

---

# Sistemi Integrabili

διὰ γὰρ τὸ θαυμάζειν οἱ ἄνθρωποι καὶ νῦν  
καὶ τὸ πρῶτον ἤρξαντο φιλοσοφεῖν

In effetti, ora come in origine, gli uomini hanno iniziato a filosofare per la meraviglia.

(Aristotele, *Methaphysica*, A 2, 982b )

---

**Luigi Martina**

Dipartimento di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi" Università del Salento,  
INFN Sezione di Lecce

---

**B**reve rassegna del concetto di Sistema Integrabile Classico e delle sue applicazioni recenti in vari campi della Fisica.

Tra i tanti ricercatori che hanno partecipato allo sviluppo di queste idee, un cenno particolare è stato posto sulla figura di L. Faddeev, recentemente scomparso.

## Introduzione

Una grande differenza tra il fare Scienza oggi rispetto agli antichi non consiste tanto nella scrupolosa ed ostinata ricerca delle Leggi che governano l'Universo, quanto l'insopprimibile bisogno di metter tali Leggi alla prova. In altre parole il cercare di dedurre delle conseguenze logiche osservabili, entro i limiti di validità già predefiniti dalla stessa teoria e di essa parte integrante. Se le leggi sono basate su misure fatte con il metro della sarta, con il metro della sarta vanno verificati gli esiti delle nostre deduzioni. Sarebbe così del tutto fuorviante tentare di derivare proprietà degli atomi, che mai potranno essere accomodate entro misure e leggi che ne ignorano l'esistenza. Ovviamente, menzionando metri da sarta, bilance da salumiere e orologi a cucù, o tutto l'armamentario di microsensori a disposizione sui nostri cellulari, oppure il mi-

croscopio a forza atomica di Binnig, il rivelatore ATLAS del CERN di Ginevra, LIGO e VIRGO, non stiamo facendo altro che postulare che le grandezze fisiche contengano nella loro definizione una qualche proprietà matematizzabile. E a questo punto le conseguenze vanno ricavate con Leibnitz: *Calcoliamo!*.

Non è più sufficiente dire, con Aristotele, che tutti i corpi andranno, prima o poi, nel loro luogo naturale. La domanda alla quale rispondere è: se ci vanno, come ci vanno? Nel senso di: quanto spazio percorre e quanto tempo occorre ad un carretto fatto così e così e lasciato andare da un certo punto a fermarsi lungo una strada sterrata, oppure su una strada ben selciata, imprimendogli un impulso pari a tot? Naturalmente, chi ha frequentato il liceo, e ha dimenticato Aristotele, subito dirà: usiamo i Principi di Newton [1]! Ma dopo aver scritto la formula  $\mathbf{F} = m \mathbf{a}$ , bisogna tradurla negli algoritmi corrispondenti e iniziare a calcolare la soluzione delle equazioni del moto. Questo lo si può fare numericamente, per piccoli passi discreti, oppure con metodi analitici, nei quali si prendono le mosse da una certa idea di continuità per alcuni oggetti matematici come i numeri reali  $\mathbb{R}$ . Così brillante è l'idea che in effetti è diventata il modello prototipo per quasi tutti i ragionamenti sul circostante. Da essa trae

origine la Meccanica Analitica dai tempi di Lagrange in poi [2]. Ma a volte questa intuizione è solo di una presunta forma *a priori*, senza una effettiva verifica sperimentale. E i fisici hanno molte altre alternative sulla natura e struttura fine dello spazio-tempo, e di ogni altro ente fisico in esso immerso (a titolo esemplificativo si veda [3] o a un livello più tecnico [4, 5]). D'altra parte non è la credibilità dell'analisi reale come modello di spazio e di tempo quello che è importante, ma i metodi di base, sapendoli estendere, modificare ed applicare ad altre teorie, senza perderne il rigore logico e la potenza deduttiva.

## Pendoli, Trottolo e Pianeti

Immediatamente dopo la formulazione dei *Principia* di Newton, e con una teoria del *Calcolo* ancora non su basi solidissime, gli scienziati cercarono di trovare soluzioni esatte per problemi meccanici non banali. Certamente il problema di Keplero fu risolto analiticamente dallo stesso Newton. L'importanza di questo risultato di per sé ha segnato tutta la Scienza successiva. Tuttavia, a parte questo esempio, solo una manciata di altri problemi si sarebbero potuti trattare esattamente, cioè senza ricorrere ad approssimazioni intermedie nei calcoli, basate su ipotesi aggiuntive del modello, o su calcoli numerici. Questi contengono intrinsecamente delle approssimazioni dovute alla taglia del passo scelto e, comunque, effettivamente perseguibili in grande scala e tempi lunghi solo con l'avvento della moderna scienza dei computers.

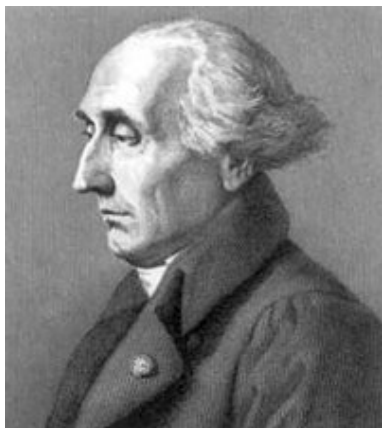
A questo proposito vanno citati due esperimenti numerici dei primi anni '50 del XX secolo: la catena di Fermi - Pasta - Ulam (FPU) [6] e quello sulla viscosità artificiale di Von Neumann [7]. Entrambi antesignani delle moderne tecniche di simulazione numerica e dell'uso del calcolatore elettronico come un laboratorio indirizzato alla scoperta di nuovi fatti scientifici. Specificatamente il modello di FPU, costituito da una catena di oscillatori non lineari interagenti tra i primi vicini, fu introdotto per studiare numericamente l'*ipotesi ergodica* e il *teorema di equipartizione dell'energia*. Nel secondo caso si studiava la stabilità numerica di sistemi discretizzati, partendo da modelli continui di propagazione di onde d'urto. In entrambi i casi fu evidenziato l'emergere di

strutture stabili nelle soluzioni, dovute agli effetti combinati della dispersione o dissipazione, rispettivamente, e della non linearità.

Fin da tempi remoti si è cercato di descrivere i moti di sistemi più o meno complessi in termini di moti rettilinei o circolari uniformi. Cioè moti che manifestavano un intrinseco senso di semplicità e di bellezza, o se si preferisce di ordine e di regolarità (o ancora, di simmetria esplicitamente espressa), con un che di magico oltre che di grande praticità. Ma da Newton in poi ogni astro e ogni particella dell'Universo si muove piegandosi alle forze che via via incontra lungo la sua traiettoria. Questa ora può essere molto complicata, affatto connessa a moti uniformi o circolari e al senso di sicurezza e di ordine che da essi emana. Basti pensare che le forze tra gli astri, da sempre pensate a simmetria centrale, in effetti possono dar luogo a orbite ellittiche o, addirittura, iperboliche, come nel caso delle comete. Qualcosa che lasciava sgomenti e sfuggiva all'immaginario e sospirato grande ordine cosmico esistente *ad maximam Dei gloriam*.

Forse è opportuno chiarire ora che il concetto di integrabilità non è lo stesso di risolubilità. Il fatto che molto spesso le due cose vadano assieme è certamente ciò che rende le teorie integrabili così attraenti, tuttavia è necessario fare una distinzione. Esistono sistemi integrabili che non si possono veramente esprimere sino in fondo analiticamente, così come esistono sistemi esattamente risolvibili che non sono integrabili. La risolubilità dipende in ultima analisi dalla capacità e dalla potenza computazionale. L'integrabilità si riferisce piuttosto alla proprietà di un sistema di mostrare comportamenti regolari (quasi-periodici) per ogni possibile condizione iniziale, in opposizione a quelli caotici e irregolari. Lo stesso discorso vale per la versione quantistica di tali sistemi, dove l'integrabilità implica delle proprietà molto specifiche nella struttura dello spettro degli osservabili.

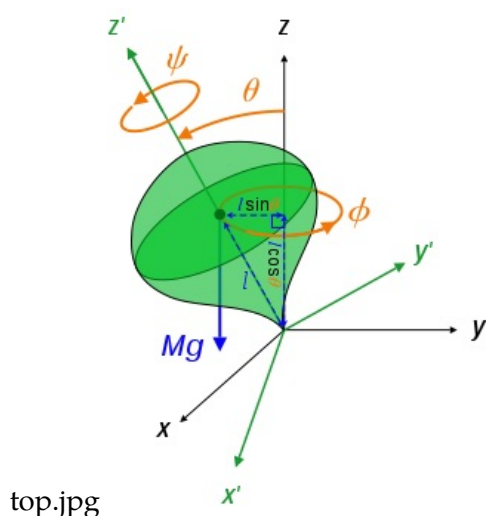
Perciò, nonostante la *Mécanique Analytique* di Lagrange e l'enunciazione del paradigma meccanicistico determinista, all'inizio dell'800 gli esempi di modelli dinamici a più gradi di libertà, dei quali si conoscessero le soluzioni in forma analitica erano il già citato problema di Keplero, i sistemi di oscillatori armonici, il corpo rigido con un punto fisso e in assenza di forze esterne (trot-



**Figura 1:** Joseph-Louis (Giuseppe Lodovico) Lagrange (1736 (Torino) - 1813 (Parigi))



**Figura 3:** William Rowan Hamilton (1805 (Dublino) - 1865 (Dublino))



**Figura 2:** La trottola di Lagrange



**Figura 4:** Joseph Liouville (1809 (Saint Omer) - 1882 (Parigi))

tola di Eulero) e la trottola di Lagrange (trottola simmetrica con un punto fisso e baricentro sull'asse di simmetria, sottoposto all'azione di un campo uniforme di forze). Senza dettagliare troppo, la loro risolubilità era garantita dall'esistenza di un numero sufficiente di quantità analitiche conservate, il che permetteva di ridurre il problema al calcolo di un solo integrale. Il processo veniva chiamato *riduzione alle quadrature*. Come questi metodi si potessero estendere ad altri casi o come si potessero costruire modelli con simili proprietà era sostanzialmente ignoto. Molto era lasciato all'abilità tecnica del singolo studioso.

Per tutta la durata della prima metà del XIX secolo Hamilton, Jacobi e Liouville perfezionarono la nozione di integrabilità per quei sistemi meccanici detti, per l'appunto, *Hamiltoniani*. Essi for-

nirono un quadro generale per la loro risoluzione mediante quadrature. A questo proposito molti ricorderanno l'*equazione di Hamilton-Jacobi* e il *teorema di Liouville* (poi generalizzato da Arnold).

Un caso notevole di trottola dal moto integrabile fu discusso da Sofia (Sonya) Kovalewskii nel 1889, utilizzando un metodo basato sullo studio delle singolarità presenti nelle soluzioni. Richiedendo che tali singolarità siano abbastanza semplici, è possibile stabilire quando i moti sono regolari ed il sistema integrabile. Va sottolineato che la procedura di Kovalewskii fu ripresa, con altre motivazioni, da Painlevé, e la sua scuola, nell'ambito della classificazione delle equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine non lineari.



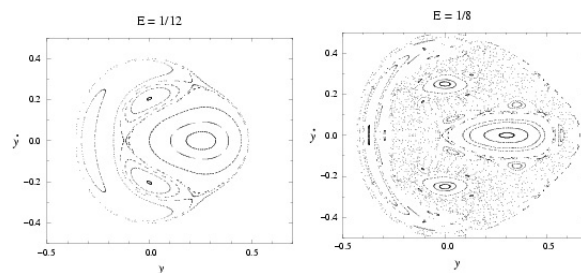
**Figura 5:** Carl Jacobi (1804 (Potsdam) - 1851 (Berlino))



**Figura 6:** Sofia Vasilyevna Kovalevskaya (1850 (Mosca) - 1891 (Stoccolma))

Per i dettagli di questo metodo rimandiamo all'articolo di D. Guzzetti nel presente numero di Ithaca.

Poco dopo, però, H. Poincaré dimostrò che il sistema di 3 corpi in interazione gravitazionale tra loro non ha soluzione generale analitica, data da espressioni algebriche e integrali. Inoltre fece vedere che in molte situazioni esiste una dipendenza sensibile dei moti dalle loro condizioni iniziali. Infatti una delle idee fondamentali del suo *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* fu quella di studiare i moti prossimi a quelli periodici (alcuni dei quali già noti a Eulero e Lagrange), modificando leggermente le condizioni iniziali. Con un'approssimazione al primo ordine delle equazioni, si giungeva allo studio di equazioni lineari a coefficienti periodici. Il comportamento



**Figura 7:** Mappa di Poincaré per il sistema, non integrabile, di Hénon-Heiles ispirato al moto dei tre corpi. La mappa consiste nella intersezione della traiettoria nello spazio delle fasi su un solo piano di coordinate coniugate. Le traiettorie periodiche sono individuate da singoli punti, le orbite stabili lasciano la traccia della sezione regolare di una superficie toroidale, le orbite caotiche tendono ad errare nel piano, evidenziando il loro carattere instabile. La mappa è riportata per due diversi valori dell'energia totale del sistema. Si nota che al crescere dell'energia le regioni occupate da traiettorie instabili tendono ad aumentare in rapporto all'area complessiva disponibile ai moti. Questa è una rappresentazione sperimentale, nel senso di esperimento numerico, dell'enunciato del teorema KAM.

delle soluzioni di tali equazioni è determinato da certi *esponenti caratteristici* delle proprietà di stabilità dei moti. In altri termini, se e come i moti si discostano dall'orbita periodica iniziale. La situazione generica è quella di un discostamento sistematico esponenzialmente rapido dal moto regolare periodico, dando luogo a comportamenti anche molto complessi. Quindi Poincaré descrisse per la prima volta una dinamica, che quasi un secolo dopo avrebbe assunto la denominazione di *caos deterministico*, in particolare tramite uno strumento matematico noto come *Mappa di Poincaré*. (Per una breve rassegna sul tema si legga il Cap. 11 del noto trattato di Meccanica del Goldstein [9]). Quindi si era arrivati ad un bivio concettuale: i sistemi meccanici tendono ad assumere generalmente un comportamento non descrivibile in termini analitici (quindi caotici), mentre i sistemi integrabili sono una rarità. Essi sono veramente confinati nel novero delle curiosità matematiche? Eppure moti armonici e moti kepleriani sembrano essere abbastanza importanti ed usuali nella Fisica. La domanda si può traslare nella seguente: di quanto è deformabile un sistema integrabile nella sua struttura, prima che diventi impossibile descriverne i moti

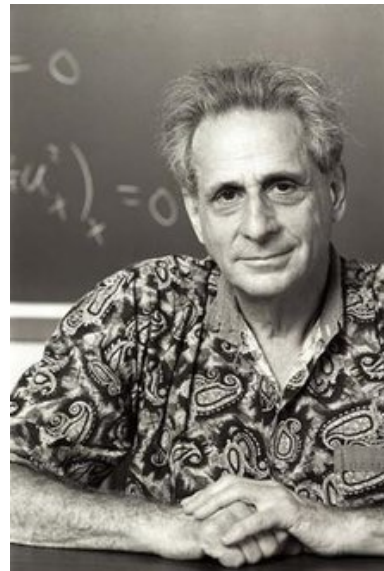


**Figura 8:** Henry Poincaré ( 1854 (Nancy) - 1912 (Paris))

in forma analitica?

Certamente è sempre possibile introdurre delle perturbazioni su un sistema integrabile, tali che per tutte le condizioni iniziali del sistema viene meno la possibilità di trovare soluzioni (quasi)-periodiche ben ordinate. Nel senso che nello spazio delle fasi tali orbite si avvolgono densamente su superfici lisce e chiuse (tori) (sezioni di tali tori si distinguono in Figura 7). Tuttavia, se le perturbazioni non comportano *risonanze* tra differenti modi di oscillazione dello stesso sistema, allora i tori si distorcono progressivamente, ma con continuità, al crescere dell'intensità della perturbazione. Questo fenomeno costituisce il contenuto del celebre teorema di Kolmogorov - Arnold - Moser (KAM) [10, 11, 12]. In altri termini esso stabilisce sotto quali condizioni i tori dello spazio delle fasi, invarianti sotto la dinamica di un sistema integrabile perturbato, non vengano totalmente distrutti, ma solo deformati. Questo ha importanti implicazioni, per esempio, sulla stabilità delle orbite per il sistema dei 3 corpi, dimostrando che in tal caso esistono delle soluzioni esprimibili in serie convergenti di potenze. Tuttavia molte delle sue applicazioni sono limitate al caso in cui una delle masse dia molto più piccola delle altre mentre, in generale, vanno adottati metodi di calcolo differenti. Si noti che la restrizione menzionata è comunque di grande interesse per i moti dei satelliti artificiali, con Terra-Luna-Satellite nel ruolo dei 3 corpi. Molti altri esempi di interesse astrofisico si possono riportare a questo.

Il teorema KAM, e le sue svariate applicazio-



**Figura 9:** Martin Kruskal (1925 (New York) - 2006 (Princeton)) M. Kruskal è stato uno dei più versatili fisici teorici della sua generazione e si distinse per i suoi contributi in diverse aree, in particolare nella fisica del plasma. Fece una memorabile incursione nella relatività generale. Nel suo pionieristico lavoro, con N. Zabusky [19], sulle onde non lineari introdusse il concetto del solitone e ne ha sviluppato la sua applicazione in molti contesti di Fisica.

ni, apre un ampio spazio ai metodi perturbativi, ma questo significa anche trovare, se esistono, sistemi integrabili interessanti dai quali partire, a parte quelli ovvi già noti. Non tutto sembra perduto per i sistemi integrabili, ma solo negli anni '60 del XX secolo è stato sviluppato un metodo più o meno sistematico per determinarli e studiarli.

## La Trasformata integrante

Il metodo che va sotto il nome di *Metodo della Trasformata Spettrale Inversa* (IST) fu inventato 50 anni fa (in effetti la denominazione fu introdotta successivamente) da Gardner, Green, Kruskal e Miura [13] per risolvere l'equazione di Korteweg - de Vries (KdV)

$$u_t - 6 u u_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

che costituisce un sistema dinamico con infiniti gradi di libertà, ispirata da problemi di idrodinamica [15, 16, 17]. Con la notazione adottata in (1) il campo  $u(x, t)$  indica la velocità di una



**Figura 10:** Peter Lax (1926 (Budapest) - Wolf Prize in Mathematics, Abel Prize, professore al Courant Institute of Mathematical Sciences (New York). Lax ha lavorato in molti campi, lasciando contributi quali il metodo Lax-Wendroff, il teorema di equivalenza di Lax e il teorema di Babushka-Lax-Milgram, oltre alla scoperta delle coppie di Lax. Professore al Courant Institute, ha ricevuto numerosi riconoscimenti, tra i quali il Wiener Prize (1975), il National Medal of Science (1986), Wolf Prize (1987) e l'Abel Prize (2005).

piccola porzione di fluido nella posizione  $x$  al tempo  $t$  e gli indici denotano le sue derivate parziali. Le variabili adottate sono adimensionali e i coefficienti sono assegnati con una scelta di convenienza.

Le ragioni di base del perché il procedimento IST funzioni fu scoperto da Peter Lax, che definì la struttura matematica centrale (nota come *coppia di Lax*) per tutti gli sviluppi successivi riguardanti i sistemi integrabili [20].

Senza grandi dettagli, l'idea di Lax consiste nell'introdurre due opportuni operatori lineari  $L[u]$  ed  $M[u]$ , agenti su uno spazio funzionale lineare ausiliario di funzioni complesse  $\Phi(x, t)$  a quadrato sommabile. In primo luogo Lax dimostrò che l'equazione (1) può essere esattamente riformulata come

$$L_t = [L, M] \quad (2)$$



**Figura 11:** V. E. Zakharov (1939 (Kazan) - ) Scopritore assieme a A. B. Shabat di una classe di sistemi di equazioni non lineari evolutive integrabili, ha dato fondamentali contributi alla teoria dei sistemi non lineari. Formatosi all'Università di Novosibirsk, attualmente è membro del Landau Inst. Theoretical Physics (Chernogolovka, Mosca, Russia), del Lebedev Physical Inst. (Mosca, Russia) e Professore all'Università dell'Arizona (Tucson, AZ, USA). Tra i vari riconoscimenti è stato insignito della medaglia Dirac nel 2003.

se si prendono

$$\begin{aligned} L[u] &= -\partial_x^2 u, \\ M[u] &= 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x + \partial_x(u \cdot)). \end{aligned} \quad (3)$$

In altri termini la (2) è identicamente soddisfatta per tutte le  $\Phi$  se la  $u$  soddisfa la (1) e

$$\begin{cases} L\Phi = \lambda\Phi \\ \Phi_t = -M\Phi \end{cases} \quad (4)$$

In tal caso è facile dimostrare che lo spettro di  $L$  è indipendente dal tempo  $t$ , perché l'evoluzione temporale dettata da (2)-(3) è unitaria.

Quindi lo spettro

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{R} : L\Phi = \lambda\Phi\} \quad (5)$$

è costituito da costanti del moto del sistema.

La Fortuna, o il genio, ha voluto che l' $L$  in (3) sia proprio il celeberrimo operatore di Schrödinger stazionario. Questo ha facilitato di molto il primo approccio alla tecnica IST.

Naturalmente vorremmo avere delle espressioni esplicite delle costanti del moto, ma esse

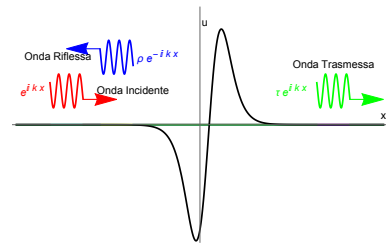


**Figura 12:** Mark Ablowitz (con una copia del manuale di analisi complessa del quale è autore assieme a A. Fokas). È lo scopritore, assieme a Kaup Newell e Segur, di una amplissima classe di coppie di Lax per sistemi completamente integrabili. Inoltre ha sviluppato, principalmente assieme a Fokas, una riformulazione del metodo IST in termini di problemi di Riemann-Hilbert, particolarmente utili nei casi a più di una dimensione spaziale. Ha ottenuti numerosi riconoscimenti scientifici ed è attualmente Full Professor alla Colorado State University (Boulder, CO, USA)



**Figura 13:** Riproduzione del 1995 dell'osservazione del solitone fatta da J. Scott Russell nel 1885 nell'Union Canal. Foto di Chris Eilbeck della Heriot-Watt University di Edinburgo

si nascondono nel profondo della struttura delle autofunzioni di  $L[u]$  e da lì bisogna cavarle.



**Figura 14:** Il potenziale generico  $u$  è rappresentato con la curva nera. Asintoticamente a  $x \rightarrow -\infty$  un'autofunzione dello spettro continuo del problema di Schrödinger  $L$  con tale potenziale si potrà decomporre nella combinazione lineare in un termine progressivo  $e^{i k x}$  e di uno regressivo  $e^{-i k x}$ , con un coefficiente  $\rho(k)$  chiamato ampiezza di riflessione. Invece a  $x \rightarrow +\infty$  rimane solo un termine progressivo con un coefficiente  $\tau(k)$ , chiamato ampiezza di trasmissione.

Vediamo come.

Nell'ipotesi conveniente che il dato iniziale  $u_0 = u(x, t_0)$  (quindi poi anche  $u(x, t)$ ) funga da potenziale rapidamente convergente a 0, nel limite  $x \rightarrow \pm\infty$ , le autofunzioni di  $L$  assumono delle importanti proprietà di analiticità nel piano complesso  $\mathbb{C}_k$  del parametro spettrale  $k^2 = \lambda$ . In particolare si sanno calcolare le cosiddette ampiezza di riflessione e di trasmissione, che nei due limiti asintotici collegano combinazioni di soluzioni progressive/regressive (si veda la Figura 14). Queste dipendono solo da  $k$  e, in particolare, il reciproco dell'ampiezza di trasmissione è analitico nel semi-piano superiore  $\mathbb{C}_k^+$ , dove possiede degli zeri semplici sull'asse immaginario, corrispondenti agli autovalori dello spettro discreto di  $L$ , ed è limitato per  $\Im k > 0$ . Infine è facile vedere che l'evoluzione temporale dettata dall'operatore  $M$  è banale su di esso, ovvero l'ampiezza di trasmissione è indipendente dal tempo. Ecco il punto vulnerabile e dove acchiappare le costanti del moto: si calcola lo sviluppo dell'inverso dell'ampiezza di trasmissione nell'intorno dell' $\infty$  con  $\Im k > 0$ : i suoi coefficienti sono indipendenti sia da  $x$  che da  $t$  e si possono esprimere come quantità integrali della forma  $\int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x, t) dx$ ,

le cui densità sono

$$\begin{aligned}
 S_1 &= u \\
 S_2 &= u_x \\
 S_3 &= u_{xx} - u^2 \\
 S_4 &= u_{xxx} - 2(u^2)_x \\
 S_5 &= u_{xxxx} - 2(u^2)_{xx} - (u_x)^2 \\
 &\quad - 2u u_{xx} + 2u^3 \\
 &\quad \vdots \\
 S_{n+1} &= \partial_x S_n + \sum_{m=1}^{n-1} S_m S_{n-m}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Si osservi che l'ultima formula consente di calcolare ricorsivamente le infinite densità conservate. Tuttavia, affinché il sistema sia effettivamente integrabile secondo il teorema di Liouville-Arnold, si deve dimostrare che le  $\mathcal{I}_n$  siano *indipendenti* e in *involuzione*. In effetti nel caso in esame queste condizioni sono verificate, ma per farlo c'è bisogno di una ulteriore struttura matematica, che andiamo ad introdurre.

## Sistemi Hamiltoniani

Come si ricorderà dai corsi di Meccanica Hamiltoniana, il moto di un sistema ad  $N$  gradi di libertà è descritto da una traiettoria nell'astratto Spazio delle Fasi  $M$  a  $2N$  dimensioni, localmente simile (precisamente *diffeomorfo*) ad aperti di  $\mathbb{R}^{2N}$  con coordinate locali

$$(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N).$$

Ad esempio per una singola particella nello spazio ordinario  $N = 3$ , per due particelle  $N = 6$ , per un corpo rigido  $N = 6$ , per una mole di gas di particelle puntiformi  $N \simeq 18.066 \times 10^{23}$ . Le dimensioni dei rispettivi Spazi delle Fasi sono raddoppiate.

Gli osservabili dinamici costituiscono un insieme (un'algebra commutativa in effetti) di funzioni differenziabili  $f : M \times \mathbb{R}_{(t)} \rightarrow \mathbb{R}$ . Considerati due qualunque  $f(p, q, t)$  e  $g(p, q, t)$  di tali osservabili, viene definita la loro *Parentesi di Poisson* come quella funzione data da

$$f, g \rightarrow \{f, g\} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k}. \tag{7}$$

La nuova operazione  $\{\cdot, \cdot\}$  è una derivazione (cioè è bilineare e soddisfa la regola di Leibnitz sulla derivata di prodotti di funzioni) nell'insieme degli osservabili ed è

1. antisimmetrica  $\{g, f\} = -\{f, g\}$ ,
2. gode dell'identità di Jacobi
 
$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0.$$

I matematici chiamano una tale struttura *algebra di Lie*, in onore del matematico norvegese Sophus Lie, che la introdusse in relazione allo studio delle *simmetrie infinitesime* possedute dalle equazioni differenziali nella seconda metà dell'800. Per un approfondimento sull'argomento si veda il contributo di D. Levi in questo numero.

Applicando la (7) alle coordinate, viste come osservabili, si ottengono le cosiddette *relazioni di commutazione canoniche*

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0.$$

Assegnata una funzione Hamiltoniana  $H = H(p, q)$ , essa genera la trasformazione temporale di un qualunque osservabile secondo la regola  $\frac{df}{dt} = \partial_t f + \{f, H\}$ . Caso particolare di questa relazione sono le equazioni del moto di Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

In questo contesto, con Liouville e Arnold, si dice che un sistema definito dall'Hamiltoniana  $H$  è *integrabile* se esistono  $N$  integrali del moto  $f_1, \dots, f_N$  ( $\partial_t f_i + \{f_i, H\} = 0$  per  $i = 1, \dots, N$ ) che sono indipendenti, ovvero i gradienti  $\nabla_{(p,q)} f_i$  sono vettori indipendenti su ogni piano tangente  $T_{(p,q)}M$ , e sono in involuzione ovvero

$$\{f_i, f_j\} = 0 \text{ per ogni } i, j = 1, \dots, N.$$

In particolare questo significa che se tali funzioni non dipendono esplicitamente dal tempo, allora commutano con l'Hamiltoniana  $H$ , che è anch'essa una *costante del moto*.

Se tali proprietà sono soddisfatte, allora esiste una *trasformazione canonica* delle coordinate

$$Q_k = Q_k(p, q), \quad P_k = P_k(p, q),$$



che preserva le regole di commutazione canoniche per  $(P_k, Q_k)$  e producono una Hamiltoniana trasformata  $H \rightarrow \tilde{H} = \tilde{H}(P_1, \dots, P_N)$ , in modo tale che le equazioni di Hamilton diventino

$$\frac{dQ_k}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k}, \quad \frac{dP_i}{dt} = 0.$$

Esse si integrano immediatamente nella forma

$$Q_k(t) = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} t + Q_k(0), \quad P_k(t) = P_k(0), \quad (8)$$

dalle quali si vede che la dinamica è stata ridotta ad un moto uniforme! Se il moto dovesse essere globalmente confinato, le formule (8) indicano che ci si sta riducendo ad un insieme di moti circolari uniformi, con le variabili di tipo  $Q_k$  analoghe ad *angoli* di rotazione, mentre le  $P_i$  corrispondono ai momenti angolari, o *azioni*. Perciò l'integrazione di un sistema meccanico si riduce alla ricerca delle sue *variabili di angolo-azione*.

Al lettore non sfuggirà il riemergere dell'antica ed ingenua concezione sulla forma dei possibili moti, ma con la consapevolezza che si stanno trattando situazioni veramente speciali.

In un certo senso un numero sufficiente di integrali del moto, con le proprietà richieste, confina la traiettoria su superfici lisce e regolari nello Spazio delle Fasi  $M$ , parametrizzate con continuità dai valori di tali costanti.

Il teorema di Liouville - Arnold quindi ci definisce le condizioni perché un sistema abbia moti regolari (sia integrabile quindi). In effetti il difficile è trovare esplicitamente tutti gli integrali del moto che occorrono o, in alternativa, la menzionata trasformazione canonica. A questo scopo si può ricorrere all'equazione di Hamilton-Jacobi ma, a parte un certo numero di casi speciali, anche questo problema risulta altrettanto difficile. Non necessariamente si tratta di una buona scorciatoia.

Per poter applicare questi concetti a situazioni più complesse, è opportuno operare alcune generalizzazioni.

In primo luogo, se rinunciamo a distinguere nello spazio delle fasi  $2N = m$ -dimensionale  $M$  chi siano le  $p$  e quali le  $q$ , le indichiamo collettivamente con  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ . La definizione di Parentesi di Poisson si può ampliare introducendo una opportuna matrice  $m \times m$  denotata con

$\omega(\xi)$ , detta struttura di Poisson, e assegnando l'espressione

$$\{f, g\} = \sum_{a,b=1}^m \omega^{a,b} \frac{\partial f}{\partial \xi_a} \frac{\partial g}{\partial \xi_b}, \quad \omega^{a,b} = -\omega^{b,a}$$

tale che, ponendo  $W_{ab} = (\omega^{-1})_{ab}$ , l'identità di Jacobi implica che deve essere soddisfatta la relazione  $\partial_a W_{bc} + \partial_c W_{ab} + \partial_b W_{ca} = 0$ . La matrice  $W_{ab}(\xi)$  si chiama *struttura simplettica*. Un teorema di Darboux ci assicura che localmente possiamo porre la struttura simplettica in forma canonica, ma in generale tale trasformazione non può essere estesa globalmente su tutto  $M$ . Pertanto lo studio di varietà con strutture di Poisson, e la loro classificazione, costituisce un ampio capitolo della ricerca, per esempio in connessione con la *Quantizzazione Geometrica*.

In questo formalismo le equazioni di Hamilton si scrivono come

$$\frac{d\xi}{dt} = \{\xi, H\} = \omega \nabla_\xi H. \quad (9)$$

Inoltre si dimostra che se  $f$  è un integrale del moto, allora esso genera un gruppo ad un parametro (diciamo  $\tau$ ) di trasformazioni di  $M$  in sé stesso, definite risolvendo il nuovo sistema hamiltoniano  $\frac{d\xi}{d\tau} = \omega \nabla_\xi f$ , che lasciano invariante il sistema Hamiltoniano di partenza. Questo risultato costituisce la versione hamiltoniana del famoso *teorema di Noether*, che lega costanti del moto e simmetrie.

La seconda generalizzazione consiste nel passaggio ai sistemi continui, secondo uno schema concettuale /simbolico di questo tipo

$$\begin{array}{ll} ODE & \rightarrow \quad PDE \\ \xi_a(t) & \rightarrow \quad u(x, t) \\ \sum_a & \rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} dx \\ f(\xi) & \rightarrow \quad F[u] \text{ funzionali} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_a} & \rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta u} \end{array}$$

I funzionali sono espressi in forma integrale come  $F[u] = \int_{\mathbb{R}} f(u, u_x, u_{xx}, \dots) dx$ .

La derivata funzionale è definita dalle due relazioni

1.  $\frac{\delta F}{\delta u(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial u_{ix}}$
2.  $\frac{\delta u(y)}{\delta u(x)} = \delta(x - y)$

avendo utilizzato la  $\delta$  di Dirac.

Ora la Parentesi di Poisson tra funzionali, dipendente da una appropriata struttura di Poisson  $\omega(x, y, u)$ , è definita dalla relazione

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \omega(x, y, u) \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\delta G}{\delta u(y)} dx dy. \quad (10)$$

Per analogia con quella canonica della Meccanica una scelta possibile di  $\omega$  è

$$\frac{1}{2} (\partial_x - \partial_y) \delta(x - y),$$

la quale porta alla parentesi

$$\{F, G\} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx.$$

Le equazioni di Hamilton allora prendono la forma

$$u_t = \{u(x), H[u]\} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H}{\delta u(x)}. \quad (11)$$

Si noti l'analogia formale con l'equazione (9). A titolo esemplificativo l'equazione di KdV si ottiene utilizzando nella relazione (11) l'Hamiltoniana

$$H = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{1}{2} u_x^2 + u^3 \right),$$

dove si è assunto che l'integrale esista finito.

Torniamo ora ad esaminare le densità (6), ottenute sfruttando il problema spettrale, dal punto di vista hamiltoniano. In primo luogo si può dimostrare che tutte le densità pari, usando le condizioni al bordo, danno costanti di integrazione nulle per ogni  $u$ : inutilizzabili. Invece si riconosce subito che  $I_{-1} = \int_{\mathbb{R}} S_1 dx$  si interpreta come la massa della perturbazione,  $I_0 = \int_{\mathbb{R}} S_3 dx$  corrisponde alla quantità di moto, mentre  $I_1 = \int_{\mathbb{R}} S_5 dx$  è l'Hamiltoniana che abbiamo usato poco sopra per scrivere la KdV, quindi

$$u_t = \partial_x \frac{\delta I_1}{\delta u(x)}. \quad (12)$$

Introducendo la notazione  $I_{n-1} = \int_{\mathbb{R}} S_{2n+1} dx$  e calcolando le parentesi di Poisson tra le quantità conservate si dimostra che  $\{I_m, I_1\} = 0$  per ogni  $m$ . quindi dall'identità di Jacobi si deduce che vale anche

$$\{I_m, I_n\} = 0$$

per ogni  $m, n$ . In definitiva l'equazione di KdV è un sistema hamiltoniano integrabile secondo Liouville.

Sulla base di quanto enunciato a proposito del teorema di Noether, questo risultato significa pure che le equazioni hamiltoniane  $u_{t_i} = \partial_x \frac{\delta I_i}{\delta u(x)}$  sono simmetrie che lasciano invariante la KdV. Ma non solo: ognuna di esse è una simmetria di tutte le altre. Si sintetizza allora dicendo che la KdV possiede un'infinità di *flussi in commutazione*, che deve essere una caratteristica comune a tutti i sistemi integrabili continui. Infine si osservi che tali simmetrie coinvolgono le derivate del campo  $u$  ad ogni ordine di differenziazione. Quindi queste simmetrie si distinguono dalle espressioni abituali, lagrangiane, che sono finite e coinvolgono al più per KdV fino al terzo ordine di derivazione del campo. Tali espressioni si dicono *simmetrie generalizzate* e furono introdotte da E. Noether. Si veda l'articolo di Levi in questo numero di Ithaca per maggiori dettagli sul concetto di simmetria puntuale e generalizzata.

Osserviamo ora che l'equazione di KdV si può ricavare anche usando come Hamiltoniana la costante del moto  $I_0$  con una nuova struttura di Poisson, precisamente

$$u_t = (-\partial_x^3 + 4u \partial_x + 2u_x) \frac{\delta I_0}{\delta u(x)}. \quad (13)$$

L'operatore  $\mathcal{E} = -\partial_x^3 + 4u \partial_x + 2u_x$  soddisfa tutte le proprietà richieste ad una struttura di Poisson e quindi permette di introdurre nuove parentesi

$$\{F, G\}_{\mathcal{E}} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta F}{\delta u(x)} \mathcal{E} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx.$$

Questa costituisce una importante ed eccezionale novità [21] nel panorama dei sistemi integrabili, nel quale si inserisce una del tutto inaspettata *struttura bi-hamiltoniana*

$$\{F, I_0\}_{\mathcal{E}} = \{F, I_1\} \text{ per ogni } F.$$

In definitiva essa garantisce l'integrabilità stessa del sistema. Infatti, data la corrispondenza tra quantità conservate e simmetrie, non solo  $\{u, I_0\}_{\mathcal{E}}$  e  $\{u, I_1\}$  generano una simmetria di KdV (specificamente la stessa equazione), ma anche  $\{u, I_n\}_{\mathcal{E}}$  e  $\{u, I_{n+1}\}$  lo sono, perché generate da quantità conservate di entrambe le strutture di Poisson. Ma, ancora per la corrispondenza tra

simmetrie e quantità conservate, potremmo trovare un certo funzionale conservato, diciamo  $H_2$ , tale che

$$\{F, I_1\}_{\mathcal{E}} = \{F, H_2\} \text{ per ogni } F$$

cioè la simmetria generata da  $I_1$  rispetto a  $\mathcal{E}$  si esprime come una simmetria rispetto alla prima struttura di Poisson. Questo tipo di argomento si può iterare per produrre una successione di nuove simmetrie e di nuove costanti del moto. Infatti si può far vedere che  $H_2 \equiv I_2$  della nostra notazione precedente e così via, ritrovando gli integrali del moto di KdV. Garantendo in maniera appropriata l'esistenza degli inversi degli operatori coinvolti, sulla base dell'argomento precedente e assumendo delle convenienti condizioni di compatibilità tra le strutture di Poisson  $\partial_x$  e  $\mathcal{E}$ , verificate nel caso di KdV, si può definire il cosiddetto *operatore di ricorrenza*

$$R = \mathcal{E} (\partial_x)^{-1}.$$

Così quanto detto sopra si sintetizza nell'espressione  $\partial_x \frac{\delta I_1}{\delta u(x)} = R \left( \partial_x \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} \right)$  e iterando

$$\partial_x \frac{\delta I_n}{\delta u(x)} = R^n \left( \partial_x \frac{\delta I_0}{\delta u(x)} \right), \quad n = 0, \dots, \infty.$$

In tal modo possiamo costruire ricorsivamente l'intera *gerarchia di flussi in commutazione* del sistema integrabile considerato, nonché le quantità conservate.

Per la KdV l'operatore di ricorrenza è

$$R = -\partial_x^2 + 4u + 2u_x \partial_x^{-1}. \quad (14)$$

Poiché  $R$  trasforma simmetrie di una equazione di evoluzione in altre simmetrie, il concetto è discusso da questo punto di vista nell'articolo di Levi in questo numero.

Infine è da sottolineare che il metodo IST non solo ci consente di trovare le costanti del moto, ma le loro variabili canonicamente coniugate sono i dati spettrali, che evolvono linearmente.

In conclusione, se un sistema possiede una coppia di Lax, allora la risoluzione del problema spettrale (ovvero IST) fornisce l'opportuna trasformazione canonica nelle variabili angolo-azione.

## Problemi ... Spettrali

Lavorando sullo schema di integrazione esposto nel paragrafo sulla Trasformata Integrante e con quanto si vedrà nel paragrafo successivo, il metodo fu rapidamente generalizzato e applicato a numerosi problemi [22, 23] e [24]. Questi autori hanno sviluppato una procedura, che permetterebbe di risolvere il problema ai valore iniziale per una classe notevolmente più ampia di equazioni di evoluzione. A causa della rassomiglianza con il metodo della Trasformata di Fourier applicabile alle equazioni di evoluzione lineari, per la tecnica sviluppata da questi autori si adottò il termine di Trasformazione Spettrale Inversa (IST).

Il punto cruciale consiste in una riformulazione dell'equazione di Lax (2), che tenga sullo stesso piano variabili di tipo diverso. Per analogia con il sistema (4), si potrebbero immaginare due operatori lineari  $\mathbf{F}[u; k]$  e  $\mathbf{G}[u; k]$  dipendenti da  $u$  e dalle sue derivate in  $x$  fino ad un ordine finito, che definiscono nello spazio delle  $\Phi(x, t; k) \in \mathbb{C}^n$  il seguente problema lineare

$$\begin{cases} \Phi_x &= \mathbf{F}[u; k] \Phi, \\ \Phi_t &= \mathbf{G}[u; k] \Phi. \end{cases} \quad (15)$$

Richiedendo che il sistema (15) sia compatibile, cioè che  $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ , allora gli operatori introdotti debbono soddisfare la condizione

$$\mathbf{F}_t - \mathbf{G}_x = [\mathbf{F}, \mathbf{G}]. \quad (16)$$

Questa è analoga all'equazione di Lax, ma è un po' più generale, in quanto ammette una dipendenza esplicita dall'autovalore  $k$ .

Per limitarci al caso che conosciamo già, la KdV si recupera ponendo

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -ik & u \\ -1 & ik \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \quad (17)$$

con

$$\begin{aligned} A &= -4ik^3 + 2iku - u_x, \\ B &= 4k^2 u + 2ik u_x - (2u^2 + u_{xx}), \\ C &= -4k^2 + 2u. \end{aligned} \quad (18)$$

È chiaro a tutti che questo modello può essere enormemente allargato. Meno ovvio è che il

problema spettrale

$$\Phi_x = \mathbf{F}[u; k] \Phi$$

si può trattare con metodi molto simili a quelli adottati per il Problema di Schrödinger visto poco sopra. Conseguentemente, se la compatibilità (16) produce delle equazioni per  $u$ , allora queste si possono sicuramente integrare. Si osservi a questo punto il capovolgimento della prospettiva: dato un problema spettrale sensato, allora possiamo costruire infinite equazioni integrabili !!!

Adottando questo punto di vista, il sistema sovradeterminato (15) si può considerare come la compatibilità di due operatori di derivazione

$$\mathcal{D}_x = \partial_x - \mathbf{F}[u; k], \quad \mathcal{D}_t = \partial_t - \mathbf{G}[u; k], \quad (19)$$

che hanno proprio la forma di due derivate covarianti con connessione  $A = \mathbf{F}[u; k] dx + \mathbf{G}[u; k] dt$ , che i fisici chiamerebbero invece *campo di gauge* [25]. La compatibilità ovviamente si scrive come

$$[\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_t] = 0. \quad (20)$$

Ma essa coincide con l'equazione (16), che con la definizione della matrice di curvatura  $\Omega$  della connessione  $A$  diventa

$$dA + A \wedge A = \Omega = 0. \quad (21)$$

Quindi l'integrabilità per i geometri altro non è che una *condizione di curvatura nulla* per una certa connessione, dipendente da un campo  $u!!!$

In altri termini, se si trasporta parallelamente un vettore  $\Phi(x, t; k)$  (elemento dello spazio *fibra*) lungo un qualunque cammino chiuso nel piano  $(x, t)$ , sul quale sia definita la connessione  $A$ , il vettore trasportato coincide con quello di partenza.

Questa è una nuova interpretazione dei sistemi integrabili, come definenti varietà con peculiari proprietà geometriche, che possono essere utilizzate per altre considerazioni. In particolare si possono usare i metodi sviluppati per le varietà fibrate per costruire o indagare nuove equazioni integrabili. Questi metodi furono pionieristicamente avviati da Estabrook e Whalquist [26], consentendo di determinare per via puramente algebrica il carattere di integrabilità di varie PDE.

Quali tra queste equazioni siano poi interessanti resta da vedere. Molti esempi erano già di grande importanza nelle applicazioni della Fisica Matematica, ma fino ad allora erano stati trattati, ad eccezione di soluzioni particolari, nel tradizionale alveo dei metodi perturbativi [18]. Invece se IST si può applicare ad un certo sistema evolutivo, allora si è in grado di calcolare la sua soluzione generale a tutti i tempi, per dati iniziali sufficientemente regolari e con opportuno comportamento all'infinito spaziale.

Sarebbe uno sforzo titanico fornire anche solo un elenco di riferimenti bibliografici di base. Pertanto menzioneremo semplicemente alcuni tra i numerosi manuali disponibili su questo argomento. Un esempio è dato dal classico testo di Faddeev e Takhtajan [27], ma anche [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41]

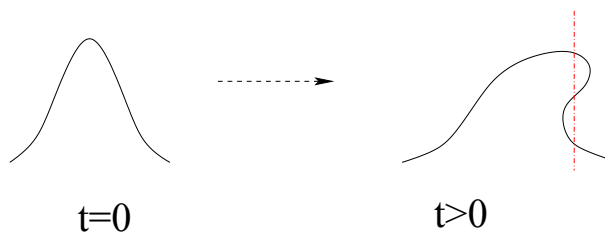
## Solitoni

Una importante ricaduta concettuale dovuta alla scoperta di IST riguarda la definizione univoca del concetto di *solitone*, almeno limitatamente ai sistemi uni-dimensionali. Questo concetto ha avuto una grande fortuna (cercando *soliton* su Google si hanno circa 1.860.000 risultati), forse anche al di là di quanto supposto da Zabusky e Kruskal, perciò a volte può divenire abusato. Senza entrare per ora in dettagli, a livello fenomenologico basti dire che un certo sistema possiede un solitone, se questo è una sua perturbazione localizzata con comportamento *quasi-particellare*, la cui dinamica non può essere rappresentata correttamente da nessuna sovrapposizione di onde lineari.

In effetti le interazioni non-lineari trasferiscono energia tra i modi normali armonici e questo, di solito, conduce a delle singolarità. Il caso emblematico è fornito dalla semplice equazione di Riemann-Hopf

$$u_t - 6u u_x = 0, \quad (22)$$

che come si vede contiene i primi due termini di (1). Tramite il cosiddetto metodo delle caratteristiche [18] è quasi immediato trovare la sua soluzione generale in forma implicita per il dato



**Figura 15:** Sviluppo di un'onda di shock (onda d'urto) a partire da un dato iniziale regolare.

iniziale  $u(x, t_0) = u_0(x)$ , scrivendo

$$u(x, t) = u_0(\xi), \quad \xi = x + 6u(\xi)t. \quad (23)$$

Infatti, derivando  $\xi(x, t)$  rispetto alle variabili indipendenti, ci si accorge che tali derivate divergono a certi tempi  $t^* < +\infty$  per un generico profilo iniziale  $u_0$ . Il più piccolo di questi  $t^*$  definisce quando la funzione  $u$  diventa polidroma e quindi il modello cessa di essere valido, almeno nella forma così presentata.

D'altra parte in una equazione puramente dispersiva, come ad esempio in

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad (24)$$

un pacchetto d'onde iniziale si allarga azzerandosi, per il semplice motivo che la legge di dispersione  $\omega = k^3$  non è lineare.

Tuttavia in presenza entrambi gli effetti, non linearità e dispersione, il pacchetto potrebbe auto sostenersi. Ma non basta: si è richiesto che l'interazione del solitone con suoi simili debba essere quasi-particellare. Nel senso che in un processo d'urto tra due o più solitoni, dopo un'intensa e complessa interazione, asintoticamente nel tempo si ripristinino le forme d'onda iniziali, con l'unico eventuale effetto di aver sfasato le posizioni relative.

Chiaramente una fenomenologia di questo tipo deve richiedere delle quantità che tengono memoria del dato iniziale, cioè appunto di leggi di conservazione ben più rigide, e numerose, delle sole conservazioni della quantità di moto e dell'energia (volendo trattare solo casi non dissipativi).

Infine, l'interazione del solitone con onde di piccola ampiezza (queste descrivibili anche nel limite lineare) deve essere trascurabile in prima approssimazione. Quindi deve esistere una op-

portuna combinazione numerica tra ampiezze delle onde, loro dimensioni lineari e velocità, che al di sopra di un valore critico decreta incoerente l'usare i metodi perturbativi: da essi non è possibile ricavare informazioni fisiche sensate.

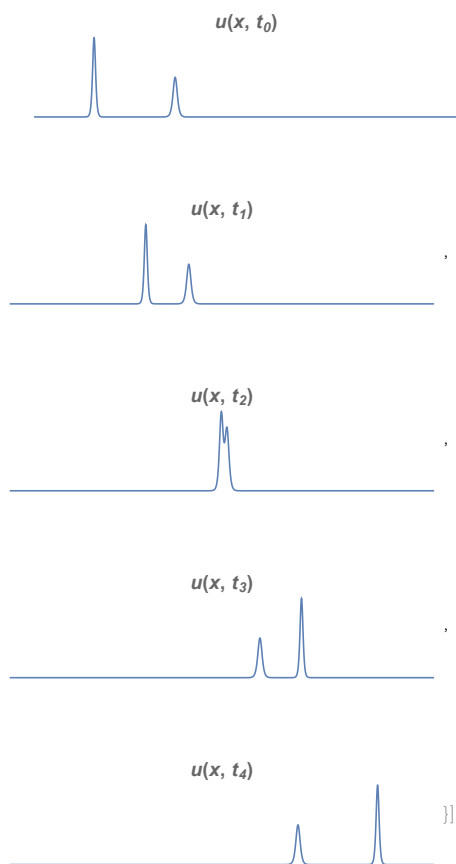
Tutto questo è una conseguenza diretta dell'esistenza di un numero sufficientemente elevato di leggi di conservazione, che regolano la dinamica dei sistemi integrabili. In particolare gli autovalori dello spettro discreto del problema lineare associato debbono manifestare la loro presenza fissando alcune delle caratteristiche salienti delle soluzioni prototipo: i solitoni.

L'idea di far corrispondere i solitoni alle leggi di conservazione di un certo sistema dinamico è corretta, ma bisogna usare una certa cautela. Infatti possono esistere dei modelli con qualche caratteristica quasi-particellare anche in ambiti non integrabili.

Il caso eclatante è costituito dai *solitoni topologici*, i quali sono soluzioni di energia finita di equazioni differenziali non lineari (anche in più dimensioni spaziali), dove il numero di particelle è legato ad una quantità conservata né locale né dinamica, ma *topologica*. Questo significa che la *carica topologica* dipende esclusivamente dalle condizioni al bordo le quali, per l'appunto, non contengono dettagli evolutivi del modello. Essi hanno applicazioni in una serie di settori della fisica delle particelle, della fisica della materia condensata, della fisica nucleare e della cosmologia [42, 43]. Inoltre essi hanno numerose applicazioni tecnologiche, per esempio nei sistemi magnetici si utilizzano nella memorizzazione dei dati. Ma in generale il sistema matematico che li contiene non è integrabile, perché l'interazione tra più solitoni può non essere elastica: si possono avere fusioni e frammentazioni, anche se la carica topologica rimane comunque costante. D'altro canto carica topologica e integrabilità possono coesistere tranquillamente e ne vedremo un caso.

## Famose Equazioni !

Al pari delle celeberrime equazioni differenziali lineari della Fisica Matematica classica quali quelle di Laplace, di d'Alembert e del Calore, nel panorama dei matematici e nella scatola degli attrezzi dei fisici comparvero rapidamente nuove

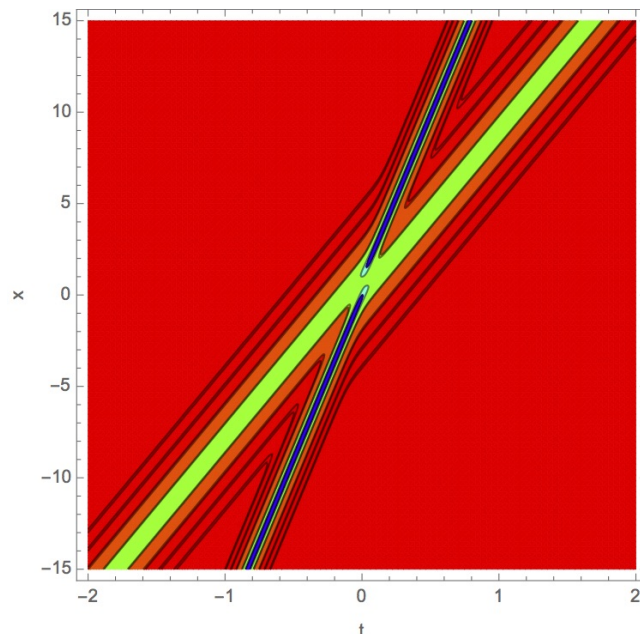


**Figura 16:** Soluzione a due solitoni di KdV nella successione temporale  $t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ : il più alto è anche il più veloce. Quindi pur partendo arretrato, raggiunge il più basso e lento e lo supera, mantenendo ciascuno la propria forma asintotica. L'unico effetto dell'interazione si manifesta nella diversa fase relativamente al moto indisturbato. Questo si può osservare facilmente in figura dall'allineamento delle creste nella direzione temporale su rette parallele, ma non coincidenti tra prima e dopo l'interazione.

(e vecchie) equazioni, delle quali si poteva ora calcolare analiticamente la soluzione generale, sotto condizioni iniziali e al bordo entro certe ben definite classi. Ecco alcuni esempi molto noti.

### Korteweg - de Vries & Co.: cavalcare l'onda

Ovviamente il primo esempio è costituito dalla KdV (1), della quale si è già detto che sia stata derivata in relazione al moto di onde di superficie in liquidi quasi-unidimensionali non viscosi

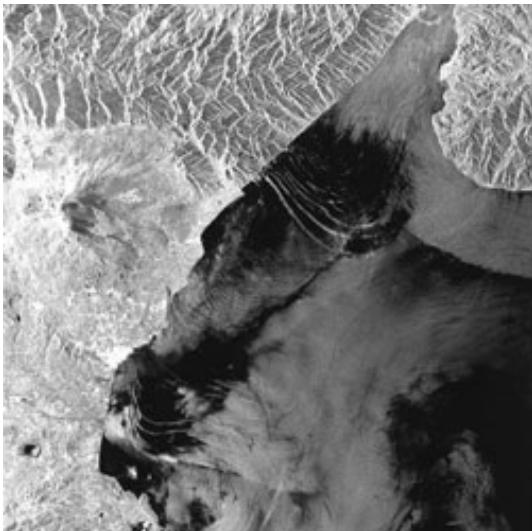


**Figura 17:** La stessa soluzione a due solitoni di KdV della figura precedente, ma rappresentata nel piano  $(x, t)$  con linee di livello. La codifica dei colori dal rosso al blu corrisponde a valori crescenti da 0 fino al massimo del solitone più alto. E' evidente che questo solitone è anche più stretto, mentre l'altro, più basso con la traccia dominata dal verde, ha una base più larga. I moti dei solitoni sono pressoché uniformi, finché non interagiscono violentemente fondendosi in un unico oggetto, che poi si separerà nelle componenti originarie. Lo sfasamento subito dai solitoni durante l'interazione è chiaramente visibile, in quanto le rispettive tracce sono parallele, ma non collineari, a quelle assunte prima della collisione. Questo equivale ad una accelerazione subita dal solitone più alto durante l'interazione, corrispondente ad una decelerazione per quello più basso.

poco profondi. L'espressione *poco profondo* significa che la lunghezza d'onda tipica è almeno 20 volte più grande della profondità. Proprio in questo limite fu ricavata [16, 17, 18] a partire dalle equazioni di Eulero per un fluido non viscoso, sottoposto solo all'azione della forza peso, condizionato da un fondale piano e limitatamente a propagazioni ondose in una sola specifica direzione.

Se in un canale di acqua un oggetto (una imbarcazione) si muove in superficie ad una velocità superiore a quella di propagazione libera, cioè

$$v \geq \sqrt{\text{accelerazione di gravità} \times \text{profondità}},$$



**Figura 18:** In questa immagine del satellite SAR ERS-1 sono visibili tre pacchetti di onde solitarie interne, che generate nello Stretto di Messina si propagano verso sud, in corrispondenza di tre successivi cicli di marea semi-diurni. Le maree a nord e a sud dello Stretto sono circa in opposizione di fase, dando luogo al flusso. Inoltre le acque provenienti dal versante tirrenico sono superficiali e più calde, mentre sono più fredde e salate nel quello levantino. I due liquidi sono quindi ben distinti e sono separati da uno spessore di circa 150 m. In tale strato si propagano delle onde interne, che nella regione di minima profondità e per le costrizioni topografiche possono superare i 3 m/sec. I pacchetti d'onda sono approssimativamente descritti dalla KdV. Si può notare che il pacchetto più a nord si scomporrà in singoli solitoni, che si distanziano progressivamente con il procedere verso sud. (Foto tratta da earth.esa)

siamo nelle condizioni di acqua poco profonda. Se il corpo si fermasse bruscamente, esso realizzerebbe le condizioni iniziali per la generazione di un'onda solitaria. L'energia ceduta al liquido non avrebbe abbastanza tempo per redistribuirsi nel fluido e gli effetti non lineari inizierebbero a farsi sentire.

Con una grande approssimazione la KdV descrive l'onda di tsunami [44] (per un dettagliato confronto tra dati osservativi e simulazioni numeriche si veda <https://websites.pmc.ucsc.edu/~ward/>), in quanto è coinvolta l'intera colonna d'acqua sovrastante la zona di subsidenza del fondo marino, purché la lunghezza d'onda tipica non

sia inferiore alla distanza dalla costa. In tal caso saremmo ancora nelle condizioni di acqua bassa.

Le semplici soluzioni di tipo *onda solitaria*

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - x_0) \right] \quad (25)$$

erano adeguate a interpretare le osservazioni di Scott-Russell nell'Union Canal [15].

Ma l'equazione è stata riesumata dall'oblio nel lavoro di Kruskal e Zabusky [19], che già dal titolo evoca la fisica dei plasmi e delle onde in essi propagantesi. Nella soluzione (25) è chiaro l'andamento a campana esponenzialmente localizzata attorno a  $x_0 + ct$ . Ma ancora più evidente è che la sua ampiezza è proporzionale alla velocità  $c$ , mentre la sua larghezza dipende dall'inverso di  $\sqrt{c}$ . Quindi l'onda dipende da un solo parametro caratteristico. Una situazione che non può verificarsi per le equazioni lineari, dove sicuramente ampiezza e velocità non sono correlate. Si tratta dunque di un fenomeno non perturbativo dovuto alla non linearità dell'equazione.

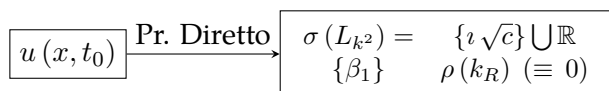
Tuttavia, ben pochi avrebbero scommesso non solo di trovare una soluzione esatta che descrivesse la collisione di due siffatte onde, ma addirittura che esse non si distruggessero a vicenda. Averlo scoperto è stata la felice sintesi di esperimenti numerici e considerazioni analitiche avviate da Zabusky e Kruskal.

### Problema Diretto ed Inverso: IST

In particolare, alla luce dell'interpretazione di Lax del problema associato di Schrödinger, è naturale chiedersi quali siano le caratteristiche spettrali che corrispondono al solitone (25). Per ottenerle si deve studiare l'equazione di Schrödinger con il potenziale a campana rovesciata (quindi attrattivo) (25), che nella letteratura dei fisici era già noto come potenziale di Eckaus. Fissando il tempo ad un certo valore, per esempio  $t_0$ , questo potenziale ha un solo autovalore dello spettro discreto:  $k_1 = \iota\sqrt{c}$  (se si preferisce  $\lambda = -c$ ). Ad esso corrisponde una autofunzione a quadrato sommabile, che si può dimostrare avere il comportamento asintotico  $\exp[\sqrt{c}x]$  per  $x \rightarrow -\infty$ , mentre  $\beta_1 \exp[-\sqrt{c}x]$  per  $x \rightarrow +\infty$ , dove  $\beta_1$  si calcola dal residuo dell'ampiezza di riflessione  $\rho(k)$  in  $k_1$ . Infine lo spettro continuo è  $\Re k = k_R \in \mathbb{R}$ , ma  $\rho(k_R) \equiv 0$ .

Con questo abbiamo risolto quello che in gergo si chiama *Problema diretto*, schematizzato nel seguente diagramma, nel quale all'assegnato dato iniziale, facciamo corrispondere i cosiddetti *dati spettrali*.

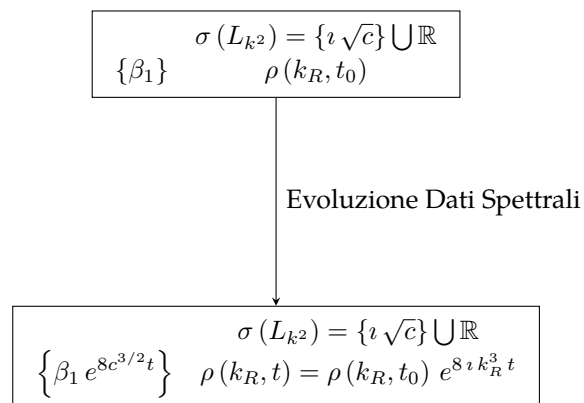
Per la soluzione ((25)) si ha il diagramma



A questo punto ci possiamo chiedere quali siano i cambiamenti indotti su questi dati dall'evoluzione temporale. Nel caso della soluzione (25) si ha una risposta ovvia, in quanto  $t$  cambia la posizione del solitone, che non può implicare altro che introdurre un fattore di fase nelle funzioni d'onda e nell'ampiezza di diffusione la quale a sua volta, chiaramente, non può far altro che rimanere nulla. Ma questo non è vero per il coefficiente di normalizzazione, che diventa  $\beta = \beta_1 e^{8c^3/2 t}$ .

In effetti, quest'ultimo risultato si può ricavare anche dal problema ausiliario (4), quando si studia il comportamento delle funzioni d'onda in uno dei limiti asintotici, per esempio ad  $x \rightarrow -\infty$ . In maniera del tutto analoga, sempre usando il problema ausiliario, si può dimostrare che in generale anche l'ampiezza di riflessione evolve secondo una equazione lineare, la cui soluzione porta a  $\rho(k, t) = \rho(k, t_0) e^{8\iota k^3 t}$ .

È degno di rilievo notare che i dati spettrali evolvano linearmente, conseguenza diretta della formulazione della KdV in termini di una coppia di Lax. Specificamente grazie all'uso dell'equazione (4) di evoluzione per le funzioni d'onda. Tale risultato vale per tutte le equazioni non lineari che posseggono una formulazione alla Lax e fornisce la procedura cruciale: siccome l'operatore  $M$  (vedi (4)), o  $G$  in (17), è lineare e si calcolano facilmente i suoi valori asintotici in termini di quelli di  $u$ , l'evoluzione temporale dei dati spettrali è sempre lineare a coefficienti costanti. Possiamo quindi subito calcolare la dipendenza temporale dei dati spettrali. Questo è riassunto nel seguente diagramma



Ora però vorremmo usare questa informazione per ricostruire il potenziale ad un tempo successivo, o precedente, a quello iniziale. Anzi vorremmo farlo anche nel caso avessimo più autovalori dello spettro discreto  $k_1^2 < k_2^2 < \dots < k_N^2 < 0$ , con le corrispondenti costanti di normalizzazione  $\{\beta_1 e^{8\iota k_1^3 t}, \beta_2 e^{8\iota k_2^3 t}, \dots, \beta_N e^{8\iota k_N^3 t}\}$  e ampiezza di riflessione nulla per  $k \in \mathbb{R}$ .

Un problema di questo tipo si chiama *Problema Inverso*, semplicemente perché vogliamo rovesciare il verso della freccia nel diagramma del Problema Diretto, il quale consiste nel risolvere una equazione di Schrödinger, che è un problema lineare. Quindi il suo inverso deve essere ancora un problema lineare. Ad esso si possono dare varie forme, ma per KdV è conveniente esprimerlo come l'equazione integrale di *Gelfand - Levitan - Marchenko* (GLM) [45, 46]. Essa fu introdotta esattamente per ricostruire il potenziale presente nell'equazione di Schrödinger (in una dimensione spaziale) da assegnati dati spettrali, eventualmente provenienti da osservazioni sperimentali. La procedura della Trasformata Inversa consiste nei seguenti passi:

1. si costruisce la funzione

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) e^{\iota k_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(k, t) e^{\iota k x} dk,$$

2. si cercano le soluzioni  $K(x, y, t)$  dell'equazione integrale lineare GLM

$$K(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t) F(z + y, t) dz = 0,$$



3. si scrive il potenziale dell'equazione di Schrödinger nella forma

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t). \quad (26)$$

Dal punto di vista dello studio della KdV la funzione  $u(x, t)$  ottenuta in (26), risolvendo la GLM, è la sua soluzione corrispondente ai dati spettrali, a loro volta evoluti a partire da quelli corrispondenti al profilo iniziale  $u(x, t_0)$ .

$$u(x, t) \xleftarrow{\text{Pr. Inverso}} \begin{cases} \sigma(L_{k^2}) = \{i\sqrt{c}\} \cup \mathbb{R} \\ \{\beta_1 e^{8c^{3/2}t}\} \\ \rho(k_R, t_0) e^{8i k_R^3 t} \end{cases}$$

In conclusione, la procedura:

*Problema Diretto* → *Evoluzione dei Dati Spettrali*  
→ *Problema Inverso*

ci consente di risolvere esplicitamente la KdV con dato iniziale generico (entro una certa classe)

$$u(x, t_0) \rightarrow u(x, t),$$

operazione improba per via diretta.

In particolare, il problema precedentemente proposto di trovare la soluzione corrispondente ad un certo numero finito  $N$  di autovalori discreti ed ampiezza di riflessione nulla ha, grazie alla GLM, una formulazione semplice:

$$u_N(x, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det A(\tau_1, \dots, \tau_N), \quad (27)$$

$$\tau_i = -i(k_i x - 4k_i^3 t),$$

dove  $A$  è una matrice  $N \times N$  con componenti

$$A_{mn} = \delta_{mn} + i\beta_m \frac{e^{-(\tau_m + \tau_n)}}{k_m + k_n}.$$

In primo luogo questa formula è interpretabile come relazione di *sovrapposizione non lineare* tra solitoni: qualcosa che non si immaginava potesse esistere in precedenza, se non in senso approssimato. In effetti è difficile riconoscere due solitoni della forma (25) nell'espressione

$$u = -12 \frac{3 + 4 \cosh(2x) + \cosh(4x)}{[3 \cosh(x) + \cosh(3x)]^2}$$

corrispondente ad una scelta dei parametri  $k_1 = i, k_2 = 2i, \beta_1 = 1, \beta_2 = 2$  e a  $t = 0$ .

Questo aspetto è messo ben in luce studiando i limiti asintotici, ponendosi in sistemi di riferi-

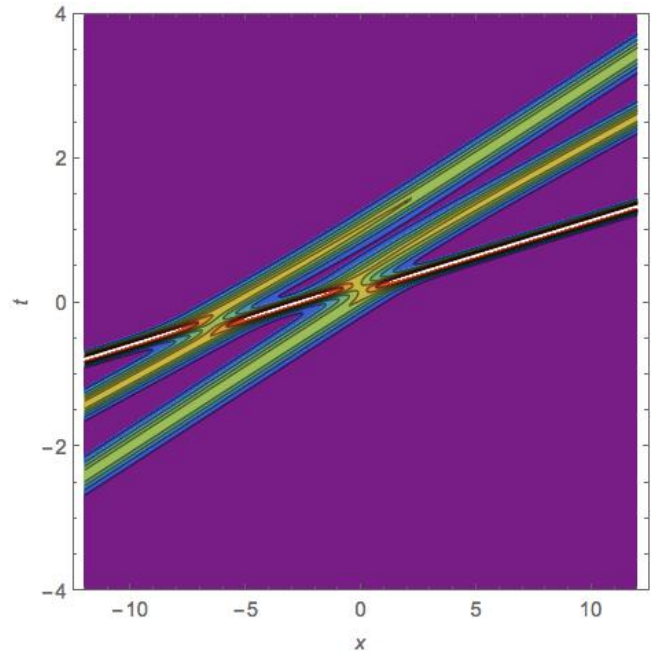


Figura 19: Interazione di 3 solitoni di KdV

mento che si muovono a velocità  $v_i = 4k_i^2$ . Si scopre che per  $x \rightarrow \pm\infty$  la soluzione tende al solitone caratterizzato dall'autovalore  $k_i$  a meno di un fattore di fase. Questo sfasamento è della forma  $-\log \prod_{j \neq i}^N \frac{k_j - k_i}{k_j + k_i}$ . Quindi tutti i solitoni interagiscono tra di loro, dando luogo a fenomeni come quello illustrato nelle Figure 16, 17 e 19.

In seguito la formula (27) è stata lo spunto per sviluppare molta della geometria e dell'algebra combinatoria connessa ai sistemi integrabili (a questo proposito si veda l'articolo di Y. Kodama nel presente numero). Inoltre ha ispirato numerose analoghe formulazioni per altri sistemi non lineari integrabili e vari metodi connessi alla ricerca di soluzioni particolari (si vedano i manuali menzionati in relazione al *metodo di Hirota*, le *funzioni Grassmanniane di Sato*, la funzione  $\tau$ , la *trasformazione di Darboux*, le *trasformazioni di Bäcklund*, il metodo del  *dressing*).

Infine merita ricordare che l'equazione di KdV ammette anche soluzioni periodiche, delle quali la (25) è un limite particolare, esprimibili in termini di funzioni ellittiche e determinate da Korteweg e de Vries [17]. Esse sono le ben note *onde cnoidali*, la cui espressione è data da

$$u = u_0 + H \operatorname{cn}^2 \left( \frac{x - ct}{\Delta} | m \right), \quad (28)$$

dove  $\operatorname{cn}$  indica la specifica funzione ellittica di

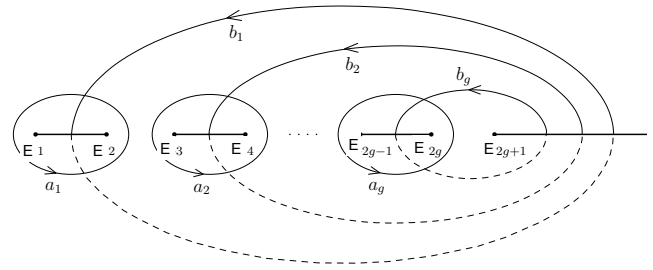
Jacobi di modulo  $0 \leq m \leq 1$ ,  $H$  l'ampiezza dell'onda. Questi due parametri fissano la velocità  $c$ , il livello di riferimento  $u_0$  e la scala  $\Delta$ . Quindi anche nel caso periodico siamo ben lontani dalle soluzioni dell'equazione delle onde, nelle quali la velocità è indipendente dalla lunghezza d'onda e dalla sua ampiezza. Né, infine, tali onde si possono semplicemente sommare per dar luogo a delle nuove soluzioni.

Sulla falsariga delle onde a rapida convergenza a 0, una teoria per questo tipo di soluzioni doveva essere associata alla risoluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria con potenziali periodici. In generale, lo spettro corrispondente contiene un numero infinito di intervalli chiusi disgiunti. Ad esempio questo è il caso del modello Krönig-Penny con potenziale periodico rettangolare, ben noto alla comunità dei fisici dello stato solido. Tuttavia, usando l'approccio del problema inverso, Akhiezer [47] aveva dimostrato l'esistenza di una classe di operatori di Schrödinger con uno spettro assolutamente continuo costituito da un numero finito di intervalli (gap) separati. Più precisamente, Akhiezer riuscì a ridurre la ricostruzione del potenziale alla soluzione del problema di Jacobi sull'inversione degli integrali abeliani su una superficie iperellittica di Riemann, i cui punti di diramazione coincidono con i confini degli intervalli nello spettro [48]. Akhiezer ha presentato il risultato nel caso di un solo gap, corrispondente al più semplice potenziale di Lamé ellittico, cioè alle onde cnoidali. Tuttavia soluzioni periodiche più generali, associate a spettri *finite gap*, furono ben presto determinate usando metodi strettamente legati a IST [49, 50]. Una formula esplicita, corrispondente a spettri con  $g$  gap nello spettro dell'operatore di Schrödinger, per soluzioni periodiche di KdV è data da

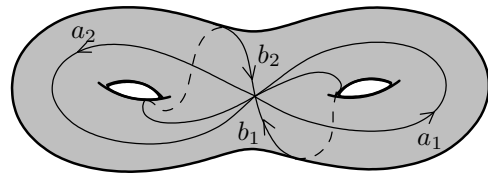
$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \log \Theta(x \mathbf{p} + t \mathbf{v} + \mathbf{l}) + 2C - 2 \sum_{k=1}^g \oint_{a_k} \lambda dU_k, \quad (29)$$

dove  $\Theta$  indica la generalizzazione  $g$ -dimensionale della funzione  $\theta$  di Riemann, definita dalla formula

$$\Theta(\mathbf{h}|\mathbf{B}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^g} \exp[\pi i B \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 2\pi i \mathbf{h} \cdot \mathbf{k}].$$



**Figura 20:** Base di cicli di una curva iperellittica rappresentata nel piano complesso. Sono rappresentati i  $g$  tagli  $[E_k, E_{k+1}]$  circondati dai cicli  $a_k$  e attraversati dai cicli  $b_k$ . Sui cicli  $a_k$  e  $b_k$  vengono integrati i differenziali abeliani  $dU_i$ , che intervengono nella ricerca di soluzioni con numero finito  $g$  di gap



**Figura 21:** Le curve iperellittiche definiscono delle superfici di Riemann compatte, che sono omeomorfe a una sfera con maniglie. Il numero  $g \in \mathbb{N}$  di maniglie è chiamato genere della superficie. Due varietà con diverso genere non sono omeomorfe.

La matrice  $(g \times g)$   $B$  è simmetrica, a parte immaginaria positiva, ed ha elementi  $B_{jk} = \oint_{b_k} dU_j$ , dove si sono introdotti i differenziali abeliani normalizzati con opportune costanti  $C_{ji}$

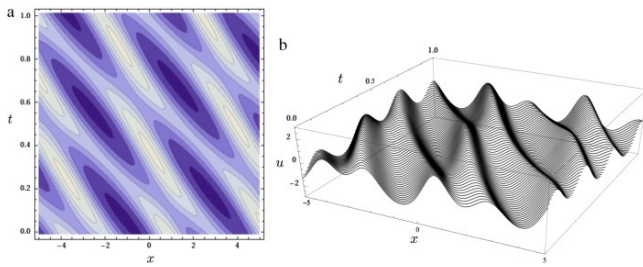
$$dU_j = \frac{\sum_{i=1}^g C_{ji} \lambda^{g-i}}{\sqrt{\prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - E_j)}}.$$

Il polinomio a denominatore nell'espressione dei differenziali definisce la curva iperellittica di genere  $g$

$$\Gamma = \left\{ (w, \lambda) : w^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (\lambda - E_j) \right\},$$

avente i punti di diramazione  $E_j$ ,  $g$  tagli lungo gli intervalli  $[E_1, E_2], \dots, [E_{2g+1}, \infty]$  e una base di cicli canonici  $a_j$  e  $b_j$ , sui quali  $\oint_{a_j} dU_k = \delta_{jk}$ .

Le altre quantità coinvolte nella formula (29) sono costanti strettamente legate alle precedenti



**Figura 22:** Soluzione della KdV del tipo a 2 gap nello spettro, per alcune scelte particolari dei parametri. La figura è tratta da [51]

e si rimanda agli articoli originali per eventuali approfondimenti.

Quindi, come nel caso dei solitoni, si era scoperto il metodo generale per sovrapporre non linearmente onde periodiche e farle interagire, producendo forme sempre più complesse.

D'altro canto, ancora una volta l'equazione di KdV si scopre al crocevia insospettato di varie branche della Matematica, collegando ora la teoria delle funzioni e delle superfici di Riemann con i sistemi integrabili, dalla geometria differenziale alla discreta, alla teoria dei grafi. Quindi questa equazione non solo ha svolto la funzione di esempio paradigmatico per i sistemi integrabili, ma è stata ampiamente utilizzata nello studio di molti fenomeni, che spaziano dalle onde interne in fluidi, alla propagazione di impulsi fononici non lineari nei cristalli, fino alla teoria delle stringhe [52].

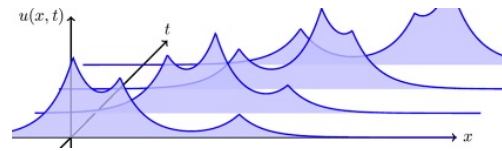
D'altra parte applicando i metodi di multiscale [54] e modificando alcune condizioni fisiche nelle procedure di riduzione delle equazioni originali, si giunge spesso ad equazioni simili, alcune delle quali completamente integrabili grazie a specifiche coppie di Lax, tra le quali l'equazione di Boussinesq [16]

$$u_{tt} - u_{xx} - (3u^2 + u_{xx})_{xx} = 0$$

e l'equazione di Camassa-Holm [53]

$$u_t + 2ku_x + 3uu_x - u_{xxt} - u u_{xxx} - 2u_x u_{xx} = 0$$

e parecchie altre analoghe, magari a più componenti e adeguate a descrivere le situazioni fisiche più disparate. A titolo di esempio e curiosità la Camassa-Holm possiede solitoni che sono cuspidali, piuttosto che a campana come quelli di



**Figura 23:** Soluzione con tre picchi dell'equazione di Camassa-Holm.

KdV, come in effetti può capitare di osservare in natura.

Tuttavia la più celebre e sorprendente di tutte è l'estensione bidimensionale di KdV, cioè la cosiddetta equazione di Kadomtsev - Petviashvili (KP) [55]

$$\partial_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + 3\sigma^2 u_{yy} = 0 \quad (30)$$

$$\sigma^2 = \pm 1.$$

Questa equazione descrive l'evoluzione di onde di superficie debolmente bidimensionali, non lineari e dispersive con tutti e tre gli effetti dello stesso ordine; la scelta del segno dipende dalla grandezza relativa della gravità rispetto alla tensione superficiale.

A tale equazione è associata una ricchissima struttura algebrica: possiede un'algebra di simmetrie puntuali di dimensione infinita di tipo Virasoro, parametrizzata da funzioni arbitrarie, possiede infinite simmetrie generalizzate che anch'esse formano algebre di tipo Kac-Moody [59], possiede infinite quantità conservate che commutano rispetto a strutture di Poisson localmente definite [60]. La teoria dei suoi solitoni è connessa alle Grassmanniane di Sato [61], come si vedrà meglio nell'articolo di Kodama. Risulta quindi uno degli oggetti matematici meglio noti in letteratura.

La KP ha una formulazione alla Lax, quindi si può pensare di applicare il metodo IST per integrarla. Ma la metodologia risolutiva differisce significativamente da quella in (1+1) - dimensioni. Il problema spettrale principale è

$$\sigma \Phi_y + \Phi_{xx} + (u + \lambda) \Phi = 0, \quad \sigma = 1, i \quad (31)$$

quindi un problema di Schrödinger di tipo non stazionario nella variabile spaziale  $y$ . Il parametro spettrale  $\lambda = k^2$  non ha più l'importanza di prima. Infatti può essere posto  $\lambda = 0$ , senza perdita di generalità. In questo caso viene

inserito un parametro complesso attraverso una *condizione al bordo* idonea per la funzione d'onda di Schrödinger. Nel caso dell'equazione di KP con  $\sigma = \iota$  (KPI) si ottiene l'abituale equazione di Schrödinger dipendente dal tempo e lo schema IST è stato sviluppato da [56, 57, 58]. Questo problema inverso è formulato in termini di un *problema ai valori al bordo di Riemann-Hilbert* non locale. Tuttavia per KP II ( $\sigma = -1$ ) le autofunzioni del problema diretto non sono in nessun punto analitiche. In questo caso è richiesta una generalizzazione del problema di Riemann-Hilbert, noto come il problema  $\bar{\partial}$  (D-BAR). L'idea del problema  $\bar{\partial}$  era già stato introdotto da Beals and Coifman [62] in modo ausiliario per l'applicazione di IST a certe equazioni in 1+1, ma tale approccio  $\bar{\partial}$  diventava essenziale. È molto significativo in quanto è stato il primo caso in cui la formulazione del problema di Riemann-Hilbert sia risultata inadeguata.

In maniera estremamente sintetica, rimandando il lettore interessato alla manualistica indicata in precedenza, la trasformazione di un problema spettrale in uno di Riemann-Hilbert proviene semplicemente dall'osservazione che alcune delle varie funzioni del parametro spettrale sono analitiche in una regione del piano complesso (ad esempio, per KdV l'ampiezza di trasmissione è analitica nel semipiano superiore), mentre altre lo sono nella regione complementare. Ma esiste una specifica relazione lineare tra di loro lungo la frontiera comune di tali regioni (ancora nel caso di KdV, tale frontiera è l'asse reale di  $k$ , dove vengono assegnati i valori dell'ampiezza di riflessione).

Ora un problema di Riemann-Hilbert per l'ap-punto consiste nell'assegnare una curva  $C$ , che divide il piano complesso in due parti distinte, e una funzione  $V(k)$  su di essa, con appropriate condizioni di regolarità. Si richiede di trovare due funzioni  $\mu_{\pm}(k)$ , ciascuna analitica in una delle due regioni individuate da  $C$ , in modo tale che esattamente sulla curva valga una relazione della forma

$$\mu_+ - \mu_- = \mu_- V,$$

più eventualmente delle condizioni asintotiche per  $\mu_{\pm}$ . Esistono vari teoremi che assicurano che un tale tipo di problema ammette soluzioni uni-

che. La costruzione esplicita di tali soluzioni è una parafrasi del problema inverso.

Tuttavia per KP II il formalismo del problema di Riemann-Hilbert era insufficiente e dovette essere superato, imponendo che in ogni punto del piano le funzioni spettrali fossero non analitiche, ma comunque linearmente dipendenti da se stesse a meno di speciali trasformazioni discrete di simmetria. Questo si esprimeva introducendo delle equazioni della forma

$$\frac{\partial \mu(k, \bar{k})}{\partial \bar{k}} = V(k, \bar{k}) \mu(k, S \bar{k})$$

avendo indicato con  $S$  una certa trasformazione lineare discreta indipendente da  $k$ .

Tali metodologie si possono applicare ai problemi in 2+1 dimensioni come KP II ma anche, per esempio, alla DSI e DSII che introdurremo nel seguito. Tali metodi consentono di trovare per la KP II nuove soluzioni, ben al di là delle semplici estensioni dei solitoni di KdV, che appaiono come una serie di onde parallele, propagantisi tutte nella stessa direzione nel piano.

Questa classe di soluzioni è genericamente instabile rispetto a deformazioni, anche piccole, per KPI. In particolare, la ricerca di soluzioni spazialmente localizzate non ha prodotto risultati, in quanto ogni dato iniziale, rapidamente convergente a 0 in tutte le direzioni del piano, si disperde rapidamente. Mentre gli oggetti stabili hanno un andamento razionale a 0, quindi lento rispetto alla localizzazione esponenziale dei solitoni di KdV.

Nell'articolo di Kodama invece si studieranno soluzioni di tipo onda a parete che si riferiscono a KP II. Esse si intersecano tra di loro, poiché viaggiano in direzioni differenti, ma non si distruggono a vicenda nell'interazione, preservando la loro struttura asintotica. Come si è detto questo dipende dalle particolari intensità delle forze in gioco e, in un certo senso, è una fortuna che andando al mare siamo abbastanza sicuri di avere a che fare con KP II e non KPI: ci perderemmo il bello degli incroci di onde.

Naturalmente il problema può essere ulteriormente generalizzato complicando la curva  $C$ , ad esempio, in modo che divida il piano complesso in più di due regioni non connesse. Questo fatto è stato ampiamente utilizzato nello studio di problemi inversi associato ad altre classi di

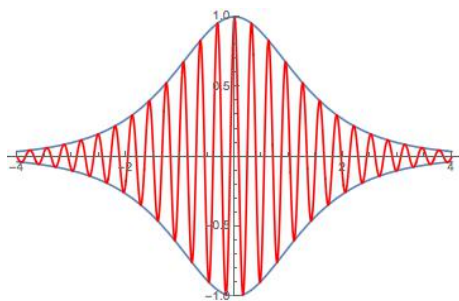
equazioni.

### L'equazione di Schrödinger non lineare: messaggeri e canaglie

Un altro celebre e paradigmatico esempio di sistema integrabile è costituito l'equazione di Schrödinger non-lineare (NLS) [22, 23]

$$i\psi_t = -\frac{1}{2}\psi_{xx} + \epsilon|\psi|^2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad (32)$$

nella quale la funzione  $\psi$  è complessa. La NLS emerge come una delle equazioni universali per la descrizione di pacchetti lentamente variabili di onde quasi monocromatiche, che si propagano in mezzi debolmente non lineari e in presenza di dispersione. Essa è una forma semplificata in



**Figura 24:** Rappresentazione schematica dell'involuppo di un pacchetto di onde quasi-monocromatiche. Il contorno blu è descritto dall'equazione NLS

(1 + 1) dimensioni dell'equazione di Ginzburg e Landau, che la introdussero negli anni '50 col loro lavoro sulla superconduttività [63]. Ma lo è anche dell'equazione di Gross-Pitaevski, derivata per descrivere oscillazioni nei condensati di Bose-Einstein [64, 65, 66].

L'equazione apparve ben presto negli studi sulle onde di gravità alla superficie di acqua profonda e non viscosa nei lavori di V.E. Zakharov [67], ma in tal contesto la NLS ha recentemente trovato nuovo impulso nella descrizione delle cosiddette *onde anomale* o, anche, *onde mostro*, *canaglia* e *rogue waves* [68]. Infatti esistono altre classi di soluzioni per l'equazione NLS oltre agli involuppi solitonici di Zakharov. Questi asintoticamente traslano a velocità ed ampiezza costanti ed interagiscono senza disperdersi in maniera analoga ai solitoni di KdV. Ma la NLS si presta a modellare fenomeni di instabilità nella modulazione dell'ampiezza. Infatti tra le soluzioni ne esistono

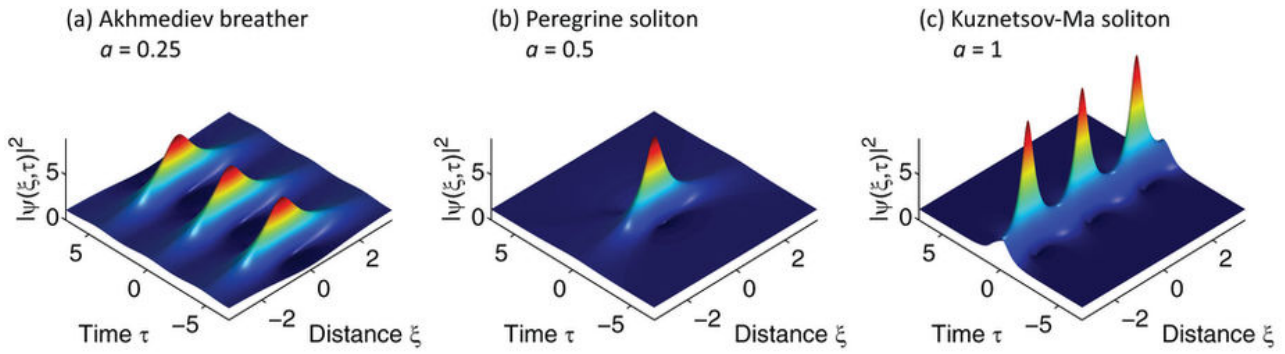
di *omocline* nel tempo, cioè a tempi grandi la soluzione ritorna ad una speciale configurazione iniziale, oppure di periodiche. Esempi di questo fenomeno sono riportati in Figura 25. In particolari valori del tempo l'energia complessiva del campo si concentra spazialmente in certe zone ristrette, provocando un accrescimento esorbitante, rispetto alla configurazione iniziale, del modulo di  $\psi$ . L'effetto può essere devastante per imbarcazioni e dispositivi di vario genere, a seconda del contesto nel quale stiamo considerando il fenomeno. Questo tipo di onda sarà dettagliatamente discussa nel lavoro di Grinevich e Santini presente in questo numero di Ithaca.



**Figura 26:** Un possibile esempio di onda anomala (canaglia o rogue)

In ottica non-lineare è stata derivata per la prima volta nel 1964 in [69], per studiare effetti di auto-intrappolamento di fasci luminosi propagantesi in un mezzo con indice di rifrazione dipendente dal campo elettrico applicato. Questo fenomeno, assieme ad altri, si riscontrano nella propagazione di intensi segnali luminosi in fibre ottiche [70, 71] per fini di telecomunicazione e nei cristalli liquidi [72], nelle onde di Langmuir nei plasmi caldi [73] e di onde radio nella ionosfera. Permette di descrivere la propagazione di eccitazioni localizzate di Davydov nelle  $\alpha$ -elicke di proteine [74, 75], che sono responsabili del trasporto di energia lungo catene molecolari.

La NLS è in stretta relazione di equivalenza con il modello ferromagnetico di Heisenberg continuo (chiamato anche equazione di



**Figura 25:** I solitoni di Akhmediev, di Peregrine e di Kuznetsov-Ma sono localizzate spazialmente ma anche nel tempo.

Landau-Lifshitz)

$$S_t = [S, S_{xx}] \quad (33)$$

dove la matrice  $(2 \times 2)$   $S \in SU(2)$  descrive una catena continua di spin nel limite semi-classico [27]. Infine, partendo dal modello quantistico di Lieb e Liniger [76] per un gas monodimensionale di bosoni interagenti a contatto, cioè con un potenziale della forma  $\delta(x_i - x_j)$ , è possibile derivare per il campo (tramite il cosiddetto *Bethe ansatz*) ancora una volta l'equazione NLS. Questo fu il primo modello quantistico a multi-corpi non lineare ad essere completamente risolto. Le corrispondenti funzioni di correlazione furono calcolate esattamente nell'ambito del cosiddetto *Quantum inverse scattering method* [77], che generalizza al contesto quantistico la IST.

La già sottolineata corrispondenza con gli spin classici, consente di far *trasmutare* il modello bosonico in uno fermionico, detto di Thirring. Tale fenomeno si verifica solo in una dimensione spaziale.

È superfluo dilungarsi sul metodo IST applicato a questa equazione, in quanto, fatte le dovute modifiche, non cambia la sostanza della procedura rispetto al caso di KdV. L'unico aspetto che merita considerazione è che si partì direttamente con lo studio di una coppia di Lax matriciale

$$L = \iota \begin{pmatrix} 1+k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} \partial_x + \begin{pmatrix} 0 & \psi^* \\ \psi & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \iota k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_x^2 + \begin{pmatrix} \frac{-\iota|\psi|^2}{1+k} & \psi_x^* \\ -\psi_x & \frac{\iota|\psi|^2}{1-k} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

che permise a Zakharov e Shabat di integrare esattamente questa equazione. Tale coppia è proprio il punto di partenza per lo studio delle on-

de anomale discusse nell'articolo di Grinevich e Santani.

Il modello definito dall'equazione di NLS in 2 dimensioni spaziali ( $o \geq 2$ ) è ben noto e rilevante in molte applicazioni di interesse fisico, ma ha un grosso difetto: non è integrabile !!! Tipicamente le sue soluzioni divergono in un tempo finito in un certo punto del piano [78].

In effetti esiste un suo analogo integrabile, che è interessante nello studio della propagazione di involucri ondosi in vari contesti, in particolare in fisica dei plasmi. Esso si chiama Davey - Stewartson [79]

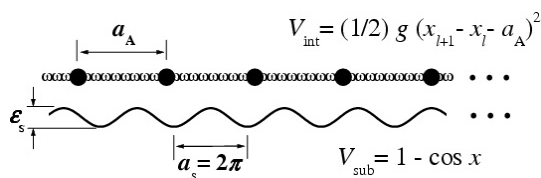
$$\begin{aligned} \psi_t + \frac{1}{2} (\psi_{xx} + \sigma^2 \psi_{yy}) + |\psi|^2 \psi &= \phi \psi, \\ \phi_{xx} - \sigma^2 \phi_{yy} &= 2 (|\psi|^2)_{xx}, \end{aligned} \quad (35)$$

dove  $\phi$  è reale e  $\sigma^2 = \pm 1$ , corrispondente alle due varianti DSI e DSII, rispettivamente.

Quindi l'ampiezza di involuppo  $\psi$  è accoppiata al campo  $\phi$ , che non segue una sua evoluzione indipendente, ma è generato dal termine di sorgente  $(|\psi|^2)_{xx}$ . I fisici direbbero che  $(\psi, \phi)$  è un campo *composito*: la particella descritta da  $\psi$  dinamicamente si completa con il campo  $\phi$  associato. In questa prospettiva emerge una analogia con la teoria degli anyoni che è stata utilizzata in vari lavori [80]. Si osservi inoltre che se il tensore di dispersione per  $\psi$  è ellittico, allora quello per  $\phi$  è iperbolico, e viceversa. Ovviamente questo fatto conduce a distinguere il caso DSI da DSII. Le due equazioni implicano dei comportamenti del tutto diversi nelle loro soluzioni, studiate con i metodi di Riemann-Hilbert e  $\bar{\partial}$ . Furono determinate soluzioni solitoniche a parete [81, 82] e, analogamente ad altre equazioni integrabili in dimensioni superiori, anche numerose altre proprietà, quali algebre di Kac-Moody di simmetrie

puntuali, riduzioni per simmetria alle equazioni di Painlevé e possesso della proprietà di Painlevé, trasformazioni di Bäcklund, infinite leggi di conservazione in commutazione, struttura Hamiltoniana e operatore di ricorrenza. Tuttavia, in analogia con il caso KP si era molto scettici sulla possibilità che esistessero soluzioni esponenzialmente localizzate nel piano. In effetti soluzioni di questo tipo furono determinate prima mediante l'uso delle trasformazioni di Bäcklund [83] e, poi, nell'ambito del problema  $\bar{\partial}$  [84, 85]. Ma ci si rese subito conto che non era possibile separare la dinamica dei due campi. Infatti, se si richiede che  $\psi \rightarrow 0$  per  $|x| \rightarrow \infty$ , il campo  $\phi$  è necessariamente non nullo, nemmeno costante e statico, nello stesso limite. In particolare, è stato chiaramente dimostrato che i solitoni di DSI sono instabili, in quanto le condizioni al bordo per  $\phi$  sono in genere dipendenti dal tempo. Esse fissano la cinematica dei solitoni, mentre la dinamica della loro reciproca interazione è determinata dalla condizione iniziale scelta per  $\psi$ . Le soluzioni possono simulare effetti di fusione e fissione, creazione e assorbimento da diffusione anelastica, ma tutto dipende dal comportamento asintotico scelto per  $\phi$  [86]. Per sottolineare questo aspetto in [85] tali soluzioni furono battezzate *dromioni*. L'interesse verso di essi si è recentemente rinnovato con gli studi su versioni con invarianza PT, nell'ambito dei modelli per le onde anomale [87]. La DSII invece ha soluzioni esatte che divergono in un tempo finito e quindi sembrano avere un ruolo nello studio delle onde anomale in fluidodinamica [88].

## Sine-Gordon: superfici e particelle



**Figura 27:** Schematizzazione del modello Frenkel-Kontorova: due tipi di forze a scale spaziali differenti sono in gioco: una forza di interazione elastica a primi vicini ed una forza comune periodica.

Altro modello molto noto è dato dall'equazio-

ne di sine-Gordon

$$u_{tt} \mp u_{xx} = \Lambda^2 \sin u, \quad (36)$$

che nella determinazione negativa costituisce un modello relativisticamente invariante, con quella positiva una equazione di tipo ellittico. Il parametro  $\Lambda$  può essere posto ad 1 senza perdere in generalità, ma avendo una interpretazione fisica e geometrica si è preferito tenerne memoria. Se si utilizzano le coordinate di cono-luce  $\zeta = t + \sqrt{\mp 1} x$  e  $\bar{\zeta} = t - \sqrt{\mp 1} x$ , l'equazione precedente si può scrivere nella forma simmetrica

$$u_{\zeta \bar{\zeta}} = \Lambda^2 \sin u,$$

che in alcune circostanze può risultare più comoda da usare.

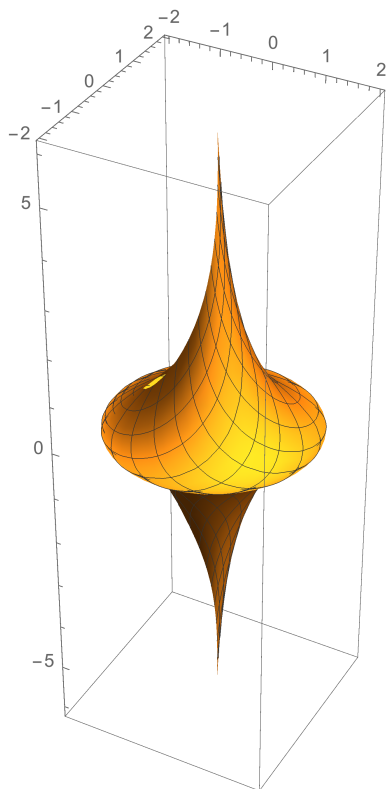
La sine-Gordon è un problema di tipo evolutivo del secondo ordine e possiede la coppia di Lax nella forma (15) (qui scritta in coordinate del cono-luce)

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -i k & -\frac{u_{\zeta}}{2\Lambda^2} \\ \frac{u_{\bar{\zeta}}}{2\Lambda^2} & i k \end{pmatrix} \\ \mathbf{G} = \frac{i}{4k} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Quindi la sua soluzione generale nel piano  $(\zeta, \bar{\zeta})$  (o  $(t, x)$ ) si può ottenere ancora una volta con il metodo IST.

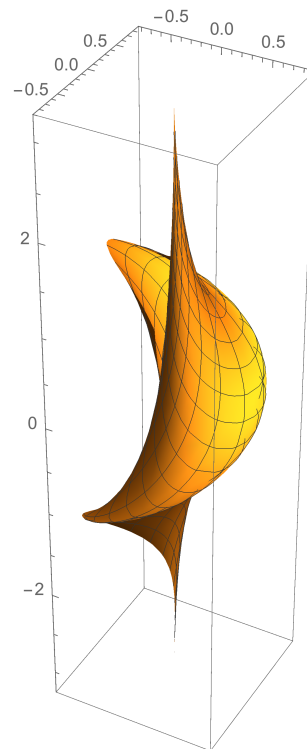
Il caso iperbolico fu originariamente introdotto da Bour [89] e da Bianchi [90] nel corso di studi riguardanti la determinazione di superfici a curvatura gaussiana negativa costante  $-\Lambda^2$ . In questo contesto il suo studio fu approfondito da Bäcklund [91], il quale scoprì le notevolissime *Trasformazioni* che portano il suo nome (BT), e da Bianchi [90], che invece dedusse il cosiddetto Teorema di Permutazione delle BT. Tali strumenti matematici consentono di ottenere vaste classi di soluzioni particolari.

L'equazione fu poi riscoperta da Frenkel e Kontorova (1939), nel loro studio delle dislocazioni di cristallo [92], e come *modello-giocattolo* nell'ambito della teoria non perturbativa dei campi quantistici [93, 94, 95]. Il modello è stato introdotto sia perché è una modifica non lineare dell'equazione di Klein-Gordon per bosoni scalari liberi (in effetti il nome dell'equazione deriva da questo accostamento concettuale). Ma è una estensione



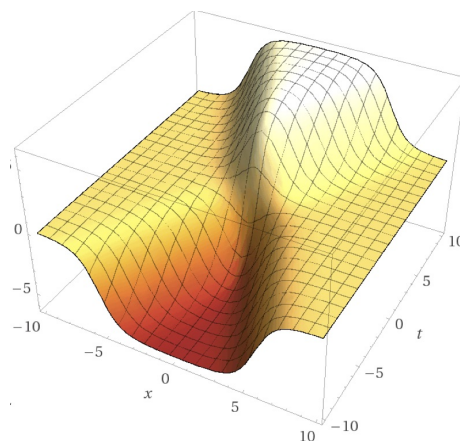
**Figura 28:** La pseudosfera è una superficie a curvatura gaussiana negativa, piuttosto che positiva come la sfera ordinaria. La pseudosfera si può costruire a partire dalla soluzione particolare (39) per un particolare  $\beta$ . Essa può essere generata semplicemente dalla rotazione della curva trattrice attorno al suo asintoto.

anche del modello non lineare più semplice, cioè  $\phi^4$ , che però non è integrabile. Quindi in questo caso si possono esplorare simultaneamente in un unico modello sia effetti di rottura spontanea di simmetria, sia soluzioni esatte estese tra due stati di vuoto, sia aspetti legati all'integrabilità. Da un punto di vista più fenomenologico la sine-Gordon è stata utilizzata per descrivere la propagazione di impulsi ultra-corti in mezzi ottici non lineari [96] e nello studio delle giunzioni Josephson nella fisica dei superconduttori [15] ed in quello dei cristalli liquidi chirali [97, 98]. Perciò il suo utilizzo come laboratorio teorico è del tutto attuale. Basti dire che per il solo 2017 nel sotto-sito arXiv/hep-th si contano 22 lavori che coinvolgono questa equazione e le sue estensioni, applicate ai più disparati settori della Fisica Teorica: dalla teoria algebrica dei campi quantistici alla propagazione di elettroni nel grafene, dalla riduzione di modelli di Skyrmlioni



**Figura 29:** La superficie di Dini è a curvatura costante negativa, connessa alla soluzione particolare di (39) per una scelta particolare di  $\beta$ .

alla teoria delle brane, alle vibrazioni in sistemi magneto-elettro-elastici.



**Figura 30:** Soluzione di sine-Gordon relativistica, nella quale è descritta la collisione di un kink con un anti-kink. Le due perturbazioni del campo  $u$  viaggiano in direzione opposta, sono dotati di energia finita e dopo la collisione riemergono con la stessa forma, ma con uno sfasamento rispetto alle loro traiettorie originarie. Quindi sono un tipo di solitoni.

In questa breve rassegna, in particolare in questo paragrafo, abbiamo spesso menzionato le



Trasformazioni di Bäcklund come uno strumento importante per studiare i sistemi integrabili. Allora sembra proprio opportuno almeno dare un'idea di come funzionino.

Si consideri il sistema di equazioni differenziali contenenti un parametro reale  $\beta$

$$\begin{cases} \left(\frac{u'-u}{2}\right)_\zeta = \beta \Lambda \sin \frac{u'+u}{2}, \\ \left(\frac{u'+u}{2}\right)_{\bar{\zeta}} = \frac{\Lambda}{\beta} \sin \frac{u'-u}{2}. \end{cases} \quad (38)$$

dove  $u'(\zeta, \bar{\zeta})$  è una nuova funzione da determinare sapendo che  $u(\zeta, \bar{\zeta})$  è una soluzione particolare della sine-Gordon. Ora è facile dimostrare, eseguendo le derivate miste e imponendole uguali tra loro, che il sistema è integrabile nel senso di Frobenius solo se  $u'$  è anch'essa una soluzione di sine-Gordon !!! Allora questo sistema può essere utilizzato per costruire nuove soluzioni a partire da una nota.

Ad esempio, consideriamo la soluzione più semplice possibile:  $u(\zeta, \bar{\zeta}) \equiv 0$ . Ovviamente il sistema (38) si semplifica parecchio e la sua integrazione è molto più semplice dell'equazione originaria. Con un po' di lavoro si ottiene la soluzione

$$u' = 4 \arctan \left[ \exp \Lambda \left( \beta \zeta + \frac{\bar{\zeta}}{\beta} + \beta_0 \right) \right], \quad (39)$$

dove  $\beta_0$  è una costante di integrazione. Assumendo  $\beta \in \mathbb{R}$ , il grafico di questa funzione è quella di un gradino smussato, o di una rampa monotonamente crescente: è quello che in gergo viene chiamato un *kink* (piega, difetto). Grazie alla forma simmetrica dell'equazione, il cambio di segno della  $\beta$  e della  $x$  porta alla soluzione a rampa decrescente, che si muove nella direzione opposta: è l'*anti-kink*.

Si possono fare alcune osservazioni sulla soluzione a kink: 1) non è possibile deformarla con continuità a quella nulla, qualunque sia il valore di  $\beta$ , 2) essa varia sempre tra 0 e  $2\pi$ , qualunque sia il valore dei parametri, 3) la variazione significativa del campo avviene nella regione della piega dell'ordine di  $\ell_{sol} \sim 1/\Lambda$ , 4) nella stessa regione si calcola una significativa densità di energia, che si annulla esponenzialmente a grandi distanze. Integrata fornisce la massa classica del kink, che vale  $M_{sol} \approx \Lambda$ .

Queste osservazioni ci portano alla conclusio-

ne che la soluzione ottenuta non descrive le particelle elementari della teoria quantistica, ma stati coerenti non perturbativi, che interpolano tra due stati di vuoto della teoria (0 e  $2\pi$  sono minimi adiacenti del potenziale di auto-interazione). Anzi, facendo uno sviluppo in serie del potenziale di auto-interazione (sine-Gordon è un onesto modello lagrangiano) e confrontandolo con Klein-Gordon si nota facilmente che  $\Lambda = \frac{m}{g}$ , dove  $m$  è la massa dei bosoni della teoria libera e  $g$  la costante di accoppiamento. Quindi queste soluzioni non svaniscono per accoppiamenti deboli e si può congetturare che sopravvivano come stati quantistici, se la loro lunghezza d'onda Compton  $\lambda_C \sim \frac{1}{M_{sol}} \ll g\ell_{sol}$ . Questa è l'idea che sta dietro a tutti i calcoli di stati non perturbativi in teoria dei campi, a prescindere se si considerino *monopoli*, *skymioni*, *istantoni* od altri -oni.

Tutto questo discende da considerazioni sulla semplice soluzione (39). La domanda che allora ci poniamo è se si possano costruire soluzioni più complesse, come quelle a 2 o N solitoni di KdV. In analogia con questo caso, è possibile risolvere problema diretto ed inverso associato a sine-Gordon (37), ma un'altra strada ce la propone di nuovo il sistema (38) delle BT. Infatti supponiamo di conoscere una soluzione *seme* (diciamo  $u_0$ ) e di essere in grado di integrare il sistema (38) per due diversi parametri  $\beta_1$  e  $\beta_2$  non necessariamente reali. Otterremo quindi due nuove soluzioni  $u_1$  e  $u_2$ , rispettivamente. Ora ripetiamo l'operazione precedente risolvendo il sistema delle BT inserendo  $u_1$  con  $\beta_2$ , oppure  $u_2$  con  $\beta_1$ . In generale dovremmo ottenere due soluzioni distinte, che indichiamo con  $u_{1,2}$  e  $u_{2,1}$ . Ma se si richiede che  $u_{1,2} \equiv u_{2,1} = U$ , combinando linearmente, con appropriati coefficienti, le equazioni (38) corrispondenti, si ottiene la seguente *formula di Permutazione di Bianchi*

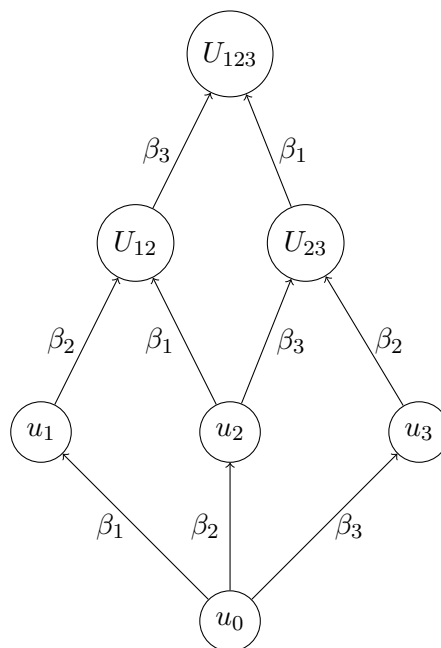
$$U = u_0 + 4 \arctan \left[ \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \tan \left( \frac{u_1 - u_2}{4} \right) \right]. \quad (40)$$

La formula di Bianchi costituisce quindi la regola di sovrapposizione per soluzioni di sine-Gordon e naturalmente la cosa più ovvia da fare è metterla alla prova con due soluzioni semplici quali un kink ed un anti-kink che collidono come in Figura 30. Se invece, poniamo  $\beta_2 = \bar{\beta}_1$ , la formula di Bianchi produce una soluzione periodica nel tempo e convergente a 0 in entrambi i versi

dell'asse  $x$ . Questa soluzione, nota con il nome di *breather* (respiro) ha la forma

$$u = 4 \arctan \left( c \frac{\sin \xi}{\cosh \eta} \right)$$

dove  $\xi$  ed  $\eta$  sono particolari combinazioni lineari di  $x, t$  con coefficienti dipendenti da  $\beta_1, \bar{\beta}_1$ .



Reticolo di Bianchi per 3-kink

Oppure si possono comporre due kink con parametri diversi. Questa soluzione varierà tra  $0$  e  $4\pi$ , collegando due vuoti della teoria che non sono più adiacenti. Naturalmente questo processo può essere iterato, portando alla costruzione di soluzioni speciali sempre più complesse, analoghe a quelle N-solitoniche di KdV e per le quali si possono scrivere formule analoghe. Così anche i kink (e anti-kink) di sine-Gordon collideranno elastiche con l'unico effetto di produrre degli sfasamenti nelle posizioni, relativamente al moto libero. Gli sfasamenti totali si potranno esprimere in termini degli sfasamenti a coppie e quindi i kink sono a tutti gli effetti solitoni. Ma con in più la proprietà di mantenere invariata durante tutto il processo dinamico il valore del salto totale, che può essere solo un multiplo intero di  $2\pi$ . Questo è un esempio di carica topologica conservata. Ovviamente non sarà sfuggito il fatto che il sistema (38) sia un sistema del primo ordine sovradeterminato, che ha come condizione di compatibilità la particolare equazione che stiamo studiando. Esattamente la stessa richiesta che si fa per il problema spettrale associato ad una equazione non lineare integrabile. Non è infatti un caso e si può dimostrare che l'esistenza di un problema spettrale lineare implica delle BT e viceversa. Si tratta di rappresentazioni diverse della stessa algebra di simmetria (generalizzata) sottostante la proprietà di integrabilità. Il volume [99] è dedicato ad un'ampia trattazione delle BT e loro estensioni.

## Modelli discreti

Senza entrare in dettagli, basti dire che il metodo IST fu applicato con grande successo allo studio dei sistemi discreti, a partire dai celebri modelli di sistemi discreti a  $N$  gradi di libertà di Calogero - Moser [100, 101] e di Toda [102], sia con estremi fissi che con condizioni al bordo periodiche, nonché le loro varianti relativistiche [103] e quantistiche [104] qualche tempo dopo. Va ricordato che la catena di Toda è l'estensione integrabile del sistema di Fermi-Pasta-Ulam, che abbiamo incontrato all'inizio del nostro percorso. Pertanto riceve tuttora grande attenzione per quanto concerne l'instaurarsi di regimi caotici nei sistemi Hamiltoniani. Menzioniamo solo il fatto che le ricorrenze osservate da FPU sono modi esatti periodici in Toda. Mentre in FPU esse si disperdono su una scala temporale che dipende dalla densità di energia per particella, con una netta transizione di fase dipendente dai parametri costitutivi [105].

I sistemi di Toda hanno una bellissima relazione con le classificazioni delle algebre di Lie semplici sia a livello classico che quantistico [106, 107] e costituiscono il punto di partenza per i cosiddetti campi di Toda, che sono sistemi alle derivate parziali di grande interesse, per esempio, nell'ambito della teoria dei sistemi statistici esattamente risolubili [108]

## Quantizzare

Appena le idee fondamentali su come trattare i sistemi non lineari classici si furono consolidati, la versione quantistica del metodo IST nelle teorie di campo venne elaborata dalla scuola di Leningrado - San Pietroburgo (si veda ad esempio [109]), avente a capo Ludwig Faddeev e, tra gli



**Figura 31:** L. D. Faddeev (1934 - 2017). Un ricordo ed omaggio dei suoi diretti allievi può essere letto al sito [Ludwig D. Faddeev](#)

altri, Korepin, Kulish, Reshetikhin, Sklyanin, Semenov Tian-Shansky e Takhtajan [110]. Essi stabilirono un approccio sistematico ai sistemi meccanici quantistici integrabili, collegandoli con la teoria dei gruppi quantici di Drinfeld e Jimbo [111, 112] e aprendo la strada alla riformulazione algebrica del problema. Questo approccio ha il potere di unificare in un unico quadro matematico teorie di campo quantistico integrabili [113] insieme a sistemi quantistici di particelle [40] e di spin sul reticolo [39].

## Perché l'integrabilità ?

In una occasione L. Faddeev ha scritto [114] :

*Ci si chiede cosa ci sia di interessante nei modelli  $1 + 1$ , quando il nostro spazio-tempo possiede  $3 + 1$  dimensioni. Esistono diverse risposte particolari a questa domanda.*

*(a) I modelli giocattolo in dimensioni  $1 + 1$  ci possono insegnare il comportamento delle teorie di campo in regime non perturbativo. In effetti fenomeni quali la rinormalizzazione, la libertà asintotica, la trasmutazione dimensionale (cioè l'emergere della*

*massa attraverso i parametri di regolarizzazione) contengono modelli integrabili e possono essere descritti esattamente.*

*(b) Esistono numerose applicazioni fisiche dei modelli dimensionali  $1 + 1$  nella fisica della materia condensata.*

*(c) Il formalismo di modelli integrabili ha mostrato diverse volte di essere utile nella moderna teoria delle stringhe, la superficie di universo delle quali è bidimensionale. In particolare, i modelli di teoria del campo conforme sono speciali limiti a massa nulla di modelli integrabili.*

*(d) La teoria dei modelli integrabili ci insegna l'esistenza di nuovi fenomeni, che non emergono da nei precedenti sviluppi della Teoria dei Campi Quantistici, specialmente in relazione allo spettro di massa.*

*(e) Non posso fare a meno di ricordare che lavorare con i modelli integrabili è un delizioso passatempo. Hanno anche dimostrato di essere uno strumento di grande successo per scopi educativi.*

*Queste ragioni mi sono state sufficienti per continuare a lavorare in questo campo negli ultimi 25 anni (compresi 10 anni di sistemi solitonici classici) e a insegnare a pochi seguaci, spesso definiti come la scuola di Leningrado-San Pietroburgo.*

## Conclusioni

Speriamo che questo contributo abbia stimolato la curiosità di numerosi lettori nell'approfondire la tematica dei sistemi integrabili e abbiano preparato il terreno per gli articoli successivi in questo numero di Ithaca.

Questo settore attrae rappresentanti di diverse comunità, con interessi che vanno dalla matematica pura alla fisica matematica e alla fisica teorica. Siamo sicuri che la nuova generazione di fisici e matematici realizzerà grandi progressi nelle direzioni menzionate. Gli strumenti sviluppati per determinare le condizioni di integrabilità di molte classi di sistemi e i loro sviluppi applicativi conseguenti sono stati fatti propri e correntemente utilizzati in molte e differenziate comunità scientifiche. Sia in ambito strettamente matematico, che in quello della fisica teorica e delle sue più svariate applicazioni. In un certo senso si è stati testimoni e partecipi di una importante stagione di conquiste concettuali. Ora bisogna ampliare la loro potenza con nuove idee. In effetti il messaggio di quanto scritto non è quello di

mostrare quante cose si riesca a fare, ma di quante si riconducono a delle strutture fondamentali, dal disordine accidentale all'ordine nascosto dietro le contingenze. L'ordine stesso può essere complesso da descrivere, ma un solo concetto sintetizza un universo. Tutti i sistemi fisici che ho descritto si possono tranquillamente simulare al calcolatore, ma quante liste di numeri potranno mai dare la stessa chiarezza e profondità di idee, che si distillano in una sola delle soluzioni esposte? Naturalmente non tutto si esaurisce in un bell'elenco di equazioni e di strumenti analitici o algebrici, sappiamo che il mondo fuori di noi è ben più complicato. Quanto vogliamo complicarcelo in aggiunta, cioè renderlo ancora meno decifrabile, dipende da noi.

D'altra parte non è molto interessante avere un campo con un unico e uniforme tipo di piantagione, o perfettamente arato e ben noto fino alla singola zolla, ma un campo che possa fiorire. Il che non avviene se non vi si diffondono semi e germogli familiari ed estranei assieme. Ognuno di essi prenderà una sua conformazione specifica per varietà, suolo, pioggia, sole e cure. E ancora più interessante sarà se compariranno ibridi ed incroci nuovi e fecondi. Così accade per le idee.



[1] I. Newton: *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, Londini (1687). <http://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00001/1>

[2] J.-L. Lagrange: *Mécanique Analytique, Tomes I et II*. Courcier, Paris (1811). <https://archive.org/details/mcaniqueanalyti06lagrgoog>

[3] C. Rovelli: *L'ordine del Tempo*. Adelphi, Milano (2017).

[4] C. Rovelli, F. Vidotto: *Covariant Loop Quantum Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge (2014).

[5] D. Gross, M. Henneaux, A. Sevrin: *The theory of Quantum World, Proceedings of the 25th Solvay Conference on Physics*. World Scientific, Singapore (2013).

[6] E. Fermi, J. R. Pasta, S. M. Ulam: "Studies of non linear problems", *Los Alamos Sc. Lab.* **LA-1940** (1955) Gli autori ringraziarono Ms M. Tsingou per aver programmato la simulazione sul MANIAC.

[7] J. Von Neumann, R. D. Richtmyer: "A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks", *J. Appl. Phys.* **21** (1950) 232-237.

[8] H. Poincaré: *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars et fils, Paris (1892).

[9] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko: *Classical Mechanics (Third Edition)*. Addison Wesley, San Francisco (2000).

[10] A.N. Kolmogorov: "On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", *Dokl. Acad. Nauk SSR* **98** (1954) 527-530. in russo

[11] V. I. Arnold: "Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian", *Russian Mathematical Surveys* **18** (1963) 9-36.

[12] J. Moser: "On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus", *Nachricht von der Akademie der Wissenschaften Gottingen II, Math. Phys.* **K1** (1962) 1-20.

[13] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: "Method for solving the Korteweg-deVries equation", *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095.

[14] J. S. Russell: "Report on Waves", *Report of the XIV meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, 1844, London* (1845) 311.

[15] A. C. Scott: "Propagation of magnetic flux on a long Josephson junction", *Nuovo Cimento* **B69** (1970) 241-261.

[16] J. Boussinesq: "Essai sur la theorie des eaux courantes", *Acad. des Sci. Inst. Nat. France* **XXIII** (1877)

[17] D. J. Korteweg, G. de Vries: "On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves", *Philosophical Magazine* **39** (1895) 422.

[18] G. B. Witham: *Linear and non linear waves*. John Wiley & Sons, New York (1974).

[19] N. J. Zabusky, M. D. Kruskal: "Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States", *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 240-243.

[20] P. D. Lax: "Integrals of non linear equations of evolution and solitary waves", *Commun. Pure Appl. Math.* **28** (1968) 141-188.

[21] F. Magri: "A simple model of the integrable Hamiltonian equation", *J. Math. Phys.* **1978** (19) 1156-1162.

[22] A. B. Shabat and V. E. Zakharov: "A scheme for integrating the non linear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I", *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974) 226.

[23] A. B. Shabat and V. E. Zakharov: "Integration of non linear equations of mathematical physics by the method of inverse scattering. II", *Funct. Anal. Appl.* **13** (1979) 166.

[24] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur: "The inverse scattering transform-Fourier analysis for non linear problems", *Studies in Appl. Math.* **53** (1974) 249-315.

[25] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson: "Gravitation, gauge theories and differential geometry", *Physics Reports* **66** (1980) 213 - 393.

- [26] H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook: "Bäcklund Transformation for Solutions of the Korteweg-de Vries Equation", *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 1386–1390.
- [27] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan: *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag, Berlin (1987).
- [28] M. J. Ablowitz, H. Segur: *Solitons and the Inverse Scattering Transform*. SIAM, Philadelphia (1981).
- [29] F. Calogero, A. Degasperis: *Spectral Transform and Solitons I*. North-Holland, Amsterdam (1982).
- [30] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky and V. E. Zakharov: *Theory Of Solitons. The Inverse Scattering Method*. Consultants Bureau, New York (1984).
- [31] C. Rebbi, G. Soliani: *Solitons and Particles*. World Scientific, Singapore (1984).
- [32] B. G. Konopelchenko: *Non linear Integrable Equations*. Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin (1987).
- [33] M. Toda: *Non linear waves and solitons*. Kluwer, Dordrecht (1989).
- [34] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson: *Solitons, non linear Evolution Equations and Inverse Scattering*. Cambridge University Press, Cambridge (1991).
- [35] V. E. Zakharov: *What is Integrability?*. Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [36] R. Rajaraman: *Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory*. North-Holland, Amsterdam (1989).
- [37] B. G. Konopelchenko: *Introduction to Multidimensional Integrable Equations*. Plenum Monograph in non linear Physics, Springer, Berlin (1992).
- [38] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon: *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [39] R. J. Baxter: *Exactly solved models in statistical mechanics*. Dover Publications, Inc., New York (2007).
- [40] B. Sutherland: *Beautiful Models. 70 Years of Exactly Solved Quantum Many-Body Problems*. World Scientific, Singapore (2007).
- [41] M. Dunajski: *Solitons, Instantons, and Twistors*. Oxford University Press, Oxford (2010).
- [42] N. Manton, P. Sutcliffe: *Topological Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge (2004).
- [43] E. J. Weinberg: *Classical Solutions in Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge (2012).
- [44] H. Segur: "Integrable models of waves in shallow water", *Probability, geometry and integrable systems* (2008) 345-371.
- [45] I. M. Gelfand and B. M. Levitan: "On the determination of a differential equation from its spectral function", *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **1** (1955) 253-304.
- [46] V. A. Marchenko: "Sturm-Liouville operators and their applications", *Kiev Izdatel Naukova Dumka* **1** (1977) 332. in russo.
- [47] N. I. Akhiezer: "Continuous analogues of the polynomials orthogonal on the system of intervals", *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **141** (1961) 263-266.
- [48] D. Mumford: *Tata lectures on Theta - II*. Birkhäuser, Boston (1984).
- [49] B. A. Dubrovin: "The inverse scattering problem for periodic finite-zone potentials", *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975) 61-62.
- [50] A.R. Its, V.B. Matveev: "Hill operators with a finite number of lacunae", *Funct. Anal. Appl.* **9** (1975) 65-66.
- [51] T. Trogdon, B. Deconinck: "Numerical computation of the finite-genus solutions of the Korteweg - de Vries equation via Riemann-Hilbert problems", *Applied Mathematics Letters* **26** (2013) 5-9.
- [52] E. Arbarello: "Sketches of KdV", *Contemp. Math. Amer. Math. Soc.* **312** (2002) 9-70.
- [53] R. Camassa, D. D. Holm: "An integrable shallow water equation with peaked solitons", *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1661-1664.
- [54] A. Degasperis: *Multiscale Expansion and Integrability of Dispersive Wave Equations*. Integrability, Ed. A. V. Mikhailov, Springer, Berlin (2009).
- [55] B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili: "On the stability of solitary waves in weakly dispersive media", *Sov. Phys. - Dokl.* **15** (1970) 539-541.
- [56] S. V. Manakov: "The inverse scattering transform for the time-dependent Schrödinger equation and Kadomtsev-Petviashvili equation", *Physica* **3D** (1981) 420-427.
- [57] A.S. Fokas, M. J. Ablowitz: "On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation", *Phys. Lett.* **94A** (1983) 67-70.
- [58] M. Boiti, J. J.-P. Leon, F. Pempinelli: "Spectral transform and orthogonality relations for the Kadomtsev-Petviashvili I equation", *Phys. Lett. A* **141** (1989) 96-100.
- [59] D. David, D. Levi, P. Winternitz: "Bäcklund Transformations and the infinite-dimensional symmetry group of the Kadomtsev-Petviashvili equation", *Phys. Lett. A* **118** (1986) 390-394.
- [60] F. Magri, C. Morosi, G. Tondo: "Nijenhuis  $G$ -manifolds and Lenard bicomplexes: a new approach to KP systems", *Comm. Math. Physics* **3** (1988) 457-475.
- [61] T. Miwa, M. Jimbo and E. Date: *Solitons: Differential equations, symmetries and infinite-dimensional algebras*. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [62] R. Beals, R.R. Coifman: *Scattering, transformations spectrales et equations d'évolution non lineaire, I and II*. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, École Polytechnique, Palaiseau (1981-1982).
- [63] V. L. Ginzburg, L. D. Landau: "On the Theory of superconductivity", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20** (1950) 1064-1082.
- [64] E. P. Gross: "Structure of a quantized vortex in boson systems", *Il Nuovo Cimento* **20** (1961) 454-477.
- [65] L. P. Pitaevskii: "Vortex lines in an imperfect Bose gas", *Sov. Phys. JETP.* **13** (1961) 451-454.

- [66] L. P. Pitaevskii, S. Stringari: *Bose-Einstein Condensation*. Clarendon Press, Oxford (2003).
- [67] V. E. Zakharov: "Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **9** (1968) 190-194.
- [68] M. Onorato, D. Proment, G. Clauss, M. Klein: "Rogue Waves: From non linear Schrödinger Breather Solutions to Sea-Keeping Test", *PLOS ONE* **8** (2013) e54629.
- [69] R. Y. Chiao, E. Garmire, and C. H. Townes: "Self-Trapping of Optical Beams", *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 479.
- [70] A. Hasegawa and Y. Kodama: *Solitons in Optical Communications*. Clarendon, Oxford (1995).
- [71] G. P. Agrawal: *Non linear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego (1995).
- [72] G. Assanto and N. F. Smyth: "Light-Induced Waveguides in Nematic Liquid Crystals", *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* **22** (2016) 4400306.
- [73] V. I. Karpman: "On the Dynamics of Sonic-Langmuir Solitons", *Physica Scripta* **11** (1975) 263.
- [74] A. S. Davydov: "The theory of contraction of proteins under their excitation", *Journal of Theoretical Biology* **38** (1973) 559-569.
- [75] L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette, W. Zakrzewski: "Solitons in  $\alpha$ -helical proteins", *Physical Review E* **70** (2004) 031914.
- [76] E. H. Lieb, W. Liniger: "Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I", *Physical Review* **130** (1963) 1605-1616.
- [77] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin: *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [78] C. Sulem, P.-L. Sulem: *The non linear Schrödinger equation. Self focusing and wave collapse*. Springer, Berlin (1999).
- [79] A. Davey, K. Stewartson: "On three-dimensional packets of surface waves", *Proc. Roy. Soc. London A* **338** (1974) 101-110.
- [80] L. Martina, O.K. Pashaev, G. Soliani: "Chern-Simons Field Theory and Completely integrable Systems", *Phys. Lett. B* **378** (1996) 175-180.
- [81] V.A. Arkadiev, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov: "Closed string-like solutions of the Davey-Stewartson equation", *Inverse Problems* **5** (1989) L1-L6.
- [82] V.A. Arkadiev, A.K. Pogrebkov, M.C. Polivanov: "Inverse scattering transform method and soliton solutions for Davey-Stewartson II equation", *Physica D* **36** (1989) 189-197.
- [83] M. Boiti, J.J-P. Leon, L. Martina, F. Pempinelli: "Scattering of localized solitons in the plane", *Phys. Lett. A* **132** (1988) 432-439.
- [84] F. Pempinelli, M. Boiti, J. Leon, L. Martina: *Exponentially localized solitons in 2+1 dimensions*. in "non linear World", Eds. V.G. Bar'yakhtar et al., World Scientific Pub. Co., Singapore (1990).
- [85] Fokas, A. S. and Santini, P. M.: "Coherent structures in multidimensions", *Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 1329-1333.
- [86] M.Boiti, L. Martina, O.K. Pashaev, F. Pempinelli: "Dynamics of multidimensional solitons", *Phys. Lett. A* **160** (1991) 55-63.
- [87] B. Yang, Y. Chen, General rogue waves and their dynamics in several reverse time integrable nonlocal non linear equations, arXiv:1712.05974 [nlin.SI] (2017).
- [88] C. Klein, N. Stoilov, Numerical study of blow-up mechanisms for Davey-Stewartson II systems arXiv:1712.08814 [math.AP] (2017).
- [89] E. Bour: "Théorie de la déformation des surfaces", *J. Ecole Imperiale Polytechnique* **19** (1862) 1848.
- [90] L. Bianchi: *Lezioni di Geometria differenziale*. Spoerri, Pisa (1922).
- [91] A. V. Bäcklund: "Zur Theorie der Flächentransformationen", *Math. Ann.* **XIX** (1882) 387-422.
- [92] J. Frenkel, T. Kontorova: "On the theory of plastic deformation and twinning", *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya* **1** (1939) 137-149.
- [93] J. Goldstone, R. Jackiw: "Quantization of non linear waves", *Phys. Rev. D* **11** (1975) 1486-1498.
- [94] R. Jackiw: "Quantum meaning of classical field theory", *Rev. Mod. Phys.* **49** (1977) 681-706.
- [95] S. Coleman: "Quantum sine-Gordon equation as the massive Thirring model", *Phys. Rev. D* **11** (1975) 2088-2097.
- [96] G. L. Lamb: "Analytical Descriptions of Ultrashort Optical Pulse Propagation in a Resonant Medium", *Rev. Mod. Phys.* **43** (1971) 99-124.
- [97] I.W. Stewart: *The Static and Dynamic Continuum Theory of Liquid Crystals*. Taylor and Francis, London and New York (2004).
- [98] G. De Matteis, L. Martina, V. Turco: "Skyrmion States In Chiral Liquid Crystals", *in via di pubblicazione su Theor. Math. Phys.* **194** (2018) .
- [99] C. Rogers, W. K. Schief: *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [100] F. Calogero: "Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials", *J. Math. Phys.* **12** (1971) 419-436. (Erratum, *ibidem* **37** (1996), 3646)
- [101] J. Moser: "Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations", *Adv. Math.* **16** (1975) 197-220.
- [102] M. Toda: "Vibration of a Chain with non linear Interaction", *Journal of the Physical Society of Japan* **22** (1967) 431-436.
- [103] S. N. M. Ruijsenaars: "Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities", *Commun. Math. Phys.* **110** (1987) 191-213.
- [104] B. Sutherland: "Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. I and II", *Phys. Rev. A* **4** (1971) 2019-2021.; *ibidem* **5** (1972), 1372-1376.

- [105] M. Leo, R. A. Leo, P. Tempesta: "On the high energy stability of the nonlinear modal solutions for the Fermi-Pasta-Ulam  $\beta$  system", *J. Stat. Mech.: Th. Exp.* **2011** (2011) P03003.
- [106] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov: "Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras", *Physics Reports* **71** (1981) 313 - 400.
- [107] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov: "Quantum integrable systems related to lie algebras", *Physics Reports* **94** (1983) 313 - 404.
- [108] G. Mussardo: *Statistical Field Theory. An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*. Oxford University Press, Oxford (2009).
- [109] E. K. Sklyanin: "Quantum version of the method of inverse scattering problem", *J. Sov. Math.* **19** (1982) 1546.
- [110] L. D. Faddeev and V. E. Zakharov: "Korteweg-de Vries equation: A Completely integrable Hamiltonian system", *Funct. Anal. Appl.* **5** (1971) 280.
- [111] V. G. Drinfeld: "Quantum groups", *J. Sov. Math.* **41** (1988) 898.
- [112] M. Jimbo: "Quantum  $R$  matrix for the generalized Toda system", *Comm. Math. Phys.* **102** (1986) 537-547.
- [113] A. B. Zamolodchikov and A. B. Zamolodchikov: "Factorized  $S$ -Matrices in Two-Dimensions as the Exact Solutions of Certain Relativistic Quantum Field Models", *Annals Phys.* **120** (1979) 253.
- [114] L. D. Faddeev, "How algebraic Bethe ansatz works for integrable model", Les Houches lectures, 1995. arXiv:9605187 [hep-th] (1996).



**Luigi Martina:** Luigi Martina è professore associato di Fisica Teorica presso l'Università del Salento. La sua attività di ricerca è incentrata nello studio di sistemi fisici non lineari con metodi analitici e algebrici.

