CAPITOLO 1

Aspetti generali

1. Generalità sugli FC-gruppi

Sia G un gruppo. Un elemento x di G si dice un *FC-elemento* se ha un numero finito di coniugati in G. Poichè la classe di coniugio di x in G è equipotente all'insieme dei laterali destri in G del centralizzante $C_G(x)$ di x, si ha subito che x è un FC-elemento se e soltanto se l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito; in questo caso, poichè il centralizzante di $\langle x\rangle^G$ è il nocciolo di $C_G(x)$, risulta che anche il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è finito. L'insieme costituito dagli FC-elementi del gruppo G viene chiamato *FC-centro* di G.

Lemma 1.1. *Qualunque sia il gruppo G, l'FC-centro di G è un sottogruppo caratteristico.*

Dimostrazione – Ovviamente l'FC-centro F di G non è vuoto, in quanto contiene almeno l'elemento neutro di G. Siano x e y due qualunque elementi di F, sicchè gli indici $|G : C_G(X)|$ e $|G : C_G(y)|$ sono entrambi finiti. Allora anche l'intersezione $C_G(x) \cap C_G(y)$ ha indice finito in G; d'altra parte $C_G(x) \cap C_G(y)$ è contenuto nel centralizzante $C_G(xy^{-1})$, per cui l'indice $|G : C_G(xy^{-1})|$ è finito, e xy^{-1} appartiene ad F. Pertanto F è un sottogruppo di G, che risulta ovviamente caratteristico, in quanto banalmente ogni automorfismo di G trasforma FC-elementi in FC-elementi. □

Si ricordi che se G è un qualunque gruppo, il *residuale finito* di G è l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito di G; poichè ogni sottogruppo di indice finito di un gruppo ne contiene uno normale di indice finito, si ha che il residuale finito di un gruppo G coincide con l'intersezione dei sottogruppi normali di indice finito di G. Il gruppo G si dice *residualmente finito* se il suo residuale finito è identico. Pertanto ogni gruppo residualmente finito si può immergere nel prodotto cartesiano di una famiglia di gruppi finiti.

Lemma 1.2. *Sia G un gruppo, e sia F l'FC-centro di G. Allora il gruppo quoziente $G/C_G(F)$ è residualmente finito.*

Dimostrazione − Qualunque sia l'elemento x di F, l'indice $|G : C_G(x)|$ è finito. Poichè si ha ovviamente

$$C_G(F) = \bigcap_{x\in F} C_G(x),$$

il gruppo $G/C_G(F)$ è residualmente finito. □

Qualunque sia il gruppo G, risulta chiaro che il centro $Z(G)$ di G è contenuto nell'FC-centro di G, ma si ha subito che l'FC-centro di G contiene anche ogni sottogruppo normale finito ed ogni eventuale sottogruppo abeliano di indice finito di G. Pertanto anche in un gruppo a centro identico l'FC-centro può essere molto ampio; ad esempio, l'FC-centro del gruppo diedrale infinito D_∞ coincide ovviamente con l'unico sottogruppo di indice 2.

Un gruppo G si dice un *FC-gruppo* se coincide con il suo FC-centro, cioè se ogni elemento di G ha soltanto un numero finito di coniugati. Si osservi che un gruppo G è un FC-gruppo se e soltanto se il gruppo quoziente $G/C_G(\langle x\rangle^G)$ è finito per ogni elemento x di G. Evidentemente, i gruppi abeliani ed i gruppi finiti sono FC-gruppi, e la teoria degli FC-gruppi si è sviluppata nel tentativo di cercare proprietà comuni a tali classi di gruppi. Ulteriori esempi di FC-gruppi sono forniti dai gruppi il cui centro ha indice finito. Gli FC-gruppi sono stati introdotti da R. Baer, e quindi studiati da numerosi autori tra cui si segnalano, per i loro importanti contributi alla teoria, Y.M. Gorčakov, P. Hall, B.H. Neumann e più recentemente L.A. Kurdachenko e M.J. Tomkinson.

Evidentemente, sottogruppi e quozienti di FC-gruppi sono a loro volta FC-gruppi, ma la classe degli FC-gruppi non è chiusa rispetto alle estensioni, come prova ancora la considerazione del gruppo diedrale infinito. Inoltre, il prodotto diretto di una qualunque famiglia di gruppi finiti è un FC-gruppo, sicchè in particolare i gruppi con il centro di indice finito non esauriscono la classe degli FC-gruppi. D'altra parte per i gruppi finitamente generati si ha il seguente facile risultato.

Teorema 1.3. (B.H. Neumann [**84**]) *Sia G un FC-gruppo finitamente generato. Allora il centro $Z(G)$ ha indice finito in G.*

Dimostrazione − Sia $\{x_1, \ldots, x_t\}$ un sistema finito di generatori di G. Poichè G è un FC-gruppo, l'indice $|G : C_G(x_i)|$ è finito per ogni $i = 1, \ldots, t$; d'altra parte si ha ovviamente

$$Z(G) = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i),$$

e quindi anche $Z(G)$ ha indice finito in G. $\square$

E' anche il caso di osservare che se un FC-gruppo G contiene un sottogruppo abeliano A di indice finito, allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito. Infatti, se $\{x_1, \dots, x_t\}$ è un trasversale destro di A in G, l'intersezione

$$A \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{t} C_G(x_i) \Big)$$

è un sottogruppo di $Z(G)$ ed ha ovviamente indice finito in G.

Sia G un gruppo. Qualunque siano gli elementi x e g di G, risulta $g^{-1}xg = x[x,g]$ e quindi la classe di coniugio di x in G è contenuta nel laterale xG'. In particolare tutti i gruppi con il derivato finito sono FC-gruppi.

Di fondamentale importanza nella teoria degli FC-gruppi è il seguente risultato, noto come "lemma di Dietzmann".

Teorema 1.4. (A.P. Dietzmann [**36**]) *Sia G un gruppo, e siano $x_1, \dots, x_t$ FC-elementi periodici di G. Allora la chiusura normale $\langle x_1, \dots, x_t\rangle^G$ è un sottogruppo finito di G.*

Dimostrazione – Poichè ciascuno degli elementi $x_1 \dots, x_t$ ha un numero finito di coniugati, si può supporre senza ledere la generalità che l'insieme $\{x_1, \dots, x_t\}$ contenga tutti i coniugati di ogni suo elemento, sicchè

$$E = \langle x_1, \dots, x_t\rangle^G = \langle x_1, \dots, x_t\rangle.$$

Sia a un qualunque elemento non identico di E, per cui $a = x_{i_i}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n}$, dove $i_1, \dots, i_n$ appartengono a $\{1, \dots, t\}$ e $k_1, \dots, k_n$ sono opportuni numeri interi non negativi. Tra tutte le espressioni di questo tipo per a se ne scelga una $x_{j_1}^{h_1} \dots x_{j_m}^{h_m}$ di lunghezza minima m. Si ponga $y_r = x_{j_r}^{h_r}$ per ogni $r = 1, \dots, m$, e si assuma $j_s = j_t$ per qualche $s < t \leq m$. Allora si ha

$$a = y_1 \dots y_{s-1}(y_s y_t) y_{s+1}^{y_t} \cdots y_{t-1}^{y_t} y_{t+1} \cdots y_m,$$

e questa espressione ha lunghezza minore di m, una contraddizione, che assicura che gli indici $j_1, \dots, j_m$ sono a due a due distinti; quindi il numero delle possibilità per l'oggetto a è al più

$$t! \prod_{i=1}^{t} o(x_i),$$

dove $o(x_i)$ denota il periodo dell'elemento x_i. Pertanto il sottogruppo E è finito. $\square$

Dal lemma di Dietzmann segue che gli FC-gruppi periodici coincidono con i gruppi che possono essere ricoperti da una famiglia di sottogruppi normali finiti.

Corollario 1.5. *Un gruppo periodico G è un FC-gruppo se e soltanto se ogni sua parte finita è contenuta in un sottogruppo normale finito.*

Dimostrazione − La necessarietà della condizione segue subito dal lemma di Dietzmann. D'altra parte, si è già osservato che un qualunque sottogruppo normale finito di un gruppo è contenuto nell'FC-centro, per cui ogni gruppo che sia unione di una famiglia di sottogruppi normali finiti è un FC-gruppo periodico. □

Se G è un FC-gruppo, dal Lemma 1.2 segue subito che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è residualmente finito; come conseguenza si può osservare che un FC-gruppo semplice è necessariamente finito, sicchè in particolare i fattori di composizione di un qualunque FC-gruppo sono finiti. Un'ulteriore informazione sulla struttura del gruppo quoziente di un FC-gruppo rispetto al suo centro è fornita dal seguente risultato (si ricordi che un gruppo si dice *localmente finito* se ogni sua parte finita genera un sottogruppo finito).

Teorema 1.6. (R. Baer [**5**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è localmente finito.*

Dimostrazione − Sia x un qualunque elemento di G, e sia $\{y_1, \dots, y_t\}$ un trasversale destro di $C_G(x)$ in G. Poichè G è un FC-gruppo, l'intersezione

$$C = \bigcap_{i=1}^{t} C_G(y_i)$$

è un sottogruppo di indice finito di G, per cui esiste un numero intero positivo k tale che x^k appartenga a C. D'altra parte, qualunque sia l'elemento g di G, esiste $i \leq t$ tale che $g = zy_i$ con $z \in C_G(x)$; allora $gx^k = x^k g$ e perciò x^k appartiene a $Z(G)$. Pertanto il gruppo $G/Z(G)$ è periodico, e quindi anche localmente finito per il Corollario 1.5. □

Gli ultimi risultati di questo paragrafo descrivono il comportamento degli FC-gruppi che siano localmente risolubili oppure localmente nilpotenti.

Sia G un gruppo. Il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi normali minimali di G si chiama *zoccolo* di G, e si denota col simbolo $Soc(G)$. La *serie degli zoccoli* di G si può allora definire per induzione transfinita come la serie normale ascendente

$$S_0(G) \leq S_1(G) \leq \ldots \leq S_\alpha(G) \leq S_{\alpha+1}(G) \leq \ldots$$

ottenuta ponendo $S_0(G) = \{1\}$,

$$S_{\alpha+1}(G)/S_\alpha(G) = Soc(G/S_\alpha(G))$$

per ogni ordinale α e

$$S_\lambda(G) = \bigcup_{\alpha<\lambda} S_\alpha(G)$$

se λ è un ordinale limite.

Lemma 1.7. *Sia G un FC-gruppo periodico. Allora risulta $G = S_\omega(G)$.*

Dimostrazione − Sia N un qualunque sottogruppo normale finito di G. Se t è la lunghezza massima di una serie di N costituita da sottogruppi normali di G, si ha ovviamente che ogni fattore di tale serie è un fattore principale di G, per cui N è contenuto in $S_t(G)$. Poichè G è unione dei suoi sottogruppi normali finiti, risulta allora $G = S_\omega(G)$. □

Si ricordi che un gruppo G si dice *iperabeliano* se è dotato di una serie normale ascendente a fattori abeliani contenente i sottogruppi banali, o equivalentemente se ogni quoziente non identico di G contiene un sottogruppo normale abeliano non identico. Se G è un qualunque gruppo, l'*ipercentro* di G è l'ultimo termine della sua serie centrale superiore; il gruppo G si dice *ipercentrale* se coincide con il suo ipercentro, o equivalentemente se ogni quoziente non identico di G ha centro non identico.

Teorema 1.8. *Sia G un FC-gruppo localmente risolubile. Allora G è iperabeliano, ed è dotato di una serie normale ascendente a fattori abeliani di lunghezza al più ω.*

Dimostrazione − Qualunque sia il numero intero positivo n, si denoti con $G_{n+1}/Z(G)$ l'n-simo termine della serie degli zoccoli di $G/Z(G)$, ponendo inoltre $G_0 = \{1\}$ e $G_1 = Z(G)$. Poichè G è localmente risolubile, ciascuno dei gruppi G_{n+1}/G_n è abeliano; d'altra parte, poichè il gruppo $G/Z(G)$ è periodico, il Lemma 1.7 assicura che risulta

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Pertanto G ha una serie normale ascendente di lunghezza al più ω i cui fattori sono abeliani, ed in particolare G è iperabeliano. □

Poichè i fattori principali dei gruppi localmente nilpotenti sono centrali, un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del teorema precedente consente di provare il seguente risultato.

TEOREMA 1.9. *Sia G un FC-gruppo localmente nilpotente. Allora G è ipercentrale, e la sua serie centrale superiore ha lunghezza al più ω.*

2. Il teorema di Schur

Si è già osservato che la classe dei gruppi con il centro di indice finito e quella dei gruppi con il derivato finito sono sottoclassi naturali e non banali della classe degli FC-gruppi. Un famoso e fondamentale risultato ottenuto da I. Schur nel 1902 prova che queste classi gruppali sono confrontabili. La dimostrazione qui riportata del teorema di Schur è dovuta a Tomkinson, e utilizza il seguente importante risultato riguardante i gruppi finiti, noto come "teorema di Schur - Zassenhaus", per la cui dimostrazione si rinvia ad uno qualunque dei vari ottimi manuali di teoria dei gruppi esistenti. E' il caso di osservare che la forma attuale del teorema di Schur - Zassenhaus dipende dal famoso risultato di W. Feit e J.G. Thompson sulla risolubilità dei gruppi finiti di ordine dispari.

LEMMA 1.10. *Sia G un gruppo finito, e sia N un sottogruppo normale di G tale che gli ordini di N e di G/N siano coprimi. Allora esiste un complemento di N in G, cioè un sottogruppo K di G tale che $G = KN$ e $K \cap N = \{1\}$. Inoltre due qualunque complementi di N in G sono coniugati.*

TEOREMA 1.11. (I. Schur [**107**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia finito. Allora anche il derivato G' di G è finito.*

DIMOSTRAZIONE − Sia X un sottogruppo finitamente generato di G tale che $G = XZ(G)$; allora $G' = X'$ e quindi, sostituendo G con X, si può supporre senza ledere la generalità che il gruppo G sia finitamente generato. Ne segue che anche il centro $Z(G)$ è finitamente generato, per cui $Z(G) = A \times E$ con A abeliano senza torsione finitamente generato ed E finito; in particolare G/A è finito. Sia p un numero primo maggiore dell'ordine di G/A. Qualunque sia il numero intero positivo n, il teorema di Schur - Zassenhaus assicura che il gruppo finito G/A^{p^n} contiene un sottogruppo K_n/A^{p^n} tale che $G = K_nA$ e $K_n \cap A = A^{p^n}$. Poichè $A \leq Z(G)$, si ha che K_n è normale in G e G/K_n è abeliano, sicchè $G' \leq K_n$; quindi

$$G' \cap A \leq K_n \cap A = A^{p^n}$$

e perciò

$$G' \cap A \leq \bigcap_{n\geq 1} A^{p^n} = \{1\}.$$

Pertanto $G' \cap A = \{1\}$ e G' è finito. □

Corollario 1.12. *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z(G)$ sia localmente finito. Allora anche il derivato G' di G è localmente finito.*

Dimostrazione − Sia X un qualunque sottoinsieme finito di G'. Esiste allora un sottogruppo finitamente generato E di G tale che X sia contenuto in E'. D'altra parte la locale finitezza di $G/Z(G)$ assicura che anche $E/Z(E)$ è finito, sicchè E' è finito per il teorema di Schur. Pertanto G' è localmente finito. □

Per l'importanza del teorema di Schur sembra opportuno citare qui alcuni risultati ad esso collegati, anche se non direttamente coinvolti nella teoria degli FC-gruppi. In primo luogo, il Teorema 1.11 può essere generalizzato, sostituendo al centro un termine della serie centrale superiore (con tipo ordinale finito). Si ha infatti:

Teorema 1.13. (R. Baer [**6**]) *Sia G un gruppo tale che il gruppo quoziente $G/Z_i(G)$ sia finito per qualche numero intero non negativo i. Allora anche l'$(i+1)$-esimo termine $\gamma_{i+1}(G)$ della serie centrale inferiore di G è finito.*

Poichè i gruppi con il derivato finito sono FC-gruppi, il Teorema 1.3 assicura che per i gruppi finitamente generati la finitezza del derivato equivale a quella dell'indice del centro. D'altra parte la considerazione di un qualunque gruppo extraspeciale infinito prova che in generale il teorema di Schur non si può invertire. E' però vero che se il derivato G' di un gruppo G è finito, allora il secondo centro $Z_2(G)$ ha indice finito in G. Sussiste infatti il seguente risultato.

Teorema 1.14. (P. Hall [**59**]) *Sia G un gruppo tale che il sottogruppo $\gamma_{i+1}(G)$ sia finito per qualche numero intero non negativo i. Allora anche l'indice $|G : Z_{2i}(G)|$ è finito.*

Il risultato di Hall fornisce evidentemente una parziale inversione del teorema di Baer, e insieme ad esso sostanzialmente afferma che in un gruppo G qualche termine della serie centrale superiore (con tipo ordinale finito) ha indice finito se e soltanto se G è finito-per-nilpotente (cioè se e soltanto se esiste un sottogruppo normale finito N di G tale che G/N sia nilpotente). Quest'ultima affermazione è stata recentemente estesa a termini arbitrari della serie centrale superiore di un gruppo.

TEOREMA 1.15. (M. De Falco, F. de Giovanni, C. Musella, Y.P. Sysak [**30**]) *L'ipercentro di un gruppo G ha indice finito se e solo se G contiene un sottogruppo normale finito N tale che G/N sia ipercentrale.*

La considerazione del 2-gruppo localmente diedrale mostra che i risultati di Baer e Hall non possono invece essere estesi utilizzando termini della serie centrale inferiore con tipo ordinale infinito,

L'ultima parte di questo paragrafo contiene alcune applicazioni del teorema di Schur allo studio degli FC-gruppi.

COROLLARIO 1.16. (B.H. Neumann [**84**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il derivato G' di G è localmente finito. In particolare un qualunque FC-gruppo senza torsione è abeliano.*

DIMOSTRAZIONE – Il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito per il Teorema 1.6, sicchè l'asserto segue dal Corollario 1.12. □

COROLLARIO 1.17. *Sia G un FC-gruppo. Allora l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo.*

DIMOSTRAZIONE – Qualunque siano gli elementi periodici x e y di G, il laterale xyG' è ovviamente periodico; d'altra parte, il Corollario 1.16 assicura che G' è localmente finito, per cui anche xy è periodico. L'asserto è provato. □

Come conseguenza del Corollario 1.12, è anche possibile ottenere un'inversione parziale del Teorema 1.6. Si ha infatti:

COROLLARIO 1.18. (S.N. Černikov [**17**]) *Sia G un gruppo contenente un sottogruppo centrale senza torsione Z tale che G/Z sia un FC-gruppo periodico. Allora G è un FC-gruppo.*

DIMOSTRAZIONE – Poichè il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito, il Corollario 1.12 assicura che anche il derivato G' di G è localmente finito. D'altra parte, se x è un qualunque elemento di G e il laterale gZ è un elemento del centralizzante $C_{G/Z}(xZ)$, il commutatore $[x, g]$ appartiene a Z, e quindi è aperiodico. Pertanto $[x, g] = 1$, sicchè $C_G(x) = C_G(xZ)$ ha indice finito in G, e G è un FC-gruppo. □

Infine il prossimo risultato permette sotto certi aspetti di ridurre lo studio degli FC-gruppi al caso periodico.

Teorema 1.19. *Sia G un FC-gruppo. Allora G si può immergere nel prodotto diretto di un gruppo abeliano senza torsione e di un FC-gruppo periodico.*

Dimostrazione − Sia T il sottogruppo costituito dagli elementi periodici di G. Poichè G' è contenuto in T per il Corollario 1.16, il gruppo quoziente G/T è abeliano senza torsione. Si consideri quindi nel centro $Z(G)$ un sottogruppo senza torsione massimale A (la cui esistenza è garantita dal Lemma di Zorn); allora $Z(G)/A$ è periodico, e quindi G/A è un FC-gruppo periodico. D'altra parte si ha $T \cap A = \{1\}$, per cui il gruppo G si può immergere nel prodotto diretto $G/T \times G/A$. □

3. Gruppi con classi di coniugio limitate

Un gruppo G si dice un *BFC-gruppo* se esiste un numero intero positivo k tale che ogni elemento di G sia dotato di al più k coniugati. Poichè si è già osservato che in un qualunque gruppo G ogni classe di coniugio è equipotente ad un sottoinsieme del derivato, si ha subito che i gruppi con il derivato finito sono BFC-gruppi ed il prossimo risultato prova che la finitezza del derivato caratterizza i gruppi con la proprietà BFC.

Teorema 1.20. (B.H. Neumann [**85**]) *Un gruppo G è un BFC-gruppo se e soltanto se il derivato G' di G è finito.*

Dimostrazione − Si supponga che G è un BFC-gruppo, e sia k il massimo ordine delle classi di coniugio degli elementi di G. Si consideri un elemento x di G dotato di esattamente k coniugati, e sia $\{y_1, \dots, y_k\}$ un trasversale destro di $C_G(x)$ in G; ovviamente anche l'intersezione

$$C = \bigcap_{i=1}^{k} C_G(y_i)$$

è un sottogruppo di indice finito in G. Se $\{z_1, \dots, z_t\}$ è un trasversale destro di C in G, si ha allora che la chiusura normale

$$N = \langle x, z_1, \dots, z_t \rangle^G$$

è un sottogruppo finitamente generato di G per il quale risulta $G = NC$. Qualunque sia l'elemento a di C, si ha $(ax)^{y_i} = ax^{y_i}$ per ogni $i \leq k$, sicchè gli elementi $(ax)^{y_1}, \dots, (ax)^{y_k}$ sono tutti i coniugati di ax in G. Se b è un qualunque altro elemento di C, deve allora risultare $(ax)^b = (ax)^{y_i} = ax^{y_i}$ per qualche i, e quindi

$$[a, b] = a^{-1}a^b = x^{y_i}(x^b)^{-1}$$

appartiene a N. Pertanto il derivato C' di C è contenuto in N, e quindi $G' \leq NC' = N$. D'altra parte G' è periodico per il Corollario 1.16, e l'insieme degli elementi periodici di N è un sottogruppo finito, in quanto N è un FC-gruppo finitamente generato. Pertanto G' è finito. $\square$

Dall'ultimo risultato e dal Teorema 1.14 segue in particolare che se G è un BFC-gruppo, allora il secondo termine $Z_2(G)$ della serie centrale superiore di G ha indice finito, per cui tutti i BFC-gruppi a centro identico sono finiti.

Se G è un gruppo con il derivato finito, l'ordine delle classi di coniugio di elementi di G non supera evidentemente l'ordine di G'. Informazioni sulla determinazione di un limite superiore per l'ordine del derivato di un gruppo con la proprietà BFC possono essere trovate in [**119**], [**118**], [**108**], [**21**]; in particolare D. Segal e A. Shalev [**108**] hanno stato provato che se ogni elemento di G ha al più n coniugati, allora l'ordine del derivato di G è al più $n^{(13+\log_2 n)/2}$.

4. Ricoprimenti di gruppi

Sia G un gruppo; un insieme non vuoto $\mathcal{F}$ di sottogruppi di G si dice un *ricoprimento* di G se risulta

$$G = \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X,$$

cioè se ogni elemento di G appartiene ad almeno un elemento di $\mathcal{F}$. Ad esempio, qualunque sia il gruppo G, gli insiemi $\{G\}$ e $\{\langle x \rangle \mid x \in G\}$ sono ricoprimenti (banali) di G. Al fine di studiare i gruppi dotati di ricoprimenti finiti costituiti da sottogruppi notevoli è fondamentale un teorema di B.H. Neumann sui gruppi decomponibili nell'unione di un numero finito di laterali di sottogruppi. Si ha anzitutto:

Lemma 1.21. *Sia G un gruppo, e risulti*

$$G = \Big(\bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{j=1}^{t} K y_j\Big),$$

dove $H_1, \dots, H_s, K$ sono sottogruppi di G. Allora si ha $G = \bigcup_{j=1}^{t} K y_j$ oppure G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \dots, H_s$.

Dimostrazione − Si supponga che l'unione $\bigcup_{j=1}^{t} Ky_j$ sia un sottoinsieme proprio di G, e sia z un elemento di $G \setminus \bigcup_{j=1}^{t} Ky_j$; allora

$$\Big(\bigcup_{j=1}^{t} Ky_j\Big) \cap Kz = \emptyset,$$

e quindi il laterale Kz è contenuto nell'insieme $\bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i$. Qualunque sia l'indice $j \leq t$ si ha perciò

$$Ky_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{s} H_i x_i z^{-1} y_j,$$

ed il gruppo G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_s$. □

Teorema 1.22. (B.H. Neumann [**85**]) *Sia G un gruppo e risulti*

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} H_i g_i,$$

dove $H_1, \ldots, H_t$ sono sottogruppi di G. Allora da tale decomposizione possono essere omessi i laterali relativi a sottogruppi di indice infinito.

Dimostrazione − Si proverà in primo luogo che almeno uno dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_t$ ha indice finito in G. A tal fine si procede per induzione sul numero m dei sottogruppi distinti tra $H_1, \ldots, H_t$. Se $m = 1$, risulta

$$H_1 = \ldots = H_t,$$

sicchè G è unione di un numero finito di laterali di H_1 e l'indice $|G : H_1|$ è finito. Si supponga invece $m > 1$; a meno di una permutazione dell'insieme degli indici, si può supporre che per qualche $r < t$ risulti

$$H_{r+1} = \ldots = H_t,$$

mentre H_t è diverso da ciascuno dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_r$. Se

$$G = \bigcup_{i=r+1}^{t} H_t g_i,$$

si ha ovviamente che il sottogruppo H_t ha indice finito in G; in caso contrario, poichè

$$G = \Big(\bigcup_{i=1}^{r} H_i g_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=r+1}^{t} H_t g_i\Big),$$

dal Lemma 1.21 segue che G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_r$, e tra questi al più $m-1$ sono distinti, sicchè per induzione su m si ottiene che almeno uno di tali sottogruppi ha indice finito in G.

Si supponga che tra i sottogruppi $H_1, \ldots, H_t$ ve ne sia qualcuno di indice infinito in G, e si riordino gli indici in modo tale che $H_1, \ldots, H_s$ abbiano indice infinito mentre $H_{s+1}, \ldots, H_t$ abbiano indice finito in G. La prima parte della dimostrazione assicura che $s < t$. Il sottogruppo

$$K = \bigcap_{i=s+1}^{t} H_i$$

ha ovviamente indice finito in G, e per ogni indice i tale che $s+1 \leq i \leq t$ ogni laterale destro di H_i in G è unione di un numero finito di laterali destri di K. Pertanto G è unione di un numero finito di laterali destri dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_s, K$. Poichè ciascuno dei sottogruppi $H_1, \ldots, H_s$ ha indice infinito in G, la prima parte della dimostrazione ed il Lemma 1.21 provano che G è unione soltanto dei laterali destri relativi a K, e quindi

$$G = \bigcup_{i=s+1}^{t} H_i g_i,$$

il che prova l'asserto. □

Evidentemente, se G è un gruppo il cui centro $Z(G)$ ha indice finito e se $\{x_1, \ldots, x_t\}$ è un trasversale di $Z(G)$ in G, risulta

$$G = \bigcup_{i=1}^{t} \langle x_i, Z(G) \rangle$$

e quindi G ha un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani. Il prossimo risultato assicura che questa proprietà caratterizza i gruppi col centro di indice finito, e fornisce un facile esempio di come il Teorema 1.22 possa essere usato nello studio dei ricoprimenti di gruppi.

Teorema 1.23. (B.H. Neumann [**85**]) *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Sia $\{A_1, \ldots, A_t\}$ un ricoprimento finito di G costituito da sottogruppi abeliani. Per il Teorema 1.22 è possibile supporre che ciascuno dei sottogruppi $A_1, \ldots, A_t$ abbia indice finito in G, per cui anche

$$A = A_1 \cap \ldots \cap A_t$$

è un sottogruppo di indice finito. D'altra parte A è ovviamente contenuto nel centro di G, e quindi il gruppo $G/Z(G)$ è finito. □

Dal Teorema 1.22 segue anche il seguente risultato sui gruppi ricoperti da FC-sottogruppi.

Corollario 1.24. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da FC-sottogruppi. Allora G è un FC-gruppo.*

Dimostrazione – Sia $\{X_1, \ldots, X_t\}$ un ricoprimento finito di G costituito da FC-sottogruppi. Per il Teorema 1.22 è possibile suppore che ciascuno dei sottogruppi $X_1, \ldots, X_t$ abbia indice finito in G. Qualunque sia l'elemento x di G, esiste $i \leq t$ tale che x appartenga a X_i; allora il centralizzante $C_{X_i}(x)$ ha indice finito in X_i e quindi anche l'indice $|G : C_{X_i}(x)|$ è finito. In particolare $C_G(x)$ ha indice finito in G, e l'arbitrarietà di x assicura che G è un FC-gruppo. □

Corollario 1.25. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi con il derivato finito. Allora il derivato G' di G è finito.*

Dimostrazione – Sia $\{X_1, \ldots, X_t\}$ un ricoprimento finito di G tale che X_i' sia finito per ogni $i = 1, \ldots, t$. Il Corollario 1.24 assicura che G è un FC-gruppo, sicchè dal lemma di Dietzmann segue che la chiusura normale

$$N = \langle X_1', \ldots, X_t' \rangle^G$$

è finita. D'altra parte G/N ha un ricoprimento finito costituito da sottogruppi abeliani, e quindi il centro di G/N ha indice finito per il Teorema 1.23. Il teorema di Schur assicura allora che $G'N/N$ è finito, per cui tale è anche G'. □

Corollario 1.26. *Sia G un gruppo dotato di un ricoprimento finito costituito da sottogruppi con il centro di indice finito. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è finito.*

Dimostrazione – Sia $\mathcal{F}$ un ricoprimento finito di G costituito da sottogruppi con il centro di indice finito. Per il Teorema 1.22 almeno uno degli elementi di $\mathcal{F}$ ha indice finito in G, e quindi G contiene un sottogruppo abeliano di indice finito. D'altra parte G è un FC-gruppo per il Corollario 1.24, e quindi il gruppo $G/Z(G)$ è finito. □

5. Problemi di immersione

Ovviamente il prodotto diretto di ogni famiglia di gruppi con la proprietà FC è un FC-gruppo, sicchè in particolare il prodotto di una qualunque famiglia di gruppi finiti è un FC-gruppo periodico, e quindi tale è anche ogni gruppo immergibile in un prodotto diretto di gruppi finiti. E' allora naturale chiedersi quali gruppi periodici con le classi di coniugio finite siano isomorfi a sottogruppi di prodotti diretti di gruppi finiti; chiaramente ogni gruppo di questo tipo è residualmente finito e si può perciò immergere in un prodotto cartesiano di gruppi finiti. Nel caso numerabile il problema è stato completamente risolto da P. Hall.

Teorema 1.27. (P. Hall [**60**]) *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito. Allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione − Poichè G è numerabile, è possibile indiciare gli elementi di G con l'insieme dei numeri naturali, per cui

$$G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Qualunque sia il numero intero positivo n si denoti con G_n la chiusura normale $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle^G$, sicchè G è unione della successione crescente $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di suoi sottogruppi normali finiti. Si ponga $G_0 = \{1\}$ e $K_0 = G$, e per induzione si supponga definito per qualche n un sottogruppo normale K_n di indice finito in G tale che $G_n \cap K_n = \{1\}$. Poichè G è residualmente finito, esiste un sottogruppo normale N di G tale che G/N sia finito e $G_{n+1} \cap N = \{1\}$; allora anche $K_{n+1} = K_n \cap N$ è un sottogruppo normale di indice finito in G e risulta $G_{n+1} \cap K_{n+1} = \{1\}$. In questo modo è stata definita una successione decrescente $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ di sottogruppi normali di indice finito in G tali che $G_n \cap K_n = \{1\}$ per ogni n. Qualunque sia il numero intero non negativo n, si consideri in G il sottogruppo normale $L_{n+1} = G_nK_{n+1}$. Ovviamente L_{n+1} ha indice finito in G, e risulta

$$G_{n+1} \cap L_{n+1} = G_{n+1} \cap G_nK_{n+1} = G_n.$$

Per ogni elemento $x \neq 1$ di G, esiste un numero intero non negativo m tale che x appartenga all'insieme $G_{m+1} \setminus G_m$; allora x non appartiene a L_{m+1}, e quindi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} L_{n+1} = \{1\}.$$

Pertanto l'applicazione

$$\varphi : x \in G \longmapsto (xL_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0} \in \underset{n\in\mathbb{N}_0}{\mathrm{Cr}}\,(G/L_{n+1})$$

è un monomorfismo di G nel prodotto cartesiano della famiglia di gruppi finiti $(G/L_{n+1})_{n\in\mathbb{N}_0}$. D'altra parte per ogni elemento di G è finito l'insieme dei numeri naturali n tali che x non appartenga a G_n, e quindi anche quello degli n per cui x non appartiene a L_{n+1}. Pertanto l'immagine di φ è contenuta nel prodotto diretto dei G/L_{n+1}, e G si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. $\square$

Corollario 1.28. *Sia G un FC-gruppo numerabile. Allora il gruppo quoziente $G/Z(G)$ è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione – Per il Teorema 1.6 il gruppo $G/Z(G)$ è localmente finito. D'altra parte $G/Z(G)$ è anche residualmente finito, per cui l'asserto segue subito dal Teorema 1.27. $\square$

Corollario 1.29. *Sia G un FC-gruppo numerabile con il centro identico. Allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

L'ipotesi di numerabilità nel Teorema 1.27 è essenziale, come mostra l'esempio seguente. Sia p un numero primo, e nel prodotto cartesiano

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Cr}}\,\mathbb{Z}_{p^n}$$

si consideri il sottogruppo G costituito dagli elementi periodici; ovviamente G è un gruppo abeliano residualmente finito non numerabile, ed è facile provare che non è possibile immergere G nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Si supponga infatti per assurdo che G sia contenuto in un prodotto diretto $E = \mathrm{Dr}_{i\in I}\, E_i$, dove ogni E_i è un gruppo finito; il prodotto diretto

$$B = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Dr}}\,\mathbb{Z}_{p^n}$$

è un sottogruppo di G, ed è quindi contenuto in un fattore diretto numerabile K di E. Qualunque sia l'elemento $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di G, denotato con p^m il periodo di x, risulta $x = by$, dove

$$b = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$$

è un elemento di B e

$$y = (0, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n, \ldots)$$

appartiene a G^p. Pertanto il gruppo quoziente G/B è divisibile, e quindi tale è anche GK/K, il che è assurdo in quanto E/K è residualmente finito.

Non è noto se il Teorema 1.27 possa essere esteso al caso degli FC-gruppi periodici residualmente finiti il cui centro sia numerabile. Un risultato parziale in tale direzione è il seguente.

Teorema 1.30. (L.A. Kurdachenko [**70**]) *Sia G un FC-gruppo metabeliano periodico residualmente finito. Se il centro di G è numerabile, allora G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Nell'ambito dei problemi di immersione per gli FC-gruppi periodici è di notevole interesse il seguente risultato.

Teorema 1.31. (Y.M. Gorčakov [**55**]) *Sia G un FC-gruppo periodico. Se G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto cartesiano di una famiglia di gruppi finiti isomorfi , allora G è si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Sia $(G_i)_{i\in I}$ una famiglia di gruppi periodici. Si dice *prodotto centralmente ristretto* dei gruppi G_i, e si denota con il simbolo

$$\underset{i\in I}{\mathrm{Zr}}\, G_i,$$

il sottogruppo del prodotto cartesiano della famiglia $(G_i)_{i\in I}$ costituito dagli elementi periodici $(x_i)_{i\in I}$ tali che sia finito il sottoinsieme J di I formato dagli indici i per cui x_i non appartenga a $Z(G_i)$. Denotato con T il sottogruppo di torsione del gruppo abeliano $\mathrm{Cr}_{i\in I}\, Z(G_i)$, si ha subito che risulta

$$\underset{i\in I}{\mathrm{Zr}}\, G_i = \Big(\underset{i\in I}{\mathrm{Dr}}\, G_i\Big)T.$$

L'uso dei prodotti centralmente ristretti ha permesso di ottenere una completa descrizione degli FC-gruppi periodici residualmente finiti. Vale infatti il seguente fondamentale risultato.

Teorema 1.32. (M.J. Tomkinson [**113**]) *Un gruppo periodico residualmente finito è un FC-gruppo se e soltanto se è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto centralmente ristretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Come si è già visto, sussistono varie ragioni per ridurre lo studio dei gruppi con classi di coniugio finite al caso periodico. Peraltro, esistono alcuni problemi sugli FC-gruppi non periodici che non possono essere ricondotti ad analoghe questioni per gli FC-gruppi periodici; l'ultimo enunciato di questo paragrafo riguarda la possibilità di immergere un FC-gruppo nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti e di un gruppo abeliano senza torsione.

Teorema 1.33. (L.A. Kurdachenko [**69**]) *Sia G un FC-gruppo periodico. Allora ogni FC-gruppo il cui sottogruppo di torsione sia isomorfo a G si può immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti e di un gruppo abeliano senza torsione se e soltanto se $Z(G) = \{1\}$.*

6. Sezioni di prodotti diretti di gruppi finiti

Nel paragrafo precedente si è provato con un esempio che un FC-gruppo periodico residualmente finito non si può in generale immergere nel prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Vale però il seguente risultato.

Teorema 1.34. (Y.M. Gorčakov [**54**]) *Sia G un FC-gruppo periodico residualmente finito. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione − Il Teorema 1.32 assicura che esiste una famiglia $(G_i)_{i\in I}$ di gruppi finiti tale che G sia isomorfo ad un sottogruppo del prodotto centralmente ristretto $\mathrm{Zr}_{i\in I}\, G_i$. Si ponga $K = \mathrm{Dr}_{i\in I}\, G_i$ e sia T il sottogruppo di torsione del gruppo abeliano

$$\mathop{\mathrm{Cr}}_{i\in I} Z(G_i) = Z(\mathop{\mathrm{Zr}}_{i\in I} G_i),$$

sicchè G si può identificare con un sottogruppo del prodotto KT. Il gruppo abeliano periodico T può essere immerso in un prodotto diretto della forma $\mathrm{Dr}_{j\in J}\, P_j$, dove ogni P_j è un gruppo di tipo p_j^∞ per qualche numero primo p_j; è allora ben noto che P_j è isomorfo ad un quoziente del gruppo

$$\mathbb{Z}_{p_j} \times \mathbb{Z}_{p_j^2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_j^n} \times \ldots,$$

il che prova che anche T è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Considerato il prodotto diretto esterno $K \times T$, è immediato verificare che l'applicazione

$$\varphi : (a, x) \in K \times T \longmapsto ax \in KT$$

è un epimorfismo, per cui KT è isomorfo ad un quoziente di $K \times T$. Pertanto G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. $\square$

P. Hall ha esibito un esempio di un FC-gruppo (non numerabile) di esponente 4 (e con il derivato di ordine 2) che non è isomorfo ad alcuna sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti, sicchè l'ipotesi di residuale finitezza nel Teorema 1.34 è necessaria (ha rilievo osservare qui che tutti gli esempi noti di questo tipo hanno una sezione extraspeciale che non è isomorfa ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti). D'altra parte lo stesso P. Hall ha provato che ogni gruppo periodico numerabile con la proprietà FC è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Al fine di dimostrare questo risultato sono necessarie alcune brevi premesse.

Sia G un gruppo, e sia $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottogruppi normali di G tali che
$$G = \langle G_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle.$$
Si denoti con Ω l'insieme costituito da tutte le coppie (n, x) con $n \in \mathbb{N}$ e $x \in G_n$. Qualunque siano il numero intero positivo m e l'elemento y di G_m è possibile definire una permutazione $\tau_{m,y}$ di Ω ponendo
$$\begin{aligned} \tau_{m,y}(n,x) &= (n,x) && \text{se } m < n \text{ e } x \in G_n \\ \tau_{m,y}(n,x) &= (n,xy) && \text{se } m = n \text{ e } x \in G_n \\ \tau_{m,y}(n,x) &= (n,y^{-1}xy) && \text{se } m > n \text{ e } x \in G_n. \end{aligned}$$
Nel gruppo simmetrico $Sym(\Omega)$ si consideri quindi il sottogruppo
$$\bar{G} = \langle \tau_{m,y} \mid m \in \mathbb{N}, y \in G_m\rangle.$$
Se r e s sono numeri interi positivi, e y e z sono elementi di G_r e G_s, rispettivamente, non è difficile provare che risulta
$$\tau_{s,z}^{-1}\tau_{r,y}\tau_{s,z} = \tau_{r,z^{-1}yz} \qquad \text{se } r \leq s$$
e
$$\tau_{s,z}^{-1}\tau_{r,y}\tau_{s,z} = \tau_{s,z^{-1}yzy^{-1}}\tau_{r,y} \quad \text{se } r > s.$$
Il comportamento del coniugio sui generatori del gruppo $\bar{G}$ permette allora di definire un epimorfismo $\varphi : \bar{G} \longrightarrow G$, ponendo $\varphi(\tau_{m,y}) = y$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \in G_m$.

Teorema 1.35. (P. Hall [**60**]) *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile. Allora G è isomorfo ad un quoziente di un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito.*

Dimostrazione – Poichè G è un FC-gruppo periodico numerabile, il lemma di Dietzmann assicura che G è unione di una successione crescente $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottogruppi normali finiti. Si consideri quindi il gruppo $\bar{G}$, costruito come nelle premesse a questo risultato in corrispondenza di tale successione. In questo caso il gruppo $\bar{G}$ è numerabile, in quanto generato dal suo sottoinsieme numerabile
$$\{\tau_{m,y} \mid m \in \mathbb{N}, y \in G_m\}.$$
Per ogni numero intero positivo n, si denoti con Ω_n il sottoinsieme finito di Ω costituito dalle coppie (n, x) con $x \in G_n$; la definizione delle permutazioni $\tau_{m,y}$ assicura che Ω_n è una parte di Ω invariante rispetto all'azione di $\bar{G}$. Pertanto il sottogruppo $\bar{K}_n$ di $\bar{G}$, costituito dalle permutazioni $g \in \bar{G}$ tali che $(n, x)g = (n, x)$ per ogni $x \in G_n$, è normale ed il gruppo quoziente $\bar{G}/\bar{K}_n$ è finito, in quanto isomorfo ad un gruppo di permutazioni di Ω_n. D'altra parte risulta
$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$$

e quindi

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{K}_n = \{1\},$$

sicchè il gruppo $\bar{G}$ è residualmente finito. Qualunque sia il numero intero positivo m e qualunque sia $y \in G_m$, la permutazione $\tau_{m,y}$ fissa gli elementi di Ω_n per ogni $n > m$, per cui $\tau_{m,y}$ è un elemento periodico di $\bar{G}$; inoltre le proprietà del coniugio preventivamente descritte assicurano che per ogni numero intero positivo n ciascun elemento dell'insieme finito

$$\{\tau_{m,y} \mid m \leq n, y \in G_m\}$$

ha un numero finito di coniugati, sicchè

$$\bar{E}_n = \langle \tau_{m,y} \mid m \leq n, y \in G_m \rangle^{\bar{G}}$$

è un sottogruppo normale finito di $\bar{G}$ per il lemma di Dietzmann. Poichè

$$\bar{G} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bar{E}_n,$$

il gruppo $\bar{G}$ è un FC-gruppo periodico, il che prova l'asserto in quanto G è isomorfo ad un quoziente di $\bar{G}$. □

Corollario 1.36. *Sia G un FC-gruppo periodico numerabile. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione – Per il Teorema 1.35 il gruppo G è isomorfo ad un quoziente di un FC-gruppo periodico numerabile residualmente finito $\bar{G}$. D'altra parte $\bar{G}$ è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti per il Teorema 1.27, e quindi G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto della stessa famiglia. □

Il Corollario 1.36 può essere migliorato imponendo l'ipotesi di numerabilità soltanto al gruppo quoziente $G/Z(G)$ invece che a G. Si ha infatti:

Corollario 1.37. *Sia G un FC-gruppo periodico tale che $G/Z(G)$ sia numerabile. Allora G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

Dimostrazione – Si consideri un trasversale W di $Z(G)$ in G, e si ponga $N = \langle W \rangle$. Poichè $G/Z(G)$ è numerabile, tale è anche N; inoltre $G = NZ(G)$, ed in particolare N è un sottogruppo normale di G. Il Corollario 1.36 assicura che N è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. D'altra parte $Z(G)$ è un gruppo abeliano periodico, e quindi può essere immerso in un prodotto diretto della forma

$\mathrm{Dr}_{i\in I}\, P_i$, dove ogni P_i è un gruppo di tipo ${p_i}^\infty$ per qualche numero primo p_i; è allora ben noto che P_i è isomorfo ad un quoziente del gruppo

$$\mathbb{Z}_{p_i} \times \mathbb{Z}_{p_i^2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_i^n} \times \ldots,$$

il che prova che anche $Z(G)$ è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. Considerato il prodotto diretto esterno $N \times Z(G)$, è immediato verificare che l'applicazione

$$\varphi : (a, x) \in N \times Z(G) \longmapsto ax \in G$$

è un epimorfismo, per cui G è isomorfo ad un quoziente del gruppo $N \times Z(G)$, e quindi anche ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti. □

Si segnala infine il seguente rilevante risultato, riguardante le proprietà di immersione del derivato di un qualunque FC-gruppo. E' il caso di osservare che per il Teorema 1.19 il derivato di un arbitrario FC-gruppo è anche derivato di un FC-gruppo periodico.

Teorema 1.38. (M.J. Tomkinson [**112**]) *Sia G un FC-gruppo. Allora il derivato G' di G è isomorfo ad una sezione del prodotto diretto di una famiglia di gruppi finiti.*

7. Coniugio locale negli FC-gruppi

E' ben noto che il teorema di Sylow non si può estendere al caso infinito, in quanto esistono gruppi localmente finiti contenenti sottogruppi di Sylow relativi ad uno stesso numero primo che non sono equipotenti (e quindi ovviamente neppure isomorfi). Il nostro prossimo scopo è provare che la situazione è migliore nel caso degli FC-gruppi; poichè l'insieme degli elementi periodici di G è un sottogruppo, è chiaro che è possibile limitare la nostra attenzione al caso degli FC-gruppi periodici. D'altra parte è facile osservare che in un FC-gruppo periodico numerabile i sottogruppi di Sylow non sono necessariamente coniugati. Infatti, sia $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di gruppi tutti isomorfi al gruppo simmetrico $Sym(3)$, e si consideri il prodotto diretto $G = \mathrm{Dr}_{n\in\mathbb{N}}\, G_n$. Poichè ogni G_n contiene tre 2-sottogruppi di Sylow, si ha subito che l'insieme dei 2-sottogruppi di Sylow di G non è numerabile; la numerabilità di G assicura allora che i suoi 2-sottogruppi di Sylow non riempiono un'unica classe di coniugio.

Sia G un gruppo. Un automorfismo φ di G si dice *localmente interno* se per ogni parte finita $\{x_1, \ldots, x_t\}$ di G esiste un elemento g di G tale che

$x_i^\varphi = x_i^g$ per ogni $i = 1, \ldots, t$. Chiaramente l'insieme $LInnG$ costituito da tutti gli automorfismi localmente interni di G è un sottogruppo dell'automorfo $AutG$ e contiene il gruppo $InnG$ di tutti gli automorfismi interni di G; inoltre, se G è un gruppo finito, risulta $LInnG = InnG$. Si noti anche che ogni sottogruppo normale di un gruppo G è fissato da tutti gli automorfismi localmente interni di G. La struttura del gruppo degli automorfismi localmente interni è stata studiata da vari autori. In particolare D.J.S. Robinson, S.E. Stonehewer e J. Wiegold [**99**] hanno provato che se G è un FC-gruppo il cui centro ha indice infinito α, allora la cardinalità di $LInnG$ è 2^α; un notevole corollario di tale risultato assicura che il gruppo degli automorfismi esterni di un qualunque FC-gruppo periodico infinito è infinito.

Se G è un gruppo, i sottogruppi H e K di G si dicono *localmente coniugati* se esiste un automorfismo localmente interno φ di G tale che $H^\varphi = K$. Evidentemente, sottogruppi coniugati sono anche localmente coniugati e sottogruppi localmente coniugati sono isomorfi, ma due sottogruppi localmente coniugati di un gruppo infinito possono non essere coniugati.

In un qualunque gruppo residualmente finito G è possibile introdurre in modo naturale una topologia (la topologia *profinita*) scegliendo come base per gli aperti l'insieme di tutti i laterali dei sottogruppi normali di indice finito; il gruppo topologico così costruito è compatto, e i sottogruppi chiusi sono tutti e soli quelli che si possono ottenere come intersezione di sottogruppi di indice finito. In particolare, nel caso degli FC-gruppi periodici residualmente finiti, i metodi topologici introdotti mediante la topologia profinita hanno un ruolo fondamentale per lo studio dei problemi di coniugio. La descrizione dettagliata di tali metodi è fuori dalla portata di questi appunti; queste considerazioni topologiche permettono comunque di dimostrare il prossimo risultato, il cui utilizzo è fondamentale per i nostri scopi. Si ricordi che un *sistema locale* di un gruppo G è un ricoprimento $\mathfrak{L}$ di G costituito da sottogruppi tale che per ogni coppia (X, Y) di elementi di $\mathfrak{L}$ esista un elemento di $\mathfrak{L}$ contenente sia X che Y.

Teorema 1.39. (S.E. Stonehewer [**111**]) *Sia G un FC-gruppo, e sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi finitamente generati e normali. Per ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ sia inoltre Γ_X un insieme non vuoto di automorfismi di X indotti da automorfismi interni di G tale che se $X \leq Y \in \mathfrak{L}$ ogni elemento di Γ_Y induce su X un elemento di Γ_X. Allora esiste un automorfismo localmente interno di G che induce su ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ un elemento di Γ_X.*

Dal risultato precedente segue in primo luogo che negli FC-gruppi gli automorfismi localmente interni dei sottogruppi possono essere prolungati ad automorfismi localmente interni dell'intero ambiente. Si ha infatti:

Corollario 1.40. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G. Se θ è un automorfismo localmente interno di H, esiste un automorfismo localmente interno φ di G la cui restrizione ad H coincide con φ.*

Dimostrazione − Poichè G è un FC-gruppo, esiste un sistema locale $\mathfrak{L}$ di G costituito da sottogruppi normali e finitamente generati. Se X è un qualunque elemento di $\mathfrak{L}$, il gruppo $X/Z(X)$ è finito, per cui $H \cap X$ è finitamente generato e θ opera su $H \cap X$ come un automorfismo interno; allora è non vuoto l'insieme Γ_X costituito da tutti gli automorfismi di X indotti da automorfismi interni di G e che coincidano con θ su $H \cap X$. Il Teorema 1.39 assicura quindi che esiste un automorfismo localmente interno φ di G che induce su ogni X un elemento di Γ_X; in particolare φ coincide con θ su $H \cap X$ per ogni elemento X di $\mathfrak{L}$, e quindi $\varphi_H = \theta$. □

Il prossimo risultato mostra che in un qualunque FC-gruppo un sottogruppo non può essere localmente coniugato ad un suo sottogruppo proprio.

Teorema 1.41. *Sia G un FC-gruppo, e siano H un sottogruppo e φ un automorfismo localmente interno di G tale che $H^\varphi \leq H$. Allora risulta $H^\varphi = H$.*

Dimostrazione − Sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi normali e finitamente generati. Qualunque sia l'elemento X di $\mathfrak{L}$, il sottogruppo $H \cap X$ è finitamente generato, e quindi esiste un elemento g_X di G tale che

$$(H \cap X)^{g_X} = (H \cap X)^\varphi = H^\varphi \cap X^\varphi \leq H \cap X.$$

Ovviamente l'intersezione $H \cap X \cap Z(G)$ è un sottogruppo normale di G, e $H \cap X/H \cap X \cap Z(G)$ è isomorfo al suo sottogruppo $(H \cap X)^{g_X}/H \cap X \cap Z(G)$. D'altra parte, la locale finitezza di $G/Z(G)$ assicura che $H \cap X/H \cap X \cap Z(G)$ è finito, per cui $H \cap X = (H \cap X)^{g_X}$ per ogni $X \in \mathfrak{L}$. Pertanto

$$H^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X)^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X)^{g_X} = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (H \cap X) = H,$$

e l'asserto è provato. □

Sia G un gruppo, e sia H un sottogruppo di G. L'insieme di tutti i sottogruppi di G che sono localmente coniugati ad H si chiama *classe di coniugio locale* di H in G, e si denota con il simbolo $LC\ell_G(H)$. In modo analogo, la classe di coniugio di H in G sarà denotata nel seguito con il simbolo

$C\ell_G(H)$; ovviamente risulta $C\ell_G(H) \subseteq LC\ell_G(H)$ per ogni sottogruppo H del gruppo G.

LEMMA 1.42. *Sia G un FC-gruppo, e siano H un sottogruppo e x un elemento di G. Allora l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito.*

DIMOSTRAZIONE − Il sottogruppo $H \cap C_G(x)$ è ovviamente fissato da x, e quindi è contenuto in $H \cap H^x$. D'altra parte $C_G(x)$ ha indice finito in G, e quindi anche l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito. □

LEMMA 1.43. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G. La classe di coniugio $C\ell_G(H)$ è finita se e soltanto se il gruppo H/H_G è finito.*

DIMOSTRAZIONE − Si supponga in primo luogo che la classe di coniugio di H in G sia finita. Il Lemma 1.42 assicura che l'indice $|H : H \cap H^x|$ è finito per ogni elemento x di G, sicchè anche il nocciolo

$$H_G = \bigcap_{x \in G} H^x = \bigcap_{x \in G} (H \cap H^x)$$

ha indice finito in H. Reciprocamente, sia H/H_G finito. Per il lemma di Dietzmann è allora finita anche la chiusura normale H^G/H_G di H/H_G in G/H_G; poichè risulta $H_G \leq H^x \leq H^G$ per ogni elemento x di G, la classe di coniugio $C\ell_G(H)$ è finita. □

LEMMA 1.44. *Sia G un FC-gruppo, e sia H un sottogruppo di G tale che la classe di coniugio $C\ell_G(H)$ sia finita. Allora risulta $LC\ell_G(H) = C\ell_G(H)$.*

DIMOSTRAZIONE − Poichè la classe di coniugio di H in G è finita, il Lemma 1.43 assicura che il nocciolo H_G di H in G ha indice finito in H, per cui esiste una parte finita $\{h_1, \dots, h_t\}$ di H tale che

$$H = \langle H_G, h_1, \dots, h_t \rangle.$$

Qualunque sia l'automorfismo localmente interno φ di G, esiste un elemento x di G tale che $h_i^\varphi = h_i^x$ per ogni $i = 1, \dots, t$; allora risulta

$$H^\varphi = \langle H_G, h_1^\varphi, \dots, h_t^\varphi \rangle = \langle H_G, h_1^x, \dots, h_t^x \rangle = H^x,$$

per cui H e H^φ sono coniugati in G e $LC\ell_G(H) = C\ell_G(H)$. □

LEMMA 1.45. *Sia G un FC-gruppo periodico, e siano P un p-sottogruppo di Sylow e X un sottogruppo normale finito di G. Allora $P \cap X$ è un p-sottogruppo di Sylow di X.*

Dimostrazione – Ovviamente P è un p-sottogruppo di Sylow del gruppo XP, e l'indice $|XP : P|$ è finito, sicchè P contiene un sottogruppo normale N di XP tale che XP/N sia finito. Poichè P/N è un p-sottogruppo di Sylow di XP/N, per il teorema di Sylow si ha che $P \cap XN/N$ è un p-sottogruppo di Sylow di XN/N. L'isomorfismo naturale tra XN/N e $X/X \cap N$ assicura allora che $P \cap X/X \cap N$ è un p-sottogruppo di Sylow di $X/X \cap N$, e quindi $P \cap X$ è un p-sottogruppo di Sylow di X. □

Siamo ora in grado di provare il risultato principale di questo paragrafo, che in qualche modo estende il teorema di Sylow agli FC-gruppi periodici.

Teorema 1.46. (R. Baer [**4**]) *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia p un numero primo. Allora due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono localmente coniugati, e quindi anche isomorfi.*

Dimostrazione – Siano P e Q p-sottogruppi di Sylow di G, e sia $\mathfrak{L}$ un sistema locale di G costituito da sottogruppi normali finiti. Qualunque sia l'elemento X di $\mathfrak{L}$, il Lemma 1.45 assicura che $P \cap X$ e $Q \cap X$ sono p-sottogruppi di Sylow di X, e quindi sono coniugati in X, per cui è non vuoto l'insieme Γ_X costituito da tutti gli automorfismi θ di X indotti da automorfismi interni di G e tali che $(P \cap X)^\theta = Q \cap X$; è anche chiaro che se X e Y sono elementi di $\mathfrak{L}$ tali che $X \leq Y$, allora ogni elemento di Γ_Y induce su X un elemento di Γ_X. Pertanto il Teorema 1.39 assicura che esiste un automorfismo localmente interno φ di G che induce su ogni elemento X di $\mathfrak{L}$ un elemento di Γ_X, e perciò $(P \cap X)^\varphi = Q \cap X$. Pertanto risulta

$$P^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (P \cap X)^\varphi = \bigcup_{X \in \mathfrak{L}} (Q \cap X) = Q,$$

e i sottogruppi P e Q sono localmente coniugati in G. □

Corollario 1.47. *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia P un p-sottogruppo di Sylow di G dotato di un numero finito di coniugati in G. Allora due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati.*

Dimostrazione – Si denoti con $Syl_p(G)$ l'insieme dei p-sottogruppi di Sylow di G. Applicando il Teorema 1.46 ed il Lemma 1.44 si ha allora

$$Syl_p(G) = LC\ell_G(P) = C\ell_G(P),$$

e quindi due qualunque p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati. □

Il Corollario 1.47 fornisce una condizione che è anche necessaria per il coniugio dei sottogruppi di Sylow di un FC-gruppo periodico. Si ha infatti:

Teorema 1.48. (M.I. Kargapolov [**67**]) *Sia G un FC-gruppo periodico, e sia p un numero primo. Allora i p-sottogruppi di Sylow di G sono coniugati se e soltanto se l'insieme dei p-sottogruppi di Sylow di G è finito.*

Si osservi che nei risultati precedenti l'ipotesi di periodicità sul gruppo G può essere omessa, in quanto il Corollario 1.17 assicura che in un qualunque FC-gruppo l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo ed il Corollario 1.40 permette di prolungare gli automorfismi localmente interni dei sottogruppi di un FC-gruppo ad automorfismi localmente interni del gruppo.