac{|y||x^0|}{R}\right)^2 - 2y \cdot x^0}\right)}.$$

Osserviamo che $G(y, x^0) = G(x^0, y)$.
La $G = G(y, x^0)$ così definita è la funzione di Green relativa a $B_R(0)$; infatti l'addendo

$$\Gamma\left(\left|\frac{R}{|y|} y - \frac{|y|}{R} x^0\right|\right)$$

è armonico rispetto ad y e

$$G(\xi, x^0) \equiv 0 \qquad \forall \xi \in \partial B_R(0),\ x^0 \in B_R(0).$$

Tenendo presente la (2.2), calcoliamo

$$\frac{\partial G(\xi, x^0)}{\partial \nu(\xi)} = \left[\frac{\partial G(y, x^0)}{\partial \nu(y)}\right]_{|y| \to |\xi| = R} = \left[\frac{\partial G(y, x^0)}{\partial |y|}\right]_{|y| \to |\xi| = R}$$

$$= \frac{R^2 - |x^0|^2}{N \omega_N R} |\xi - x^0|^{-N} > 0 \qquad \forall \xi \in \partial B_R(0),\ x^0 \in B_R(0).$$

Nel seguito porremo

$$K(\xi, x^0) = \frac{\partial G(\xi, x^0)}{\partial \nu(\xi)} = \frac{R^2 - |x^0|^2}{N\omega_N R}|\xi - x^0|^{-N} \qquad \textbf{(nucleo di Poisson)}$$

e osserviamo che $K(\xi, x^0)$ è una funzione armonica rispetto ad x^0, in quanto derivata (direzionale) della $G(\xi, x^0)$ che è armonica rispetto ad x^0, per ogni $\xi \in \partial B_R(0)$. In definitiva, per (2.2), se $u \in C^2(\overline{B}_R(0))$ è **armonica** in $B_R(0)$, si ha

$$u(x^0) = \frac{R^2 - |x^0|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{u(\xi)}{|\xi - x^0|^N} \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \qquad \forall\, x^0 \in B_R(0) \tag{2.3}$$

(**integrale di Poisson**).

Si può provare che la rappresentazione (2.3) di u è valida anche se $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ anziché $u \in C^2(\overline{B}_R(0))$.

Osserviamo che se in (2.3) prendiamo $x^0 = 0$ (centro di $B_R(0)$), allora

$$u(0) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(0)} u(\xi) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,,$$

che è la proprietà del valor medio per le funzioni armoniche.

Osserviamo, anche, che se $u = 1$ in $\overline{B}_R(0)$, da (2.3) si ottiene

$$1 = \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x^0) d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \qquad \forall\, x^0 \in B_R(0)\,. \tag{2.4}$$

Abbiamo dimostrato che ogni $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$ con $\Delta u = 0$ in $B_R(0)$ è rappresentabile come in (2.3). Vale anche il viceversa, come mostra il seguente teorema:

Teorema 2.7.1. *(Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato φ, per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$)*
Assegnata $\varphi \in C^0(\partial B_R(0))$, la funzione definita in $B_R(0)$ da:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{N\omega_N R} \int_{\partial B_R(0)} \frac{\varphi(\xi)}{|\xi - x|^N} \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \forall\, x \in B_R(0)$$

è armonica in $B_R(0)$; inoltre per ogni $\xi_0 \in \partial B_R(0)$

$$\exists \lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0)\,.$$

Pertanto

$$u \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0)) \qquad e \qquad u = \varphi \quad su \quad \partial B_R(0).$$

Infine (per il teorema del massimo modulo):

$$\sup_{\overline{B}_R(0)} |u| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi|.$$

Dimostrazione. Che la funzione $u = u(x)$ sopra definita sia armonica in $B_R(0)$ segue dal fatto, già osservato, che il nucleo di Poisson $K(\xi, x)$ è armonico rispetto ad x, per ogni $\xi \in \partial B_R(0)$.
Per definizione di limite, provare che

$$\exists \lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in B_R(0)}} u(x) = \varphi(\xi_0)\,,$$

equivale a provare che:

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad \forall\, x \in B_R(0) \quad |\xi_0 - x| < \frac{\delta_\varepsilon}{2} \implies |u(x) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Sia $\varepsilon > 0$; per la continuità di φ in $\xi_0 \in \partial B_R(0)$,

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad \forall\, \xi \in \partial B_R(0) \quad |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon \implies |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Sia $x \in B_R(0)$ tale che $|\xi_0 - x| < \dfrac{\delta_\varepsilon}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned} u(x) - \varphi(\xi_0) &= \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x)\varphi(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) - \varphi(\xi_0) \\ &\underset{per\ (2.4)}{=} \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x)[\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)]\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |u(x) - \varphi(\xi_0)| &\leq \int_{\partial B_R(0)} K(\xi, x)\, |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)|\; d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &= \int_{\left\{\xi \in \partial B_R(0);\, |\xi - \xi_0| < \delta_e\right\}} K(\xi, x)\, |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)|\; d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\ &\quad + \int_{\left\{\xi \in \partial B_R(0);\, |\xi - \xi_0| \geq \delta_e\right\}} K(\xi, x)\, |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)|\; d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,. \end{aligned}$$

Ora

$$\int_{\left\{\xi \in \partial B_R(0);\, |\xi - \xi_0| < \delta_e\right\}} K(\xi, x)\, |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)|\; d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) < \varepsilon\,,$$

e poiché

$$|\xi - x| \geq |\xi - \xi_0| - |\xi_0 - x|$$

si ha su $\left\{\xi \in \partial B_R(0);\; |\xi - \xi_0| \geq \delta_e\right\}$

$$|\xi - x| \geq \delta_\varepsilon - \frac{\delta_\varepsilon}{2} = \frac{\delta_\varepsilon}{2}$$

e quindi, il secondo integrale,

$$\int_{\left\{\xi\in\partial B_R(0);\,|\xi-\xi_0|\geq\delta_e\right\}} K(\xi,x)\,|\varphi(\xi)-\varphi(\xi_0)|\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2-|x|^2}{N\omega_N R}\int_{\left\{\xi\in\partial B_R(0);\,|\xi-\xi_0|\geq\delta_e\right\}} \frac{1}{|\xi-x|^N}\,|\varphi(\xi)-\varphi(\xi_0)|\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\\
&\leq \frac{R^2-|x|^2}{N\omega_N R}\left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^N\cdot 2\sup_{\partial B_R(0)}|\varphi|\,N\omega_N R^{N-1}\\
&= \left(R^2-|x|^2\right)\left(\frac{2}{\delta_\varepsilon}\right)^N\cdot 2\sup_{\partial B_R(0)}|\varphi|\,R^{N-2}\,.
\end{aligned}$$

Poiché per $x\in B_R(0)\to\xi_0\in\partial B_R(0)$, si ha $|x|\to R$, segue che anche

$$\int_{\left\{\xi\in\partial B_R(0);\,|\xi-\xi_0|\geq\delta_e\right\}} K(\xi,x)\,|\varphi(\xi)-\varphi(\xi_0)|\,d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)<\varepsilon\,.$$

In definitiva, risulta

$$|u(x)-\varphi(\xi_0)|<2\varepsilon.$$

Osserviamo che il ragionamento precedente è locale; cioè, se φ è sommabile, limitata su $\partial B_R(0)$ e continua in $\xi_0\in\partial B_R(0)$, allora

$$u(x)\to\varphi(\xi_0)\qquad\text{quando}\qquad x\in B_R(0)\to\xi_0\,.\quad\square$$

2.8 “Caratterizzazione” delle funzioni armoniche

Abbiamo già provato che ogni funzione armonica soddisfa la proprietà del valor medio.
Proviamo, ora, che:

Teorema 2.8.1. *Se $u\in C^0(\Omega)$ e verifica la proprietà del valor medio allora u è armonica in Ω.*

Dimostrazione. Basta provare che u è armonica in ogni $B_R(y)$ con $\overline{B}_R(y)\subset\Omega$. Fissata $\overline{B}_R(y)\subset\Omega$, osserviamo che $u\in C^0(\partial B_R(y))$, pertanto il problema

$$\begin{cases}\Delta v=0 & \text{in } B_R(y)\\ v=u & \text{su } \partial B_R(y)\end{cases}$$

ha, come già dimostrato, un'unica soluzione $v\in C^2(B_R(y))\cap C^0(\overline{B}_R(y))$.
Consideriamo

$$w:=v-u\in C^0(\overline{B}_R(y))$$

e osserviamo che w (e quindi anche $-w$) verifica la proprietà del valor medio (in quanto tale proprietà è lineare, v verifica la proprietà del valor medio in quanto è funzione armonica e u la verifica per ipotesi), pertanto, per il principio del massimo debole

$$\sup_{\overline{B}_R(y)} |w| = \sup_{\partial B_R(y)} |w| = 0\,,$$

quindi $w = 0$, cioè $u = v$ in $\overline{B}_R(y)$, quindi u coincide con v (armonica) in $B_R(y)$. $\square$

2.9 Limite uniforme di successioni di funzioni armoniche

Teorema 2.9.1. *Sia* (u_j) *una successione di funzioni armoniche in* Ω*, tale che*

$$u_j \rightrightarrows u \quad \textit{in}\, \Omega.$$

Allora

$$u \textit{ è armonica in}\, \Omega.$$

Dimostrazione. Poiché u è limite uniforme di funzioni continue in Ω è anch'essa una funzione continua in Ω.
La tesi conseguirà se proviamo che u soddisfa la proprietà del valor medio.
Ora,

$$\forall\, j \in \mathbb{N} \quad e \quad \forall\, \overline{B}_R(y) \subset \Omega \qquad u_j(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_j(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

e passando al limite per $j \to +\infty$ si ha

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x). \quad \square$$

2.10 Sul concetto di problema ben posto secondo Hadamard e Principio di riflessione di Schwarz

Osservazione 2.10.1. Osserviamo che avendo provato per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in $B_R(0)$ un teorema di **esistenza**, **unicità** e **dipendenza continua della soluzione dal dato**, tale **problema al contorno** si dice **BEN POSTO secondo Hadamard**.

Notiamo inoltre che dalla dipendenza continua della soluzione dal dato, segue che se $(\varphi_j) \subset C^0(\partial B_R(0))$ e $\varphi_j \rightrightarrows \varphi \in C^0(\partial B_R(0))$ allora la successione di problemi

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u_j = \varphi_j & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases} \tag{P_j}$$

per $j \to \infty$ ha come problema limite

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{su } \partial B_R(0)\,. \end{cases} \tag{P_∞}$$

Infatti da

$$\sup_{\overline{B}_R(0)} |u_j - u_k| = \sup_{\partial B_R(0)} |\varphi_j - \varphi_k| \xrightarrow[j,k\to+\infty]{} 0\,,$$

segue che la successione (u_j) è di Cauchy nello spazio di Banach

$$\left(C^0(\overline{B}_R(0)), \| \, \|_{C^0(\overline{B}_R(0))}\right)$$

e quindi esiste $u \in C^0(\overline{B}_R(0))$ che è anche armonica in $B_R(0)$ in quanto limite uniforme di (u_j) successione di funzioni armoniche.

In conclusione possiamo dire che la dipendenza continua della soluzione dal dato esprime il fatto che l'**operatore di Green**

$$\mathcal{G} : \varphi \in C^0(\partial B_R(0)) \to \mathcal{G}(\varphi) = u \in C^0(\overline{B}_R(0)) \cap C^2(B_R(0))$$

$$\textbf{unica} \text{ soluzione di } \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases}$$

è **continuo**.

Osservazione 2.10.2. Ora vogliamo dare un esempio, dovuto ad Hadamard, che mostra come, in generale, rispetto a ragionevoli convergenze, il **problema di Cauchy per l'equazione di Laplace non è ben posto**, perché pur avendo esistenza della soluzione, questa può non dipendere con continuità dai dati di Cauchy.
Sia $N = 2$, $\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \in \mathbb{R}, x_2 > 0\right\}$ e consideriamo il problema di Cauchy, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \Delta u^j(x_1, x_2) = 0 & \text{in } \Omega \\ u^j(x_1, 0) = 0 & \forall\, x_1 \in \mathbb{R} \\ u^j_{x_2}(x_1, 0) = \dfrac{\operatorname{sen}(j\, x_1)}{j} & \forall\, x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$u^j(x_1, x_2) = \frac{\operatorname{sen}(j\, x_1)\ \operatorname{senh}(j\, x_2)}{j^2}\,,$$ [7]

[7] Poniamo

$$u^j(x_1, x_2) = \varphi(x_1) \cdot \psi(x_2)\,;$$

pertanto da $u^j(x_1, 0) = \varphi(x_1) \cdot \psi(0) = 0$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\psi(0) = 0\,;$$

da $u^j_{x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1) \cdot \psi'(0) = \dfrac{\operatorname{sen}(j\, x_1)}{j}$ per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\psi'(0) = 1 \quad \text{(costante non nulla)} \qquad \text{e quindi } \varphi(x_1) = \frac{\operatorname{sen}(j\, x_1)}{j}\,;$$

da $\Delta u^j(x_1, x_2) = \varphi''(x_1) \cdot \psi(x_2) + \varphi(x_1) \cdot \psi''(x_2) = 0$ si ha

$$\varphi''(x_1) = k\, \varphi(x_1) \quad \text{e} \quad \psi''(x_2) = -k\, \psi(x_2)\,.$$

Considerato che $\varphi(x_1) = \dfrac{\operatorname{sen}(j\, x_1)}{j}$ dalla prima equazione differenziale si ha $k = -j^2$;considerato che $\psi(0) = 0$ e $\psi'(0) = 1$ dalla seconda equazione differenziale si ha $\varphi(x_2) = \dfrac{\operatorname{senh}(j\, x_2)}{j}$. Pertanto

$$u^j(x_1, x_2) = \frac{\operatorname{sen}(jx_1)\ \operatorname{senh}(j\, x_2)}{j^2}\,.$$

dove
$$\operatorname{senh}(jx_2) = \frac{e^{jx_2} - e^{-jx_2}}{2},$$
è soluzione del problema in esame.
Osserviamo che
$$\left|\frac{\operatorname{sen}(jx_1)}{j}\right| \leq \frac{1}{j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$$
e quindi i dati del problema tendono a zero uniformemente rispetto a $(x_1, x_2) \in \Omega$.
Tuttavia,
$$\lim_{j\to+\infty} \left|u^j(x_1, x_2)\right| = +\infty \qquad \forall\,(x_1, x_2) \in \Omega.$$

Teorema 2.10.3. ***(Principio di riflessione di Schwarz)***

Consideriamo $B_R(0)$ in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$); per $x = (x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N) \in \mathbb{R}^N$ poniamo $x = (x', x_N)$ dove $x' = (x_1, \ldots, x_{N-1})$; sia
$$B_R^+(0) = \{x \in B_R(0);\ x_N > 0\},$$
$$B_R^-(0) = \{x \in B_R(0);\ x_N < 0\}.$$
Sia $u \in C^2(B_R^+(0)) \cap C^0(\overline{B}_R^+(0))$, armonica in $B_R^+(0)$ con $u = 0$ in $\overline{B}_R(0) \cap \{x_N = 0\}$. Posto
$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \textit{se } x \in \overline{B}_R(0) \cap \{x_N \geq 0\} \\ \\ -u(x_1, \ldots, x_{N-1}, -x_N) & \textit{se } x \in \overline{B}_R(0) \cap \{x_N < 0\} \end{cases}$$
(u^* è ottenuta da u prolungando la u come funzione dispari rispetto ad x_N),

la funzione u^* è armonica in $B_R(0)$.

Dimostrazione. È chiaro che questo prolungamento di u, u^*, è una funzione continua in $\overline{B}_R(0)$ ed armonica in $B_R^+(0) \cup B_R^-(0)$.
Il problema
$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(0) \\ v = u^* & \text{su } \partial B_R(0) \end{cases}$$
ha, come è noto, un'unica soluzione $v \in C^2(B_R(0)) \cap C^0(\overline{B}_R(0))$.
Per il fatto che il dato u^* su $\partial B_R(0)$ è funzione dispari rispetto alla N-esima variabile ξ_N, si deduce che v è funzione dispari rispetto alla N-esima variabile x_N (per (2.3)) [8] e in particolare $v(x', 0) = 0 (= u^*(x', 0))$. Pertanto v coincide con u^* su $\partial B_R^+(0)$ e su $\partial B_R^-(0)$. Per il teorema di unicità $v = u^*$ in $\overline{B}_R^+(0) \cup \overline{B}_R^-(0)$, quindi $v = u^*$ in $\overline{B}_R(0)$.
In particolare, u^* è armonica in $B_R(0)$. □

[8] infatti, poiché $u^*(\xi', -\xi_N) = -u^*(\xi', \xi_N)$ e $K(\xi', -\xi_N; x', -x_N) = K(\xi', \xi_N; x', x_N)$ si ha
$$v(x', -x_N) = -v(x', x_N)\,.$$

Osserviamo che il principio di riflessione di Schwarz è valido per ogni aperto connesso Ω *di* $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, *che sia simmetrico rispetto all'iperpiano* $x_N = 0$ *(cioè tale che se* $(x', x_N) \in \Omega$ *anche* $(x', -x_N) \in \Omega$*).*
La dimostrazione può essere fatta localmente, ricorrendo quindi al caso particolare di $B_R(0)$ *già dimostrato.*

Osservazione 2.10.4. Siamo ora in grado di provare che **il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in generale non è risolubile**, **nemmeno localmente**.

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in
$\Omega = \{(x', x_N) \in \mathbb{R}^N;\ x' \in \mathbb{R}^{N-1}, x_N > 0\}$

$$\begin{cases} \Delta u(x', x_N) = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x', 0) = 0 & \forall\, x' \in \mathbb{R}^{N-1} \\ u_{x_N}(x', 0) = \varphi(x') & \forall\, x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \end{cases}$$

Sia u una soluzione del problema precedente; tale u è armonica regolare in ogni $B_R^+(0)$ (al variare di $R > 0$), cioè $u \in C^2(B_R^+(0)) \cap C^0(\overline{B}_R^+(0))$ e $\Delta u = 0$ in $B_R^+(0)$. Inoltre $u = 0$ in $\overline{B}_R(0) \cap \{x_N = 0\}$.
Allora, conformemente al principio di riflessione di Schwarz, u^* è armonica in $B_R(0)$ e quindi u^* è analitica reale in $B_R(0)$. [9]
Pertanto anche

$$\varphi(x') = u_{x_N}(x', 0) = u^*_{x_N}(x', 0)$$

è necessariamente analitica reale per ogni $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.
Ne deduciamo che il problema in oggetto può avere una soluzione solo se il dato $\varphi = \varphi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, è analitico reale.

2.11 Disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche positive

Proviamo ora la disuguaglianza di Harnack per funzioni armoniche. La disuguaglianza di Harnack esprime una notevole proprietà delle funzioni armoniche e positive in Ω, precisamente il fatto che il rapporto tra il loro estremo superiore e il loro estremo inferiore, calcolati in un arbitrario compatto connesso Ω' contenuto in Ω, è limitato superiormente da una costante che dipende dalla dimensione dello spazio euclideo, da Ω e dal compatto Ω' cui sono riferiti gli estremi.
Esponiamo successivamente un teorema di Liouville secondo il quale una funzione armonica e positiva in tutto $\mathbb{R}^N$ è necessariamente costante (cfr. Teorema di Liouville 2.12.2 per un'altra dimostrazione) e un teorema sulla convergenza uniforme di successioni monotone crescenti di funzioni armoniche.

Proviamo dapprima la disuguaglianza di Harnack nel caso particolare in cui Ω è una palla di $\mathbb{R}^N$.

Lemma 2.11.1. *Siano* $y \in \mathbb{R}^N$, $R > 0$ *e* u *una funzione armonica e positiva in* $B_{4R}(y)$. *Allora*

$$\sup_{B_R(y)} u \ \leq\ 3^N \inf_{B_R(y)} u\,. \tag{2.5}$$

[9] Per la dimostrazione della analiticità delle funzioni armoniche consultare il Teorema 8.5.4.

Dimostrazione. Comunque si scelgano due punti $x^1, x^2 \in B_R(y) \subseteq B_{4R}(y)$ applicando il teorema del valor medio 2.1.3 si ottiene

$$u(x^1) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_1)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

da cui

$$\sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Analogamente

$$u(x^2) = \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{3R}(x_2)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \geq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)$$

da cui

$$\inf_{B_R(y)} u \geq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

In definitiva

$$\frac{1}{3^N} \sup_{B_R(y)} u \leq \frac{1}{\omega_N 3^N R^N} \int_{B_{2R}(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \leq \inf_{B_R(y)} u$$

e quindi

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^N \inf_{B_R(y)} u\,.$$

□

Teorema 2.11.2. *(Disuguaglianza di Harnack, 1887)*
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, u una funzione armonica in Ω, $u \geq 0$. Allora per ogni Ω' connesso, $\Omega' \subset\subset \Omega$ [10], esiste una costante c dipendente solo da N, Ω, Ω' tale che

$$\sup_{\Omega'} u \;\leq\; c \inf_{\Omega'} u\,. \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Il compatto e connesso $\overline{\Omega}'$ può essere ricoperto con un numero finito di palle $B_R(\omega^i) \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, m$, con centri $\omega^i \in \Omega'$ (sia $R < \frac{1}{4} dist\,(\Omega', \partial\Omega)$). Siano $x^1, x^2 \in \Omega'$ tali che, senza ledere la generalità, $x^1 \in B_R(\omega^k)$, $x^2 \in B_R(\omega^{k+j})$ per qualche $j \geq 1$, e le palle siano numerate in modo che risulti $B_R(\omega^l) \cap B_R(\omega^{l+1}) \neq \emptyset$ per $l = k, k+1, \ldots, k+j-1$.

[10] La notazione $\Omega' \subset\subset \Omega$ indica che la chiusura $\overline{\Omega}'$ è compatta e contenuta in Ω

Applicando la stima (2.5) in ciascuna palla e combinando le disuguaglianze si ottiene

$$\begin{array}{cccccc}
u(x^1) & \leq & \sup_{B_R(\omega^k)} u & \leq & 3^N \inf_{B_R(\omega^k)} u \\
& \leq & 3^N \inf_{B_R(\omega^k)\cap B_R(\omega^{k+1})} u & \leq & 3^N \sup_{B_R(\omega^k)\cap B_R(\omega^{k+1})} u \\
& \leq & 3^N \sup_{B_R(\omega^{k+1})} u & \leq & 3^{2N} \inf_{B_R(\omega^{k+1})} u \\
& \leq & 3^{2N} \inf_{B_R(\omega^{k+1})\cap B_R(\omega^{k+2})} u & \leq & \dots \\
& \leq & 3^{(j+1)N} \inf_{B_R(\omega^{k+j})} u & \leq & 3^{(m+1)N} u(x^2)\,.
\end{array}$$

Essendo x^1, x^2 arbitrari, posto $c := 3^{(m+1)N}$, si ha

$$\sup_{\Omega'} u \;\leq\; c \,\inf_{\Omega'} u$$

e la dimostrazione è completa. □

Teorema 2.11.3. *(Teorema di Liouville)*
Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u = 0$, $u \geq 0$ *in* $\mathbb{R}^N$. *Allora* u *è costante in* $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. Sia $m = \inf_{\mathbb{R}^N} u \geq 0$ e si consideri la funzione $\mathcal{V} = u - m$. Allora $\Delta\mathcal{V} = 0$ e $\inf_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} = 0$. Applicando la disuguaglianza di Harnack (2.5) alla funzione $\mathcal{V}$ si ottiene

$$\forall\, R > 0 \qquad\qquad \sup_{B_R(0)} \mathcal{V} \;\leq\; 3^N \inf_{B_R(0)} \mathcal{V}$$

e, passando al limite per $R \to +\infty$, si ha $\sup_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq 0$.
Osservato che risulta

$$0 = \inf_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \mathcal{V} \leq 0$$

si ha $\mathcal{V} = 0$ cioè $u = m$. □

Teorema 2.11.4. *Sia* (u_n) *una successione monotona crescente di funzioni armoniche in un aperto connesso limitato* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *e si supponga che esista* $y \in \Omega$ *tale che la successione* $(u_n(y))$ *sia limitata. Allora la successione* (u_n) *converge uniformemente ad una funzione armonica in ogni* $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Dimostrazione. Poiché la successione è monotona

$$\exists\, u(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x) \leq +\infty\,.$$

In particolare $u(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(y) < +\infty$ cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu > 0 \;: \qquad \forall\, n, m \geq \nu\,,\; n > m \qquad 0 \leq u_n(y) - u_m(y) < \epsilon\,.$$

Si considerino ora $\Omega' \subset\subset \Omega$ e Ω'' connesso tale che $\Omega' \cup \{y\} \subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Per la disuguaglianza di Harnack (2.6), se $n, m \geq \nu$

$$\sup_{z\in\Omega''} |u_n(z) - u_m(z)| \leq c(N, \Omega'', \Omega) \cdot \inf_{z\in\Omega''} |u_n(z) - u_m(z)| \leq c(N, \Omega'', \Omega) \cdot \varepsilon$$

che è la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme. Quindi la successione (u_n) converge uniformemente in Ω' e, poiché il limite uniforme di funzioni armoniche è una funzione armonica, vale la tesi. □

2.12 Stima (interna) a priori del gradiente di una funzione armonica

Teorema 2.12.1. *Sia Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$; u armonica in Ω ed ivi limitata. Allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha*

$$\sup_K |\nabla u| \leq \frac{N}{d_K} \sup_\Omega |u|,$$

dove $d_K = dist\,(K, \partial\Omega) > 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che $\nabla u = (\partial_1 u, \ldots, \partial_N u)$ è una funzione vettoriale armonica in Ω.
Sia $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$, allora, per la proprietà del valor medio,

$$\begin{aligned} \nabla u(y) &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} \nabla u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &= \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\partial B_R(y)} u(\xi)\nu(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \quad \text{(per il teorema della divergenza)} \end{aligned}$$

e quindi

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \sup_\Omega |u|\, N\omega_N R^{N-1} = \frac{N}{R} \sup_\Omega |u|.$$

Sia, ora, $y \in \Omega$ e sia $d_y = d(y, \partial\Omega)$ (funzione continua di y); per ogni $0 < R < d_y$ si ha $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$ e quindi (per quanto già provato)

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{R} \sup_\Omega |u|,$$

e per $R \to d_y$:

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{d_y} \sup_\Omega |u| \qquad \forall\, y \in \Omega.$$

Sia, infine, K compatto, contenuto in Ω e sia

$$d_K = \min_{y\in K} d_y = dist\,(K, \partial\Omega) > 0;$$

allora

$$|\nabla u(y)| \leq \frac{N}{d_K} \sup_\Omega |u| \quad \text{per ogni } y \in K,$$

e quindi

$$\sup_K |\nabla u| \leq \frac{N}{d_K} \sup_\Omega |u|. \quad \square$$

Teorema 2.12.2. *(Teorema di Liouville)*
Se u è armonica e limitata in $\mathbb{R}^N$, allora u è costante.

Dimostrazione. Basta applicare la stima interna per il gradiente di u con $K = \overline{B}_R(0)$ e $\Omega = B_{2R}(0)$; allora

$$\sup_{\overline{B}_R(0)} |\nabla u| \leq \frac{N}{R} \sup_{B_{2R}(0)} |u|$$

e per $R \to +\infty$ si ha $\sup\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| = 0$, pertanto u è costante in $\mathbb{R}^N$. □

Teorema 2.12.3. *(Teorema di compattezza per successioni di funzioni armoniche)*
Sia (u_j) una successione di funzioni armoniche in Ω (aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$); se (u_j) è equilimitata in Ω, allora esiste una successione estratta da (u_j) che converge uniformemente ad una funzione (necessariamente) armonica sui sottoinsiemi compatti di Ω.

Dimostrazione. Dalla stima interna per il gradiente di una funzione armonica, segue, stante la equilimitatezza di (u_j), che la successione (∇u_j) è equilimitata su ogni compatto contenuto in Ω:

$\forall\, K$ compatto, $K \subset \Omega$:

$$\sup_K |\nabla u_j| \leq \frac{N}{d_K} \sup_\Omega |u_j| \leq c \qquad (c \text{ indipendente da } j).$$

Pertanto, per il teorema di Lagrange, la successione (u_j) è equilipschitziana e quindi equicontinua in ogni compatto contenuto in Ω.
La tesi segue dal teorema di compattezza di Ascoli-Arzelà. □

2.13 Il Problema di Dirichlet: Il metodo delle funzioni subarmoniche *(di O. Perron, 1923)*

Siamo ora in grado di affrontare la questione dell'esistenza della soluzione per il problema (classico) di Dirichlet in un "arbitrario" Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$.
La trattazione che seguiremo è quella del "*metodo di Perron delle funzioni subarmoniche*" che si fonda sul principio del massimo e sulla risolubilità del problema di Dirichlet su palle di $\mathbb{R}^N$.
Il metodo è semplice, elegante e separa il problema dell'esistenza nell'aperto Ω dal comportamento della soluzione sulla frontiera $\partial\Omega$.

Per completezza di esposizione del metodo ricordiamo la seguente definizione:

Definizione 2.13.1.

$$u \quad subarmonica \quad in \quad \Omega \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad u \in C^o(\Omega) \quad e \quad \forall\, \overline{B}_R(y) \subset \Omega$$
$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,.$$

Come già fatto, indicheremo con $\sigma(\Omega)$ la classe delle funzioni subarmoniche in Ω.

Ricordiamo, inoltre, il seguente

Lemma 2.13.2. *(Principio del max debole)*
Se Ω è aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^N$ e $u \in \sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$, allora

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u\,.$$

Definizione 2.13.3. Si definisce **sollevamento armonico di una funzione subarmonica** $\mathbf{u} \in \sigma(\Omega)$ **relativo a** $\mathbf{B_R(y)}$, con $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$, la funzione così definita

$$u_{y,R}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \setminus B_R(y) \\ & \\ \text{l'unica soluzione di } \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B_R(y) \\ v = u & \text{su } \partial B_R(y) \end{cases} & \text{se } x \in \overline{B}_R(y)\,. \end{cases}$$

Lemma 2.13.4. *Sia $u \in \sigma(\Omega)$ e $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$; allora*

(i) $u(x) \le u_{y,R}(x) \quad \forall\, x \in \Omega\,;$

(ii) $u_{y,R} \in \sigma(\Omega)\,.$

Dimostrazione.

(i) In $\Omega \setminus B_R(y)$ $u = u_{y,R}$; inoltre, poiché $u - u_{y,R} \in \sigma(B_R(y)) \cap C^0(\overline{B}_R(y))$ dal Lemma 2.13.2 segue che

$$\sup_{\overline{B}_R(y)} (u - u_{y,R}) = \sup_{\partial B_R(y)} (u - u_{y,R}) = 0,$$

e quindi

$$u - u_{y,R} \le 0 \quad \text{in } B_R(y)\,.$$

(ii) $u_{y,R} \in C^0(\Omega)$, inoltre in $\Omega \setminus \overline{B}_R(y)$ $u_{y,R} = u$ e per u vale la diseguaglianza del valor medio; in $B_R(y)$, $u_{y,R}$ è addirittura armonica e quindi soddisfa la uguaglianza del valor medio. Per i punti $\zeta \in \partial B_R(y)$ si ha

$$\begin{aligned} u_{y,R}(\zeta) = u(\zeta) &\le \frac{1}{\omega_N t^N} \int_{B_t(\zeta)} u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \\ &\le \text{(per (i))} \quad \frac{1}{\omega_N t^N} \int_{B_t(\zeta)} u_{y,R}(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \end{aligned}$$

per ogni $t > 0$ sufficientemente piccolo. □

Definizione 2.13.5. Sia Ω *aperto connesso limitato* di $\mathbb{R}^N$; $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ *limitata*; posto

$$m = \inf_{\partial\Omega} \varphi, \qquad M = \sup_{\partial\Omega} \varphi\,,$$

definiamo la classe

$$\sigma_\varphi(\overline{\Omega}) := \left\{ u \in \sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega}); \quad u \leq \varphi \quad su \quad \partial\Omega \right\}\,.$$

Osservazione 2.13.6.

$$\sigma_\varphi(\overline{\Omega}) \neq \emptyset \quad \big(\text{in quanto le costanti} \leq m \text{ sono in } \sigma_\varphi(\overline{\Omega})\big)\,.$$

Lemma 2.13.7. *Se* $u_1, u_2, \ldots, u_k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ *allora anche*

$$v = \max\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})\,.$$

Dimostrazione. È chiaro che $v \in C^o(\overline{\Omega})$ e $v \leq \varphi$ su $\partial\Omega$; inoltre per ogni $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$:

$$\begin{aligned} v(y) &= \max\{u_1(y), \ldots, u_k(y)\} \\ &\leq \max\left\{ \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_1(x)\, d\mathcal{L}^N(x), \ldots, \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} u_k(x)\, d\mathcal{L}^N(x) \right\} \\ &\leq \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(y)} v(x)\, d\mathcal{L}^N(x)\,. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 2.13.8.

$$\forall\, u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) : \quad u(x) \leq M \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Infatti per il Lemma 2.13.2,

$$\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u \leq M\,.$$

Definizione 2.13.9. Ha senso allora definire la seguente **funzione (di Perron)**:

$$\begin{aligned} W_\varphi &: \Omega \to \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto W_\varphi(x) := \sup_{u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})} u(x)\,. \end{aligned}$$

Lemma 2.13.10. *La funzione di Perron* W_φ *è armonica in* Ω.

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega$ e $\overline{B}_R(y) \subset \Omega$; sia $0 < R' < R$ e consideriamo una successione $(x_j) \subset B_{R'}(y)$. Risulta

$$W_\varphi(x_j) = \sup_{u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})} u(x_j)$$

pertanto per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore si ha

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists u_j^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) : \quad W_\varphi(x_j) - \frac{1}{k} < u_j^k(x_j) \le W_\varphi(x_j)$$

e quindi

$$\exists u_j^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega}) \quad (j, k = 1, 2, \dots) : \quad \lim_{k \to +\infty} u_j^k(x_j) = W_\varphi(x_j) \quad \forall\, j = 1, 2, \dots . \tag{2.7}$$

Consideriamo (fissato $k \in \mathbb{N}$)

$$u^k = \max\left\{u_1^k, \dots, u_k^k\right\}.$$

Per il Lemma 2.13.7 risulta $u^k \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$; inoltre

$$u_j^k(x_j) \le u^k(x_j) \le W_\varphi(x_j) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad 1 \le j \le k\,,$$

e quindi, per confronto, da (2.7), si ha che

$$\exists \lim_{k \to +\infty} u^k(x_j) = W_\varphi(x_j) \quad \forall\, j = 1, 2, \dots . \tag{2.8}$$

La successione (u^k) può essere assunta *equilimitata* con $m \le u^k \le M$ (se necessario si consideri $\max\left\{u^k, m\right\} \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ per il Lemma 2.13.7, e verificante ovviamente ancora (2.8) in quanto $\forall\, j \in \mathbb{N}\;\, u^k(x_j) \le \max\left\{u^k(x_j), m\right\} \le W_\varphi(x_j)$).
Consideriamo, per ogni k, il sollevamento armonico $u_{y,R}^k$ di u^k relativo a $B_R(y)$; denotiamo ancora, per semplicità, con (u^k) tale successione equilimitata.
In definitiva la successione è equilimitata, è formata da funzioni di $\sigma_\varphi(\overline{\Omega})$, soddisfa (2.8) ed è tale che in $B_R(y)$ le funzioni u^k sono armoniche.
Per il teorema di compattezza 2.12.3 esiste una funzione *armonica* W tale che (a meno di successioni estratte)

$$u^k \rightrightarrows W \text{ in } \overline{B}_{R'}(y).$$

Per (2.8)

$$\lim_{k \to +\infty} u^k(x_j) = W_\varphi(x_j) = W(x_j) \quad \forall\, j = 1, 2, \dots$$

per cui W_φ coincide con una funzione armonica W nei punti della successione (x_j) fissata in $B_{R'}(y)$ (osserviamo che W dipende a-priori dalla scelta della successione (x_j) e dalla successione estratta da (u^k)). Sia, ora, $x \in B_{R'}(y)$ e sia $(x_j) \subset B_{R'}(y)$ tale che $x_j \to x_1 = x$; si ha, per la continuità della corrispondente W,

$$\lim_{j \to +\infty} W_\varphi(x_j) = \lim_{j \to +\infty} W(x_j) = W(x_1) = W_\varphi(x_1),$$

cioè W_φ *è continua in* $B_{R'}(y)$. Sia infine (x_j) una successione densa in $B_{R'}(y)$. Allora W_φ coincide con una funzione armonica in ogni x_j e quindi per la continuità, in ogni punto di $B_{R'}(y)$. Ciò significa che W_φ è armonica in un intorno di y, e quindi in tutto Ω. $\square$

Il risultato precedente esibisce una funzione armonica W_φ che è una possibile soluzione del problema classico di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Nel metodo di Perron lo studio del comportamento su $\partial\Omega$ della soluzione è essenzialmente separato dal problema dell'esistenza.

L'assunzione con continuità del valore alla frontiera è legata alle proprietà geometriche di $\partial\Omega$ attraverso il concetto di funzione barriera.

Definizione 2.13.11. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$; una funzione $Q_{\xi_0} \in \sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ tale che

$$Q_{\xi_0}(\xi_0) = 0, \qquad Q_{\xi_0}(\xi) < 0 \quad \forall\, \xi \in \partial\Omega \setminus \{\xi_0\}$$

si chiama **funzione barriera relativa al punto** ξ_0 e all'operatore di Laplace (osserviamo che, per il Lemma 2.13.2, risulta $Q_{\xi_0} \leq 0$ in $\overline{\Omega}$).

Il punto di frontiera $\xi_0 \in \partial\Omega$ si dice **regolare** se esiste una funzione barriera relativa a ξ_0, altrimenti ξ_0 si dice **eccezionale**.

Lemma 2.13.12. *Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$ regolare; $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ limitata su $\partial\Omega$ e continua in ξ_0; allora*

$$\liminf_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_\varphi(x) \geq \varphi(\xi_0) \quad [11] \tag{i}$$

ed anche

$$\exists \lim_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_\varphi(x) = \varphi(\xi_0). \tag{ii}$$

Dimostrazione. (i) Sia Q_{ξ_0} la funzione barriera relativa a ξ_0; siano $\varepsilon > 0$, $k > 0$. La funzione u definita da

$$u(x) := \varphi(\xi_0) - \varepsilon + kQ_{\xi_0}(x) \quad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

é di classe $\sigma(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$, e soddisfa

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \varphi(\xi_0) - \varepsilon + kQ_{\xi_0}(\xi) \leq \varphi(\xi_0) - \varepsilon \quad \forall\, \xi \in \partial\Omega, \\ u(\xi_0) &= \varphi(\xi_0) - \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dimostriamo che $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$, pertanto proviamo che $u \leq \varphi$ su $\partial\Omega$. Infatti, poiché φ è continua in ξ_0, in corrispondenza di $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\forall\, \xi \in \partial\Omega : \quad |\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon \implies |\varphi(\xi) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon,$$

---

[11]

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) := \sup_{r>0} \inf_{0<|x-x_0|<r} f(x) \qquad (\text{\underline{minimo limite} di } f \text{ per } x \to x_0)$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x) := \inf_{r>0} \sup_{0<|x-x_0|<r} f(x) \qquad (\text{\underline{massimo limite} di } f \text{ per } x \to x_0)$$

da cui

$$\varphi(\xi) > \varphi(\xi_0) - \varepsilon \geq u(\xi)\,.$$ [12]

Quindi

$$u \leq \varphi \qquad \text{su } \{|\xi - \xi_0| < \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega.$$

Poiché $Q_{\xi_0}(\xi)$ è limitata superiormente da un numero reale negativo per $\{|\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega$, possiamo trovare $k = k(\varepsilon) > 0$ sufficientemente grande in modo che $u \leq \varphi$ valga anche per $\{|\xi - \xi_0| \geq \delta_\varepsilon\} \cap \partial\Omega$.
Allora $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ e di conseguenza $u(x) \leq W_\varphi(x)$ per ogni $x \in \Omega$.
Ne segue che

$$\varphi(\xi_0) - \varepsilon = u(\xi_0) = \lim_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} u(x) \leq \liminf_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_\varphi(x),$$

da cui segue la tesi per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

(ii) È sufficiente provare che

$$\limsup_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_\varphi(x) \leq \varphi(\xi_0)\,.$$

Proviamo che

$$W_\varphi(x) \leq -W_{-\varphi}(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Risulta

$$-W_{-\varphi}(x) = -\sup_{u\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} u(x) = \inf_{u\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} (-u(x)) = \inf_{-U\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} U(x)$$

dove si è posto $U(x) = -u(x)$. Osservato che per $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ e $-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ risulta $u - U \leq 0$ su $\partial\Omega$ e $u - U \in \sigma(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, per il Lemma 2.13.2 si ha $u - U \leq 0$ in $\overline{\Omega}$ e quindi

$$\sup_{u\in\sigma_\varphi(\overline{\Omega})} u(x) \leq \inf_{-U\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} U(x) \quad \forall\, x \in \Omega\,, \tag{2.9}$$

cioè

$$W_\varphi(x) \leq -W_{-\varphi}(x) \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Applicando (i) a $W_{-\varphi}$ si ha:

$$\liminf_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_{-\varphi}(x) \geq -\varphi(\xi_0),$$

e quindi

$$\limsup_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_\varphi(x) \leq \limsup_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} (-W_{-\varphi}(x)) = -\liminf_{\substack{x\to\xi_0\\ x\in\Omega}} W_{-\varphi}(x) \leq \varphi(\xi_0). \quad \square$$

[12] evidentemente per provare la (i) è sufficiente supporre φ semicontinua inferiormente in $\xi_0 \in \partial\Omega$.

Osservazione 2.13.13. La relazione (2.9) vuol dire che la classe delle $u \in \sigma_\varphi(\overline{\Omega})$ e quella delle $-U \in \sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ (cioè delle U superarmoniche, regolari, con $U \geq \varphi$ su $\partial\Omega$) sono separate.

Teorema 2.13.14. *(Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dal dato, per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace)*
Sia Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$; il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in}\, \Omega \\ u = \varphi & \textit{su}\, \partial\Omega \end{cases}$$

è risolubile in $C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ per ogni dato $\varphi \in C^o(\partial\Omega)$ **se e solo se** *ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ è regolare. La soluzione è la funzione di Perron W_φ. Inoltre (per il teorema del massimo modulo)*

$$\sup_{\overline{\Omega}} |W_\varphi| = \sup_{\partial\Omega} |\varphi| \,.$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C^o(\partial\Omega)$ e ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ sia regolare. Allora, per il Lemma 2.13.10, W_φ è armonica in Ω e, per il Lemma 2.13.12,

$$\exists \lim_{\substack{x \to \xi_0 \\ x \in \Omega}} W_\varphi(x) = \varphi(\xi_0) \quad \forall\, \xi_0 \in \partial\Omega.$$

Ciò implica che, se $\partial\Omega$ è formata da punti regolari e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, allora $W_\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$ quando poniamo $W_\varphi = \varphi$ su $\partial\Omega$.
Quindi

$$W_\varphi \in C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$$

e

$$\begin{cases} \Delta W_\varphi = 0 & \text{in}\, \Omega \\ W_\varphi = \varphi & \text{su}\, \partial\Omega \end{cases} .$$

Viceversa, supponiamo che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in}\, \Omega \\ u = \varphi & \text{su}\, \partial\Omega \end{cases}$$

sia risolubile in $C^2(\Omega) \cap C^o(\overline{\Omega})$ per ogni dato $\varphi \in C^o(\partial\Omega)$. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$. Consideriamo $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi(\xi) = -\left|\xi - \xi_0\right| \qquad \forall\, \xi \in \partial\Omega.$$

Si ha $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$; sia $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in}\, \Omega \\ v(\xi) = -\left|\xi - \xi_0\right| & \forall\, \xi \in \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Definita

$$Q_{\xi_0}(x) = v(x) \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

si riconosce facilmente che Q_{ξ_0} è una funzione barriera relativa a ξ_0, sicché ξ_0 è regolare. □

Rimane l'importante questione: per quali Ω (aperti connessi limitati di $\mathbb{R}^N$) i punti di frontiera sono regolari?
Sono note (generali) condizioni sufficienti in termini delle proprietà geometriche (locali) di $\partial\Omega$.
Illustriamo una di queste condizioni.

Definizione 2.13.15. Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ ha la proprietà della palla esterna se

$$\forall\, \xi_0 \in \partial\Omega \quad \exists B_R(y): \quad \overline{B}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}.$$

Proposizione 2.13.16. *Se Ω ha la proprietà della palla esterna, allora ogni punto di $\partial\Omega$ è regolare.*

Dimostrazione. Sia $\xi_0 \in \partial\Omega$ e $B_R(y)$ tale che

$$\overline{B}_R(y) \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}.$$

Definiamo per ogni $x \in \overline{\Omega}$

$$Q_{\xi_0}(x) = \begin{cases} |x-y|^{2-N} - R^{2-N} & \text{se } N \geq 3 \\ \log \dfrac{R}{|x-y|} & \text{se } N = 2. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che Q_{ξ_0} è una funzione barriera relativa a ξ_0. □

Osservazione 2.13.17. Osserviamo che se Ω è *strettamente convesso* (nel senso che per ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ esiste un iperpiano Π_{ξ_0} tale che $\Pi_{\xi_0} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}$) allora Ω ha la proprietà della palla esterna.

Se $N \geq 3$ gli aperti Ω con "spine rientranti" (che puntano in Ω) non sono ammissibili per il problema classico di Dirichlet, come mostra un argomento di Lebesgue, per il quale si può consultare e.g. [5] alle pp. 77-78.

2.14 Potenziale Newtoniano e problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

Abbiamo definito, per $N \geq 3$, la soluzione fondamentale (di polo x^o) per il Δ:

$$\Gamma(x-x^o) = \frac{1}{N(2-N)\omega_N}\, |x-x^o|^{2-N} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{x^o\}$$

e inoltre, per $\overline{\Omega}$ connesso, compatto di $\mathbb{R}^N$, di classe C^1 a tratti, e per $u \in C^2(\overline{\Omega})$ abbiamo provato la formula di rappresentazione di Green (Teorema 2.6.1):

$$u(x^o) = \int_\Omega \Gamma(x-x^o)\Delta_x u(x)\, d\mathcal{L}^N(x) + \int_{\partial\Omega} \left[u(\xi)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(\xi - x^o) - \Gamma(\xi - x^o)\frac{\partial u}{\partial\nu}(\xi) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

per ogni $x^o \in \Omega$.

Definito il **potenziale (di dominio) Newtoniano di densità f**, con f funzione limitata e integrabile in Ω,

$$w(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)\, f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall\, x \in \Omega,$$

dalla rappresentazione precedente risulta che u è somma del potenziale Newtoniano (di densità $\Delta_x u$) e di una funzione armonica.

Studiamo pertanto il potenziale Newtoniano di densità f; in particolare vediamo sotto quali ipotesi sulla densità f il potenziale Newtoniano è C^2, al fine di trovare una soluzione (particolare) dell'equazione di Poisson.

Lemma 2.14.1. *Sia* Ω *aperto connesso limitato di* $\mathbb{R}^N$, f *limitata e integrabile in* Ω*; allora posto*

$$w(x) := \int_\Omega \Gamma(x-y)\, f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall\, x \in \Omega\,,$$

si ha

$$w \in C^1(\overline{\Omega}) \qquad e \qquad \partial_i w(x) = \int_\Omega \partial_i \Gamma(x-y)\, f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall\, x \in \Omega\,, \quad i = 1, \ldots, N$$

dove $\partial_i = \partial_{x_i}$.

Dimostrazione. Per $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$v(x) = \int_\Omega \partial_i \Gamma(x-y)\, f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

(v è ben definita perché $\partial_i \Gamma(x-y)$ è sommabile e f è limitata). Per provare che $w \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\partial_i w = v$, costruiamo una famiglia di funzioni $(w_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \in C^1(\overline{\Omega})$ tale che per $\varepsilon \to 0^+$

$$w_\varepsilon \rightrightarrows w$$

e

$$\partial_i w_\varepsilon \rightrightarrows v\,.$$

Per questo sia $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ tale che

$$0 \le \vartheta(t) \le 1, \quad 0 \le \vartheta'(t) \le 2 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \le 1 \\ 1 & \text{se } t \ge 2 \end{cases}$$

(ad esempio

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le 1 \\ 5 - 12t + 9t^2 - 2t^3 & \text{per } 1 < t < 2 \\ 1 & \text{per } t \ge 2 \end{cases} \qquad).$$

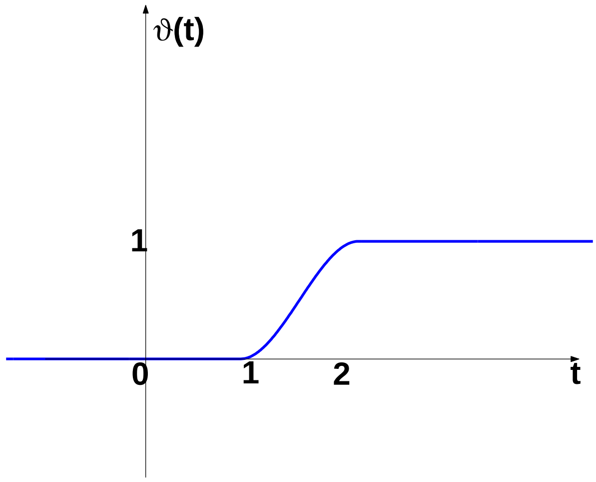

Figura 2.1: Grafico della funzione ϑ

Definiamo per $\varepsilon > 0$

$$w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \Gamma(x-y)\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Si ha $w_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ (in quanto Γ è C^∞ e ϑ è C^1) e

$$w(x) - w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|\leq 2\varepsilon} \Gamma(x-y)\left[1 - \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

da cui

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)|\; d\mathcal{L}^N(y) \cdot \sup_\Omega |f|.$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)|\, d\mathcal{L}^N(y) &= \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} \frac{1}{N(N-2)\omega_N} |x-y|^{2-N}\, d\mathcal{L}^N(y) \\
&= \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{2-N} \varrho^{N-1}\, d\mathcal{L}^1(\varrho) \\
&= \frac{1}{N-2}\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^{2\varepsilon} = \frac{4\varepsilon^2}{2(N-2)} = \frac{2\varepsilon^2}{N-2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$|w(x) - w_\varepsilon(x)| \leq \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\Gamma(x-y)|\; d\mathcal{L}^N(y) \cdot \sup_\Omega |f| = \sup_\Omega |f| \cdot \frac{2\varepsilon^2}{N-2}$$

da cui si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} w_\varepsilon = w \quad \textit{uniformemente} \text{ sui compatti di } \mathbb{R}^N \text{ (e quindi in } \overline{\Omega}).$$

Ora proviamo che

$$\partial_i w_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\rightrightarrows} v.$$

Risulta

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} \partial_i \left[\Gamma(x-y)\cdot\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,,$$

$$v(x) - \partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \partial_i \left\{\Gamma(x-y)\left[1-\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right]\right\} f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)$$

$$= \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \left\{\partial_i\Gamma(x-y)\left[1-\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] - \Gamma(x-y)\partial_i\vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right\} f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,.$$

Poiché

$$|\partial_i\Gamma(x-y)| \le \frac{1}{N\omega_N}\,|x-y|^{1-N}\,,$$

si ha

$$\int_{|x-y|\le 2\varepsilon} |\partial_i\Gamma(x-y)|\; d\mathcal{L}^N(y) \le \frac{1}{N\omega_N}\int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |x-y|^{1-N}\; d\mathcal{L}^N(y) = 2\varepsilon$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
|v(x) - \partial_i w_\varepsilon(x)| &\le \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \left\{|\partial_i\Gamma(x-y)| + |\Gamma(x-y)|\,\frac{2}{\varepsilon}\right\} d\mathcal{L}^N(y)\cdot \sup_\Omega |f| \\
&\le \sup_\Omega |f|\cdot\left(2\varepsilon + \frac{2\varepsilon^2}{N-2}\cdot\frac{2}{\varepsilon}\right) \\
&\le \sup_\Omega |f|\cdot\left(2\varepsilon + \frac{4\varepsilon}{N-2}\right) = \sup_\Omega |f|\cdot\left(\varepsilon\,\frac{2N}{N-2}\right).
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \partial_i w_\varepsilon = v \qquad \textit{uniformemente} \text{ sui compatti di } \mathbb{R}^N \text{ (e quindi in } \overline{\Omega}). \quad \square$$

Lemma 2.14.2. *Sia Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha \le 1)$; allora $w \in C^2(\Omega)$ e*

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij}\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) - f(x)\int_{\partial\Omega_0} \partial_i\Gamma(x-\xi)\,\nu_j(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

$$\forall\, x\in\Omega\,,\qquad i,j = 1,\dots,N\,,$$

dove Ω_0 è un qualsiasi aperto limitato contenente Ω, con frontiera di classe C^1 a tratti, e $f\equiv 0$ in $\Omega_0\setminus\overline{\Omega}$. Inoltre

$$\Delta w(x) = f(x)\quad \forall\, x\in\Omega\,.$$

Osserviamo che si può mostrare che

$$f\in C^0(\overline{\Omega}) \quad \not\Rightarrow \quad w\in C^2(\Omega)$$

(cfr. e.g. [13] a p. 54).

Dimostrazione. Sia $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$ la funzione introdotta nella dimostrazione del Lemma 2.14.1 e definiamo per $\varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} [\partial_i \Gamma(x-y)]\, \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \qquad \forall\, x \in \Omega\,.$$

v_ε è ben definita perché $\partial_i\Gamma$ è sommabile, ϑ ed f sono limitate; inoltre si riconosce che $v_\varepsilon \in C^1(\Omega)$.
Ricordiamo che per il Lemma 2.14.1, posto

$$v(x) = \int_\Omega \partial_i \Gamma(x-y) f(y)\, d\mathcal{L}^N(y)\,,$$

si ha

$$v = \partial_i w \quad \text{ in } \Omega,$$

inoltre si prova agevolmente che

$$|v(x) - v_\varepsilon(x)| \le \sup_{\overline{\Omega}} |f| \cdot 2\varepsilon\,,$$

da cui segue che

$$v_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\rightrightarrows} v \qquad \text{in } \Omega\,.$$

Posto

$$u(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij}\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi)\, \nu_j(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)\,,$$

osserviamo che u è ben definita, in particolare il primo integrale è finito in quanto

$$|\partial_{ij}\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]| \le c_N\, |x-y|^{-N}\, [f]_{0,\alpha}\, |x-y|^\alpha = \, c_N\, [f]_{0,\alpha}\, |x-y|^{-N+\alpha}\,.$$

Proviamo che

$$\partial_j v_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\rightrightarrows} u \qquad \text{sui sottoinsiemi compatti di } \Omega \qquad (j = 1, \dots, N)\,,$$

ne seguirà che esiste $\partial_j v = u$, e poiché $v = \partial_i w$ si avrà in definitiva $w \in C^2(\Omega)$ e

$$u = \partial_{ij} w.$$

Proviamo dunque

$$\partial_j v_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\rightrightarrows} u.$$

Si ha, posto per brevità

$$\vartheta_\varepsilon := \vartheta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right),$$

$$\begin{aligned}
\partial_j v_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \partial_j \left([\partial_i\Gamma(x-y)]\, \vartheta_\varepsilon\right) f(y)\, d\mathcal{L}^N(y) \\
&= \int_{\Omega_0} \partial_j \left([\partial_i\Gamma(x-y)]\, \vartheta_\varepsilon\right) [f(y)-f(x)]\; d\mathcal{L}^N(y) \\
&\quad + f(x) \int_{\Omega_0} \partial_j \left([\partial_i\Gamma(x-y)]\, \vartheta_\varepsilon\right)\; d\mathcal{L}^N(y) \\
&= \int_{\Omega_0} \partial_j \left([\partial_i\Gamma(x-y)]\, \vartheta_\varepsilon\right) [f(y)-f(x)]\; d\mathcal{L}^N(y) \\
&\quad - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x-\xi) \nu_j(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)
\end{aligned}$$

purché $\varepsilon > 0$ sia sufficientemente piccolo (per cui $\vartheta_\varepsilon = 1$); al secondo integrale si è applicato il teorema della divergenza (Ω_0 ha frontiera di classe C^1 a tratti). Allora per sottrazione, per $2\varepsilon < d(x, \partial\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - \partial_j v_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \partial_j \big\{(1-\vartheta_\varepsilon)\partial_i \Gamma(x-y)\big\} \big[f(y) - f(x)\big] \, d\mathcal{L}^N(y) \right| \\
&\le \frac{2}{\varepsilon} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_i \Gamma(x-y)| \, |f(y) - f(x)| \; d\mathcal{L}^N(y) \\
&\quad + \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_{ij} \Gamma(x-y)| \, |f(y) - f(x)| \; d\mathcal{L}^N(y) \\
&\le [f]_{0,\alpha} \big(4 + \frac{N}{\alpha}\big) 2^\alpha \varepsilon^\alpha \underset{\varepsilon \to 0^+}{\rightrightarrows} 0
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\partial_j v_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0^+}{\rightrightarrows} u \qquad \text{sui sottoinsiemi compatti di } \Omega\,.$$

L'ultima disuguaglianza è ottenuta in virtù delle seguenti maggiorazioni:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\varepsilon} \int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_i \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| \, d\mathcal{L}^N(y) \\
&\qquad \le \frac{2}{\varepsilon} [f]_{0,\alpha} \frac{1}{N\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{1-N} \varrho^{N-1} \varrho^\alpha \, d\mathcal{L}^1(\varrho) \\
&\qquad = \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{N\omega_N} N\omega_N \frac{(2\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} [f]_{0,\alpha} \\
&\qquad = 4[f]_{0,\alpha} \frac{2^\alpha \varepsilon^\alpha}{\alpha+1} \le 4[f]_{0,\alpha} 2^\alpha \varepsilon^\alpha,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\int_{\overline{B}_{2\varepsilon}(x)} |\partial_{ij} \Gamma(x-y)| |f(y) - f(x)| \, d\mathcal{L}^N(y) \\
&\qquad \le [f]_{0,\alpha} \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B_1(x)} d\mathcal{H}^{N-1}(\omega) \int_0^{2\varepsilon} \varrho^{-N} \varrho^{N-1} \varrho^\alpha \, d\mathcal{L}^1(\varrho) \\
&\qquad = [f]_{0,\alpha} \, N \, \frac{2^\alpha \varepsilon^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

<u>Per provare che</u>

$$\Delta w(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega\,,$$

fissato $x \in \Omega$ sia $\Omega_0 = B_R(x)$ contenente Ω. Da

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ij} \Gamma(x-y) \, [f(y) - f(x)] \, d\mathcal{L}^N(y) - f(x) \int_{\partial\Omega_0} \partial_i \Gamma(x - \xi) \, \nu_j(\xi) \, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi)$$

$$i, j = 1, \ldots, N\,,$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\Delta w(x) &= \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii} w(x) \\
&= \int_{B_R(x)} \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}\Gamma(x-y)[f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) \\
&\quad - f(x) \int_{\partial B_R(x)} \sum_{i=1}^{N} \partial_i \Gamma(x-\xi)\, \nu_i(\xi)\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
\overset{13}{=}&\ 0 - f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^N} \frac{\xi_i - x_i}{|x-\xi|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \int_{|x-\xi|=R} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N\omega_N} \frac{(x_i-\xi_i)^2}{|x-\xi|^{N+1}}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \frac{1}{N\omega_N} \int_{|x-\xi|=R} \frac{|x-\xi|^2}{|x-\xi|^{N+1}}\, d\mathcal{H}^{N-1}(\xi) \\
&= f(x) \frac{1}{N\omega_N} R^{-N+1} N\omega_N R^{N-1} \\
&= f(x)\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

[13]Risulta

$$\int_{B_R(x)\setminus \overline{B}_r(x)} \Delta_x \Gamma(x-y)\, [f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) \;=\; 0 \quad (0<r<R)\,;$$

inoltre $\Delta_x\Gamma(x-y)\,[f(y)-f(x)]$ è sommabile in $B_R(x)$, pertanto

$$\int_{B_R(x)} \Delta_x\Gamma(x-y)\,[f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) \;=\; \lim_{r\to 0^+} \int_{B_R(x)\setminus \overline{B}_r(x)} \Delta_x\Gamma(x-y)\,[f(y)-f(x)]\, d\mathcal{L}^N(y) \;=\; 0\,.$$

Siamo ora in grado di risolvere **il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson**:

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha \leq 1)$ funzioni assegnate.

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 2.14.3. *(Teorema di esistenza, unicità e dipendenza continua della soluzione dai dati f e φ, per il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson)*
Sia Ω aperto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera formata da punti tutti regolari. Per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha \leq 1)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, esiste (unica) $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \quad u = \varphi & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si ha

$$u = v + w$$

dove w è il potenziale Newtoniano di densità f, e v è l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ \quad v = \varphi - w & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Inoltre

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \textit{cost} \cdot \left(\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\overline{\Omega}} |f| \right)$$

(u dipende con continuità dai dati f e φ).

Dimostrazione. Poiché siamo nelle ipotesi del Lemma 2.14.1 e del Lemma 2.14.2 risulta

$$w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), \qquad \Delta w = f\,.$$

Sia $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \\ \quad v = \varphi - w & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(si noti che Ω ha frontiera formata da punti tutti regolari e $\varphi - w \in C^0(\partial\Omega)$).
Posto

$$u := v + w$$

risulta

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \quad \Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ su } \partial\Omega.$$

Inoltre poiché (per $N \geq 3$)

$$|w(x)| \leq \frac{1}{N(N-2)\omega_N} \int_{|x-y|<diam\,\Omega} |x-y|^{2-N}\ |f(y)|\ d\mathcal{L}^N(y)$$

ed f è limitata in $\overline{\Omega}$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} |w| \leq \text{ cost } \cdot \sup_{\overline{\Omega}} |f|$$

(dove la costante dipende da N e da $diam\,\Omega$), e quindi

$$\sup_{\overline{\Omega}} |u| \leq \text{ cost } \cdot \left(\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + \sup_{\overline{\Omega}} |f| \right) . \qquad \square$$

Osservazione 2.14.4. Ci sono altri metodi per dimostrare il risultato di esistenza del Teorema 2.14.3 (cfr. [5]); il metodo variazionale negli Spazi di Hilbert sarà discusso nei Capitoli 9 e 8.